111 FELADAT ALGEBRAI EGYENLŐTLENSÉGEKRE

Vegyes feladatok különböző megoldási módszerekre

1.
Igazoljuk, hogy

a) $$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{2006}{2007!}<1,$$

b) $$\left(1+\frac{1}{1\cdot 3}\right)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4}\right)\left(1+\frac{1}{3\cdot 5}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2007\cdot 2009}\right)<2,$$

c) $$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\ldots+\frac{1}{1+2+\ldots+2008}<2\ !$$

2.
Igazoljuk számológép felhasználása nélkül, hogy

a) $$\frac{8000}{7999}\cdot\frac{7997}{7996}\cdot\frac{7994}{7993}\cdot\ldots\cdot\frac{1004}{1003}\cdot\frac{1001}{1000}>2,$$

b) $$\frac{13}{12}<\frac{1}{2008}+\frac{1}{2009}+\ldots+\frac{1}{8028}<\frac{11}{6},$$

c) $$\frac{1}{15}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}\ !$$

3.
Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész n szám esetén

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2\,!$$

4.
Határozzuk meg a valós számokon értelmezett

a) $$f(x)=|x+1|+|x|+|x-2|,$$

b) $$g(x)=|x+1|+|x-2|+|x-3|+|x-7|$$

függvény minimális értékét és a minimum helyét!

5.
Mutassuk meg, hogyha két pozitív szám szorzata nagyobb az összegüknél, akkor a számok összege 4-nél nagyobb!

6.*

Igazoljuk, hogy $a,b,c>0$ esetén

a) $$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\le\frac{1}{4}(a+b+c),$$

b) $$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\ge 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right).$$

7.*

a) A nem negatív $a_1,a_2,\dots,a_n$ számok között a legnagyobb legyen a. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}{n}-\left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\right)^2\le\frac{a^2}{4}\,!$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

b) Mutassuk meg, hogyha $a_1,a_2,\dots,a_n$ pozitív számok, akkor

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}\ge\frac{\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n}\right)^2}{n}\quad!$$

c) Jelöljenek $a_1,a_2,\dots,a_n$ nem negatív számokat, ahol $n>2$. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{n}\sum_{i<j}\left|a_i-a_j\right|\ge\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}\quad!$$

8.

Határozzuk meg az

$$f(x)=x^4+6x^3+11x^2+6x$$

függvény minimális értékét!

9.

Az x,y,z valós számokra:

$$x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1.$$

Határozzuk meg az

$$x^2+y^2+z^2$$

kifejezés minimumát illetve maximumát!

10.

Az a, b, c, d valós számokra $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Határozzuk meg a

$$K=(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(c+d)^4$$

kifejezés maximális értékét!

11.
A pozitív a, b, c és d számok összege 1. Mutassuk meg, hogy

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \le \frac{5}{16} + abcd \text{ !}$$

12.
a) Az $x_1, x_2, ..., x_n$ számok mindegyike a $[0;1]$ intervallum eleme. Igazoljuk, hogy

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n + 1)^2 \ge 4\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right) \text{ !}$$

b) Tudjuk, hogy az x, y, z valós számokra: $0 \le x, y, z \le 1$. Igazoljuk, hogy

$$2\left(x^3 + y^3 + z^3\right) - \left(x^2 y + y^2 z + z^2 x\right) \le 3 \text{ !}$$

13.*
a) Az x_1, x_2, …, x_{2007} nem negatív számok összege 1. Határozzuk meg az

$$S = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + ... + x_{2006} x_{2007}$$

összeg maximumát!

b) Az x_1, x_2, …, x_{2008} számok mindegyike a $[0;1]$ intervallum eleme. Határozzuk meg az

$$S = x_1 + x_2 + ... + x_{2008} - x_1 x_2 - x_2 x_3 - ... - x_{2007} x_{2008} - x_{2008} x_1$$

kifejezés maximális értékét!

14.
Igazoljuk, hogyha a, b, c pozitív számok, akkor

$$abc \ge (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \text{!}$$

15.*
Az a, b, c pozitív számok és $abc = 1$. Igazoljuk, hogy akkor

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \le 1 \text{!}$$

16.**
a) Ha x, y, z nem negatív számok és $r > 0$, akkor

$$x^r (x-y)(x-z) + y^r (y-z)(y-x) + z^r (x-z)(y-z) \ge 0 \text{!}$$

(*Schur-egyenlőtlenség*)

b) Az a, b és c olyan nem negatív számok, melyek összege 1. Igazoljuk, hogy

$$4a^3+4b^3+4c^3+15abc\geq 1!$$

17.
Igazoljuk, hogyha a, b és c pozitív számok, akkor

$$1<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<2!$$

Élesíthető-e valamelyik egyenlőtlenség?

18.
A pozitív a, b, c és d számok olyanok, hogy

$$\frac{a+b}{c+d}<2.$$

Igazoljuk, hogy akkor

$$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}<8!$$

19.*
Igazoljuk, hogyha $a,b,c>0$, akkor

a) $$3>\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\geq 1,$$

b) $$\frac{1}{2}<\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ac}+\frac{c^2}{2c^2+ab}\leq 1!$$

20.
Az a, b, c pozitív számok és $abc=1$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{(a+1)^2+b^2+1}+\frac{1}{(b+1)^2+c^2+1}+\frac{1}{(c+1)^2+a^2+1}\leq\frac{1}{2}\ !$$

21.*
Az x, y, z olyan nem negatív számok, melyek összege 1. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}\leq\frac{5}{2}\leq\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\ !$$

22.*
Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív $a_1, a_2, ..., a_n$ számok esetén

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + ... + \frac{n}{a_1 + a_2 + ... + a_n} < 4\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right)!$$

23.**
Tudjuk, hogy az $x_1, x_2, ..., x_n$ pozitív számok összege 1. Igazoljuk, hogy

$$\left(\frac{1}{x_1^2} - 1\right)\left(\frac{1}{x_2^2} - 1\right) \cdot ... \cdot \left(\frac{1}{x_n^2} - 1\right) \geq \left(n^2 - 1\right)^n \ !$$

24.*
Döntsük el, hogy az alábbi számok közül melyik a nagyobb, ha $a_1, a_2, ..., a_n$ pozitív számokat jelölnek:

$$\sqrt[2006]{a_1^{2006} + a_2^{2006} + ... + a_n^{2006}} \text{ vagy } \sqrt[2007]{a_1^{2007} + a_2^{2007} + ... + a_n^{2007}} \ ?$$

25.*
Igazoljuk, hogyha a, b és c pozitív számok, akkor

$$a^{2a} b^{2b} c^{2c} \geq a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b} \ !$$

26.*
Tekintsük az

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

sorozatot, ahol n pozitív egész. Igazoljuk, hogy a_n szigorúan monoton csökken!

27.*
Igazoljuk, hogy az

$$s_n = \frac{1}{\lg 2} + \frac{1}{2 \lg 3} + ... + \frac{1}{n \lg(n+1)}$$

összeg nem korlátos!

28.*
Legyenek x, y, z olyan nem negatív számok, amelyek összege 1. Határozzuk meg az

$$xy + yz + zx - 2xyz$$

kifejezés legnagyobb értékét!

29.*
Legyenek x, y, z 21-nél nem nagyobb pozitív valós számok, amelyek összege 48. Mekkora az

$$(x+4)(y+4)(z+4)$$

szorzat legkisebb értéke?

A NEVEZETES KÖZEPEK ALKALMAZÁSAI

30.
Legyenek a, b és c olyan pozitív számok, melyek összege 1. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$(1+a)(1+b)(1+c)\geq 8(1-a)(1-b)(1-c)\ !$$

31.
Az a, b, c pozitív számokra $abc=1$ teljesül. Igazoljuk, hogy

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 2(1+a+b+c)\ !$$

32.*
Az x, y, z pozitív számok összege 3. Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\geq xy+yz+zx!$$

33.*
Legyenek x, y, z olyan nem negatív számok, amelyek összege 1. Határozzuk meg az

$$x^2y+y^2z+z^2x$$

kifejezés legnagyobb értékét!

34.*
Igazoljuk, hogyha x, y, z pozitív számok, akkor

a) $$x^4y+y^4z+z^4x\geq x^2y^2z+y^2z^2x+z^2x^2y\ ,$$

b) $$x^5y+y^5z+z^5x\geq x^3y^2z+y^3z^2x+z^3x^2y\ !$$

35.*
Igazoljuk, hogyha a, b, c, d pozitív számok, akkor

$$a^4b+b^4c+c^4d+d^4a\geq abcd(a+b+c+d)!$$

36.
Igazoljuk, hogyha a, b és c pozitív számok, akkor

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\geq 3\sqrt{2}\ !$$

37.*
Az x, y, z pozitív számok összege 1. Igazoljuk, hogy

$$\frac{xy}{\sqrt{\frac{1}{3}+z^2}}+\frac{yz}{\sqrt{\frac{1}{3}+x^2}}+\frac{zx}{\sqrt{\frac{1}{3}+y^2}}\le\frac{1}{2}!$$

38.
Igazoljuk, hogyha $a,b,c>0$, akkor

$$\frac{2\left(a^3+b^3+c^3\right)}{abc}+\frac{9(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\ge 33!$$

39.*
Az a, b, c pozitív számok. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\ge\frac{3}{1+abc}!$$

40.**
a) Igazoljuk, hogyha a, b és c pozitív számok, akkor

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1!$$

c) Igazoljuk, hogyha az x, y, z pozitív számokra teljesül $xyz=8$, akkor

$$\frac{1}{\sqrt{2x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2y^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2z^2+1}}\ge 1!$$

41.**
Igazoljuk, hogy $x,y,z>0$ esetén

$$\left(x^2+2\right)\left(y^2+2\right)\left(z^2+2\right)\ge 9(xy+yz+zx)!$$

A CAUCHY-EGYENLŐTLENSÉG ALKALMAZÁSAI

42.
Az a, b, c, d pozitív számok. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\ge\frac{64}{a+b+c+d}!$$

43.
A $P(x)$ polinom együtthatói pozitív számok és $P(1)\ge 1$. Igazoljuk, hogy akkor $x>0$ esetén

$$P\left(\frac{1}{x}\right)\ge \frac{1}{P(x)}\ !$$

44.
Az a, b, c pozitív számok és $abc=1$. Igazoljuk, hogy akkor

$$a+b+c\le a^2+b^2+c^2\ !$$

45.*
Igazoljuk, hogy a pozitív a, b, c számokra:

a) $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\ge \dfrac{a+b+c}{2}$,

b) $\dfrac{a^2}{a+b}+\dfrac{b^2}{b+c}+\dfrac{c^2}{c+a}\ge \dfrac{a+b+c}{2}$,

c) $\dfrac{a^n}{b+c}+\dfrac{b^n}{c+a}+\dfrac{c^n}{a+b}\ge \dfrac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}$, ahol n pozitív egész,

d) $\dfrac{a_1^2}{a_1+a_2}+\dfrac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\dfrac{a_n^2}{a_n+a_1}\ge \dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{2}$, ahol n pozitív egész!

46.*
Igazoljuk, hogy a pozitív a_i és b_i számokra $(i=1,2,\ldots,n)$ teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n}\ge \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n}\ !$$

47.*
a) Mutassuk meg, hogyha $a,b,c>0$, akkor

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}\ !$$

(*Nesbitt-egyenlőtlenség*)

b) Mutassuk meg, hogyha $a,b,c,d>0$, akkor

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\ge 2\ !$$

c) Mutassuk meg, hogyha $a,b,c,d,e>0$, akkor

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+a}+\frac{e}{a+b}\geq\frac{5}{2}!$$

d) Mutassuk meg, hogyha $a,b,c,d,e,f>0$, akkor

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+f}+\frac{e}{f+a}+\frac{f}{a+b}\geq 3!$$

48.*
Igazoljuk, hogy az $a_1,a_2,\dots,a_n$ pozitív számokra, ahol $n\geq 3$:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\dots+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geq\frac{(a_1+a_2+\dots+a_n)^2}{2\left(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2\right)}!$$

49.*
Az a, b, x, y, z pozitív számok. Igazoljuk, hogy

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}\geq\frac{3}{a+b}!$$

50.*
Igazoljuk, hogyha a, b, c pozitív számok, akkor

$$\frac{a}{b(b+c)^2}+\frac{b}{c(c+a)^2}+\frac{c}{a(a+b)^2}\geq\frac{9}{4(ab+bc+ca)}!$$

51.*
Igazoljuk, hogy x, y, z pozitív számok esetén, ha

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=3,$$

akkor

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx+1}\geq\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}!$$

52.**
Az a, b, c pozitív számokra $a^2+b^2+c^2=1$ teljesül. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a^5}{b+c}+\frac{b^5}{c+a}+\frac{c^5}{a+b}\geq\frac{1}{6}!$$

53.**
Az a, b, c pozitív számokra teljesül, hogy $abc=1$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}\,!$$

TRIGONOMETRIKUS HELYETTESÍTÉSEK

54.*
A pozitív a, b, c számokra teljesül, hogy

$$a^2+b^2+c^2+abc=4\,.$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$a+b+c\leq 3\,!$$

55.*
Az x, y, z pozitív számokra teljesül, hogy $xyz=x+y+z$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\leq\frac{3}{2}\,!$$

56.*
Mutassuk meg, hogy bármely négy pozitív szám között található két olyan, x és y, hogy

$$0\leq\frac{x-y}{1+x+y+2xy}<2-\sqrt{3}\,!$$

57.*
Az $x_1,x_2,\dots,x_n$ valós számok mindegyike a $[-1;1]$ intervallum eleme és

$$x_1^3+x_2^3+\dots+x_n^3=0\,.$$

Mutassuk meg, hogy

$$x_1+x_2+\dots+x_n\leq\frac{n}{3}\,!$$

GEOMETRIAI MODELL

58.
Az x, y, z pozitív számok összege 1. Határozzuk meg az

$$S=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}$$

kifejezés legkisebb értékét!

59.*
Az a, b, c pozitív számok 1-nél kisebbek. Határozzuk meg az

$$L=\sqrt{a^2+1+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+1+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+1+(1-a)^2}$$

kifejezés legkisebb értékét!

60.
Igazoljuk, hogyha a nem negatív valós szám, akkor azokból a szakaszokból, melyek hosszainak mérőszámai $\sqrt{a^2-a+1}, \sqrt{a^2+a+1}, \sqrt{4a^2+3}$ háromszög szerkeszthető, továbbá bizonyítsuk be, hogy a háromszögnek van olyan magassága, amelynek a mérőszáma legfeljebb $\frac{1}{2}$!

61.
Igazoljuk, hogyha a, b, c pozitív valós számok, akkor

$$\sqrt{a^2+b^2-ab}+\sqrt{b^2+c^2-bc}\geq\sqrt{a^2+c^2+ac}\ !$$

62.
Az a, b, c pozitív számok 1-nél kisebbek. Igazoljuk, hogy

$$0<a+b+c-ab-bc-ca<1\ !$$

63.*
Az x, y, z pozitív számokra teljesül, hogy $xyz(x+y+z)=1$. Határozzuk meg

$$(x+y)(x+z)$$

minimális értékét!

FÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAI

64.*
Az a, b, c valós számok összege 7 és egyik sem kisebb, mint 1. Igazoljuk, hogy ekkor

$$2 \le \sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \le 2\sqrt{3} \text{ !}$$

65.*
Tudjuk, hogy $a \ge \frac{1}{4}$, $b \ge \frac{1}{4}$, $c \ge \frac{1}{4}$, továbbá $a+b+c=1$. Igazoljuk, hogy akkor

$$16^a + 16^b + 16^c \le 8 \text{ !}$$

66.*
a) Az a, b, c, d valós számokra teljesül, hogy $0 < a \le b \le c \le d$ és $a+b+c+d \ge 1$. Igazoljuk, hogy

$$a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2 \ge 1 \text{ !}$$

b) Az $a,b,c,d > 0$ számokra: $a \le 1, a+b \le 5, a+b+c \le 14, a+b+c+d \le 30$. Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d} \le 10 \text{ !}$$

67.*
Melyik a nagyobb:

$$\frac{2}{201} \text{ vagy } \ln 1{,}01 \text{ ?}$$

68.*
Igazoljuk, hogyha x és a olyan valós számok, melyekre $x > -1$ és $0 < a < 1$, akkor

$$(1+x)^a \le 1+ax \text{ !}$$

(*Bernoulli-egyenlőtlenség*)

69.*
Igazoljuk, hogy tetszőleges pozitív x valós szám esetén

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + x^{\frac{1}{2}} > 1 \text{ !}$$

70.*
Igazoljuk, hogy $0 < b < a$ estén

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2} \text{ !}$$

71.**
Legyen

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n .$$

Igazoljuk, hogy

a) $0 < c_n \le 1$,
b) c_n szigorúan monoton csökken,
c) ha $n \ge 3$, akkor $c_n > \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$!

72.*
Bizonyítsuk be, hogy minden $k \ge 1$ egész és x valós szám esetén

$$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^j \frac{x^j}{j!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} > 0 \ !$$

73.**
Igazoljuk, hogyha n pozitív egész, akkor

$$\frac{2^1+1}{2^1-1} \cdot \frac{2^2+1}{2^2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2^n+1}{2^n-1} < 9 \ !$$

VEGYES FELADATOK

74.*
Tudjuk, hogy az x, y, z valós számokra: $x, y, z \ge 2$. Igazoljuk, hogy

$$\left(x + y^3\right)\left(y + z^3\right)\left(z + x^3\right) \ge 125xyz \ !$$

75.
Az a, b, c valós számok összege 1. Igazoljuk, hogy

$$4\left(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc\right) \ge 3(a - b)^2 \ !$$

76.
Igazoljuk, hogyha $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ pozitív egész számok, akkor

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \ge \frac{2n+1}{3} \ !$$

77.*
Az a, b, c pozitív számok olyanok, hogy $abc=1$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+a+c}+\frac{1}{c^2+a+b}\le 1\ !$$

78.
Az a, b, c pozitív számok olyanok, hogy $ab+bc+ca=1$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1-a^2}{1+a^2}+\frac{1-b^2}{1+b^2}+\frac{1-c^2}{1+c^2}\le\frac{3}{2}!$$

79.*
Az a, b, c pozitív számok olyanok, hogy $ab+bc+ca=\frac{1}{3}$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a}{a^2-bc+1}+\frac{b}{b^2-ca+1}+\frac{c}{c^2-ab+1}\ge\frac{1}{a+b+c}\ !$$

80.**
Igazoljuk, hogyha a, b, c pozitív számok, akkor

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{c^2+cb+b^2}+\frac{c^2}{c^2+ac+a^2}\ge 1\ !$$

81.**
Az a, b, c olyan pozitív számok, hogy $abc=2$. Igazoljuk, hogy

$$a^3+b^3+c^3\ge a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\ .$$

82.*
Az x, y pozitív számokra fennáll, hogy $x^2+y^3\ge x^3+y^4$. Mutassuk meg, hogy akkor

$$x^3+y^3\le 2!$$

83.*
Az a, b, c pozitív számokra teljesül, hogy $a^2+b^2+c^2=1$. Igazoljuk, hogy akkor

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge a+b+c+2\sqrt{3}!$$

84.*
Az a, b és c olyan nem negatív számok, amelyekre $a+b+c=3$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a^2}{b^2+1}+\frac{b^2}{c^2+1}+\frac{c^2}{a^2+1}\ge\frac{3}{2}\ !$$

85.*

Az x, y, z valós számok olyanok, hogy $x+y+z=0$ és $x^2+y^2+z^2=6$. Határozzuk meg az xyz szorzat maximumát illetve minimumát!

86.**

Az a, b és c olyan nem negatív számok, amelyekre $a+b+c=1$. Igazoljuk, hogy

a) $5\left(a^2+b^2+c^2\right)\le 6\left(a^3+b^3+c^3\right)+1$,

b) $7\left(ab+bc+ca\right)\le 2+9abc$,

c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{25}{1+48abc}$, ahol $abc\ne 0$!

87.*

Az x, y, z pozitív számok szorzata 1. Igazoljuk, hogy akkor

$$\frac{xy}{x^5+xy+y^5}+\frac{yz}{y^5+yz+z^5}+\frac{zx}{z^5+zx+x^5}\le 1 \text{ !}$$

88.

Az a, b, c és d nem negatív valós számok és $a+b+c+d=4$. Igazoljuk, hogy

$$a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab\le 4 \text{ !}$$

89.*

Igazoljuk, hogyha a, b, c pozitív számok, akkor

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)}\ge\frac{27}{2(a+b+c)^2} \text{ !}$$

90.*

Az a, b, c valós számokra teljesül, hogy $a^2+b^2+c^2=9$. Igazoljuk, hogy

$$2(a+b+c)-abc\le 10 \text{ !}$$

91.**

Az a, b, c, x, y, z pozitív számok olyanok, hogy $cy+bz=a, az+cx=b, bx+ay=c$. Határozzuk meg az

$$f(x,y,z)=\frac{x^2}{1+x}+\frac{y^2}{1+y}+\frac{z^2}{1+z}$$

függvény minimális értékét!

92.*

Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ valós számok olyanok, hogy $0 < a_i < \frac{1}{2}$ teljesül minden i-re. Igazoljuk, hogy

$$\left(\frac{n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} - 1\right)^n \le \left(\frac{1}{a_1} - 1\right)\left(\frac{1}{a_2} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{a_n} - 1\right) \;!$$

93.

Az x, y, z pozitív számok összege 1. Mutassuk meg, hogy akkor

$$\frac{1}{1+4x^2} + \frac{1}{1+4y^2} + \frac{1}{1+4z^2} > 2 \;!$$

94.

Igazoljuk, hogyha n pozitív egész, akkor

$$(2n-1)^n + (2n)^n \le (2n+1)^n \;!$$

95.*

Az x, y, z nem negatív valós számok, melyek összege 3. Igazoljuk, hogy

$$x^2 + y^2 + z^2 + xyz \ge 4 \;!$$

96.*

Az a, b, c nem negatív valós számok olyanok, hogy $ab + bc + ca = 3$. Igazoljuk, hogy

$$(3a^2 + 1)(3b^2 + 1)(3c^2 + 1) \ge 64 \;!$$

97.*

Igazoljuk, hogy ha n pozitív egész és minden i-re $0 < a \le x_i \le b$, ahol a és b rögzített valós számok, akkor

$$n^2 \le (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \le \frac{1}{4}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right)n^2 \;.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

98.*

Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitív számok, akkor

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3 + \ldots + x_n} + \frac{x_2}{x_1 + x_3 + \ldots + x_n} + \ldots + \frac{x_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}} \ge \frac{n}{n-1} \;!$$

99.*
a)
Igazoljuk, hogy ha $x_1, x_2, ..., x_n$ pozitív számok, akkor

$$\sqrt[n]{(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)} \geq 1+\sqrt[n]{x_1x_2...x_n} \quad !$$

b)
Igazoljuk, hogy ha $x_1, x_2, ..., x_n$ 1-nél kisebb pozitív számok, akkor

$$\sqrt[n]{(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_n)} \leq 1-\sqrt[n]{x_1x_2...x_n} \quad !$$

100.*
a) Igazoljuk, hogy ha $x_1, x_2, ..., x_n > 1$, akkor

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+...+\frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}} \quad !$$

b) Igazoljuk, hogy ha $0 < x_1, x_2, ..., x_n < 1$, akkor

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+...+\frac{1}{1+x_n} \leq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}} \quad !$$

101.*
Az $x_1, x_2, ..., x_n$ pozitív számok szorzata 1. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+...+\frac{1}{n-1+x_n} \leq 1 \quad !$$

102.*
Határozzuk meg az összes olyan k valós számot, amelyekre teljesül az

$$a^3+b^3+c^3+d^3+1 \geq k(a+b+c+d)$$

egyenlőtlenség, bármely $a,b,c,d \geq -1$ valós számok esetén!

103.*
Az $a_1, a_2, ..., a_{2k+1}$ nem negatív valós számok $(k \geq 1)$, melyekre teljesül, hogy

$$a_1+a_2+...+a_{2k+1}=2,$$
$$a_1a_2+a_2a_3+...+a_{2k}a_{2k+1}+a_{2k+1}a_1=1.$$

Határozzuk meg az

$$S=a_1^2+a_2^2+...+a_{2k+1}^2$$

kifejezés legnagyobb illetve legkisebb értékét!

104.
Az $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \geq 4)$ olyan valós számok, amelyekre teljesül, hogy

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n,$$
$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \geq n^2.$$

Igazoljuk, hogy $\max(a_1, a_2, ..., a_n) \geq 2$!

105.*
Igazoljuk, hogyha $a, b, c, x, y, z > 0$, akkor

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)} \ !$$

106.
Az x, y, z valós számokra teljesül, hogy $x \leq y \leq z$. Igazoljuk, hogy akkor

$$xy^4 + yz^4 + zx^4 \geq x^4y + y^4z + z^4x \ !$$

107.*
Az a, b, c számok a $[0;1]$ intervallum elemei. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1 \ !$$

108.
Az a, b, c nem negatív számokra: $a+b+c=1$. Igazoljuk, hogy

$$a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{12abc} \leq 1 \ !$$

109.*
Igazoljuk, hogy $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ esetén $(n \geq 3)$ teljesül, hogy

$$2^{\frac{n}{2}} \cdot (a_1 + a_2)(a_2 + a_3)...(a_n + a_1) < (a_1 + a_2 + a_3)(a_2 + a_3 + a_4)...(a_n + a_1 + a_2) \ !$$

110.
Igazoljuk, hogyha $x, y, z > 0$, akkor

a) $$\frac{x}{x+2y+3z} + \frac{y}{3x+y+2z} + \frac{z}{2x+3y+z} \geq \frac{1}{2},$$

b) $$\frac{x}{2x+y+z} + \frac{y}{x+2y+z} + \frac{z}{x+y+2z} \leq \frac{3}{4}.$$

111.*

Igazoljuk, hogy tetszőleges a, b, c valós számok esetén

$$\sqrt{a^2-a+1}+\sqrt{b^2-b+1}+\sqrt{c^2-c+1}\geq\sqrt{a^2+b^2+c^2+a+b+c+3}\ !$$