A rekurzív módszer

Erdős Gábor, Nagykanizsa

Gyakran találkozunk olyan feladatokkal, amelyekben nagy számok szerepelnek: 1000 pont, 2010 számkártya, stb. Az ilyen esetekben kézenfekvő ötlet, hogy az eredeti feladat helyett először egy jóval egyszerűbb problémát kezdünk vizsgálni. Mi a helyzet, ha a pontok száma 2, 3, 4, … Ha észreveszünk valami szabályosságot, akkor azt megpróbáljuk igazolni, majd alkalmazni az eredeti problémában szereplő nagy számokra. Természetesen általános iskolai szinten nagyon gyakran megelégszünk a sejtés megfogalmazásával és alkalmazásával, és nem minden esetben kell hogy törekedjünk a bizonyításra. Vannak azonban csalóka feladatok. Olyanok, amelyekben látszólag nem olyan nagy számok szerepelnek: nyolcszög csúcsai, 12 indián, 10 építőkocka. Csábító, hogy azonnal az eredeti problémával kezdjünk foglalkozni, ez azonban nagyon sokszor rengeteg eset vizsgálatával járna. Ilyen esetekben sokkal nehezebben adódik az előbbi ötlet: próbálkozhatunk ilyenkor is kisebb számokkal, egyszerűbb esetek vizsgálatával. Előadásomon ilyen jellegű problémákat szeretnék bemutatni.

1. feladat

Egy építőkészletben háromféle színű építőkocka található: a sárgák és a kékek 2 cm magasak, a pirosak 1 cm-esek. Hányféle 10 cm magas torony építhető, ha minden színből kellő számú elem áll rendelkezésre? (3 cm magas toronyból 5 féle építhető: PPP, PK, KP, PS, SP.)

Megoldás:

A probléma némi kombinatorikai ismerettel nyíltsisakos rohammal is támadható. Vizsgáljuk az eseteket a 2 cm-es darabok száma szerint, ez lehet 5, 4, 3, 2, 1 és 0. Mindegyik 2 cm-es darab kétféle színű lehet, így ha a 2 cm-es darabok száma *k*, akkor ezek színezése 2^k -féle lehet. Ha a 2 cm-es darabok száma *k*, akkor az 1 cm-eseké 10-2*k*, vagyis az összes darabok száma 10-*k*. Ezek közül a 2 cm-es darabok helyét kell kiválasztani, ahányféleképpen ezt megtehetjük, annyi a lehetséges sorrendek száma, vagyis $\binom{10-k}{k}$. A 10 cm-es tornyok száma tehát

$$\sum_{k=0}^{5}\binom{10-k}{k}\cdot 2^k = 1\cdot 1+9\cdot 2+28\cdot 4+35\cdot 8+15\cdot 16+1\cdot 32=683.$$

Ez a megoldás azonban a binomiális együtthatók ismeretét igényli, általános iskolai szinten nehéz. Vizsgáljuk hát rekurzíven, mi a helyzet, ha a torony nem ilyen magas? Jelöljük az n cm magas tornyok számát t_n-nel, keressük t_{10} értékét. Nyilván $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, és mint a feladatnál szereplő példából látszik, $t_3 = 5$. Nyugodtan próbálkozhatunk tovább, felírva az összes eseteket – érettségiben, kompetenciamérések során látszik, sokaknak nem is olyan egyszerű módszeresen összegyűjteni az összes lehetséges esetet. Hagyjuk a gyerekeket, míg rá nem jönnek valami szabályosságra, engedjük, hogy gyűjtsenek újabb eseteket, de segítsünk abban, hogy mindezt módszeresen tegyék! Mi azonban most megpróbálhatjuk megmondani az eddigiek alapján, hány 4 cm-es torony van. Milyen színű lehet a legfelső darab? Lehet piros. Hány ilyen 4 cm-es torony van? A piros alatt egy szabályos 3 cm-es torony látható. Mint láttuk, ilyenből 5 van, vagyis piros tetejű 4 cm-es toronyból is 5 van. És kék tetejűből? Ez alatt egy 2 cm-es „torony" van, ami csak háromféle lehet, vagyis ilyenből 3 van, mint ahogy sárga tetejűből is. Vagyis a 4 cm-es tornyok száma 11. Mindezt úgy kaptuk, hogy $t_4 = t_3 + 2 \cdot t_2$. Ez a rekurzív formula általánosítható, azaz $t_n = t_{n-1} + 2 \cdot t_{n-2}$. A kezdeti értékekből a sorozat első néhány eleme egyszerű számítással megkapható: 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683. Nem várható el általános iskolai szinten az általános képlet megsejtése, de a másodfokú rekurziónál használatos módszerrel megkapható, hogy $t_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$. A képlet középiskolában teljes indukcióval igazolható.

2. feladat

Az *ABCDEFGH* szabályos nyolcszög csúcsait 3 színnel színezzük úgy, hogy a szomszédos csúcsok ne legyenek azonos színűek. Hány különböző színezés van? Két színezés különböző, ha bármely betűvel jelölt csúcs a két színezésben különböző színű.

Megoldás:

Itt is létezik kombinatorikus megoldás, ami ezúttal sem könnyű. Legyen elsőként az *A* pont piros, és vizsgáljuk az eseteket aszerint, hogy ezen kívül hány piros pont van még. Ha nincs, akkor a *B* pont kétféle lehet, ha viszont ezt kiszíneztük, akkor innen kezdve a *C*, *D*, … pontok színezése egyértelmű, hiszen felváltva kell ismétlődnie a két másik színnek, azaz 2 ilyen színezés van. Ha még egy piros pont van, akkor az lehet a *C*, *D*, *E*, *F* vagy a *G*, ez eddig 5 eset, mindegyik esetben a piros pontok közti két íven a többi pont színe 2-2 féle lehet, így ekkor $5 \cdot 2^2 = 20$ az esetek száma. Ha még két piros pont van, akkor ezek lehetnek a *C* és az *E*, a *C* és az *F*, a *C* és a *G*, a *D* és az *F*, a *D* és a *G*, valamint az *E* és a *G*, ez 6 eset, a többi pontok színét az előző módon számolva $6 \cdot 2^3 = 48$ esetet találunk. Végül további három piros pont csak

úgy lehet, ha ezek a *C*, az *E* és a *G*, a másik négy pont színe miatt ez $2^4 = 16$ újabb eset. Összesen tehát $2 + 20 + 48 + 16 = 86$ olyan eset van, amikor az *A* pont piros. Nyilván ugyanennyi esetet találunk, ha az *A* pont színe a másik két szín valamelyike, így az összes megengedett színezések száma $3 \cdot 86 = 258$.
Nézzük most a rekurzív megoldást! Sokszög helyett tekintsünk egy körvonalat, amelyen *n* pontot kell színezni a megadott módon, jelöljük a színezések számát c_n-nel! Az első néhány érdekes esetben $c_2 = 3 \cdot 2 = 6$ és $c_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Mi a helyzet, ha a pontok száma *n*, ahol $n \geq 4$? Válasszuk ki az egyik pontot (*P*), ennek két szomszédja legyen *Q* és *R*. Ha *Q* és *R* különböző színű, akkor *P* színére csak 1 lehetőség van, a harmadik szín, viszont *P*-t elhagyva egy szabályosan színezett ábrát kapunk $n-1$ ponttal, ez $1 \cdot c_{n-1}$ eset. Ha *Q* és *R* azonos színű, akkor *P* színe kétféle lehet, továbbá ha P és *Q* pontokat elhagyjuk, akkor egy szabályosan színezett ábrát kapunk $n-2$ ponttal, ez $2 \cdot c_{n-2}$ eset. Minden esetet pontosan egyszer számoltunk, így $c_n = 1 \cdot c_{n-1} + 2 \cdot c_{n-2}$ kifejezéshez jutunk. Az előző feladatnál tárgyalt módon kapjuk a c_n sorozat elemeit a másodiktól kezdve: 6, 6, 18, 30, 66, 126, 258. Itt akár meg is sejthető egyfajta általános képlet, hiszen nem nehéz észrevenni, hogy a 2 hatványainál felváltva 2-vel nagyobb vagy kisebb számokat látunk, azaz $c_n = 2^n + 2 \cdot (-1)^n$. Az összefüggés teljes indukcióval igazolható. Ennek a megoldásnak a szépsége, hogy a rekurzív formula akkor is használható, ha a színek száma nem 3, hanem *p*, ekkor $c_n = (p-2) \cdot c_{n-1} + (p-1) \cdot c_{n-2}$, melyből általánosan $c_n = (p-1)^n + (p-1) \cdot (-1)^n$ adódik. Nem részletezzük, de az eredeti feladat általánosításából adódik például a következő összefüggés:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{k} \cdot 2^{k+1} = \frac{4^{n+1}+2}{3}.$$

3. feladat

Egy kerek asztal körül 12-en ülnek. Hányféleképpen foghat hat pár kezet egymással úgy, hogy a kézfogások ne keresztezzék egymást? (Egyszerre mindenki csak egyvalakivel fog kezet.)

Megoldás:

Ha az emberek száma 2*n*, akkor jelölje k_n azt, hogy az *n* számú kézfogást hányféleképpen lehet keresztbenyúlás nélkül megtenni. Feladatunk a k_6 meghatározása. Nyilván $k_0 = k_1 = 1$ és $k_2 = 2$. Az $n = 3$ esetben az egyik ember, nevezzük Jóskának, vagy valamelyik szomszédjával, vagy a szemben ülővel foghat kezet. Ha valamelyik szomszédjával, akkor a másik négy embernek kell a két kézfogást egymás között szabályosan lerendezni, erre az előbb már láttuk, hogy mindkét esetben $k_2 = 2$ lehetőség van. Ha a szemben ülővel fog kezet, akkor kézfogásuk mindkét oldalán a két-két ember $k_1 = 1$ lehetséges módon tud kezet fogni, azaz

$$k_3 = 2 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_1 = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 5.$$

Másképpen:

$$k_3 = k_0 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_1 + k_2 \cdot k_0 = \sum_{i=0}^{2} k_i \cdot k_{2-i}.$$

Meggondolható, hogy általában is $k_n = \sum_{i=0}^{n} k_i \cdot k_{n-i}$ adódik, amivel a sorozat elemei rendre kiszámolhatók: 1, 2, 5, 14, 42, 132. A kapott értékeket Catalan számoknak nevezzük, bizonyítható, hogy általános alakban $k_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$.

4. feladat

A hét törpe elhatározza, hogy Mikuláskor megajándékozzák egymást. Mindegyikük nevét felírják egy cetlire, és mindegyikük húz egy nevet. A sorsolást akkor nevezzük jónak, ha senki nem húzza a saját nevét. Hány jó sorsolás lehetséges?

Megoldás:

Kezdjük ezúttal is egyszerűbb problémával, de egyszerre általánosítsuk is a kérdést: Ha a törpék száma *t*, akkor hányféleképpen húzhatja közülük pontosan *k* a saját nevét, ahol *k* értéke lehet 0, 1, 2, …, *t*? Az eredeti kérdés minden *t* esetén a $k = 0$-hoz tartozó érték. Ha $t = 1$, akkor nyilván a $k = 0$ eset nem lehetséges, a $k = 1$ pedig egyféleképpen. Hasonlóan nyilvánvaló, hogy $t = 2$ esetén a $k = 0$ és a $k = 2$ esetek egyféleképpen lehetségesek, ez azt jelenti, hogy vagy egymás nevét húzzák, vagy a sajátjukat. Ugyanekkor nyilván nem valósulhat meg a $k = 1$ eset. Általánosan is megállapíthatjuk, hogy a $k = t - 1$ eset nem lehetséges, hiszen ha egy kivétellel mindenki a saját nevét húzza, akkor már az az egy törpe sem tud mást tenni, mint hogy a saját nevét húzza. Az első érdekes eset a $t = 3$. Mint mindig, a $k = t$ eset, vagyis ezúttal a $k = 3$ egyféleképpen lehetséges, ha mindenki a sajátját húzza, míg az előbb elmondottak miatt a $k = 2$ eset nem lehetséges. Ha $k = 1$, akkor 3-féleképpen tudjuk kiválasztani, ki húzta a saját nevét, míg a másik két törpe egymásét húzta, ami egyféleképpen lehetséges, amint ezt a $t = 2$, $k = 0$ esetben már láttuk. Mivel az összes esetek száma nyilván t!, azaz jelen esetben 6, így kizárásos alapon a $k = 0$ esetre 2 lehetőség maradt. Lépjünk tovább, legyen $t = 4$! A $k = 4$-re egy, a $k = 3$-ra nulla lehetőség van.

Ha $k = 2$, akkor a saját nevüket húzókat $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen választhatjuk ki, míg a másik két ember egymásét húzza, ami egyféleképpen lehet, így ez 6 lehetőség.

Ha $k = 1$, akkor a saját nevüket húzókat $\binom{4}{1} = 4$-féleképpen választhatjuk ki, míg a másik három ember közül egyik sem húzza a saját nevét, ez nem más, mint a $t = 3$, $k = 0$ eset, amire 2 lehetőség van, ez összesen $4 \cdot 2 = 8$ lehetőség. Az eredeti feladat felé haladó $t = 4$, $k = 0$ esetre így $4! - 1 - 6 - 8 = 9$ lehetőség maradt. A fenti módszert folytatva a jobb oldali táblázatot oszlopról oszlopra, az oszlopon belül pedig alulról felfelé haladva ki tudjuk tölteni. A kitöltés elvét, amit nyilván általános iskolás gyerekeknek ebben a formában nem írunk fel, de a jobb megértés miatt itt közlünk, a következő összefüggések adják:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	1	2	9	44	265	**<u>1854</u>**
1	1	0	3	8	45	264	1855
2		1	0	6	20	135	924
3			1	0	10	40	315
4				1	0	15	70
5					1	0	21
6						1	0
7							1
össz:	1	2	6	24	120	720	5040

$$f(t;k) = \binom{t}{k} \cdot f(t-k;0), \text{ ha } k = 1, 2, \ldots, t-2,$$

továbbá

$$f(t;t) = 1, \ f(t;t-1) = 0, \text{ illetve } \sum_{k=0}^{t} f(t;k) = t!,$$

ahol $f(t;k)$ nyilván azt jelöli, hányféleképpen húzhatja t törpe közül k a saját nevét. A táblázat kitöltését a 7. oszlopig folytatva megkapjuk az eredeti feladatban keresett értéket, mely szerint $f(7;0) = 1854$.

Egy elég tetszetős trükkel és némi kombinatorikai eszközkészlettel direkt rohammal is szép eredményt kaphatunk. Képzeljük el, hogy megpróbáljuk leültetni a 7 törpét néhány asztalhoz úgy, hogy mindenki mellé jobbról ültessük azt, akinek a nevét húzza. Az a kérdés, hányféleképpen lehet őket leültetni úgy, hogy senki nem ül magában. Két ülésrend akkor különböző, ha valakinek más a jobb oldali szomszédja. Ha egyetlen asztalhoz ülnek le, akkor ezt $6! = 720$-féle módon tehetik meg, hiszen ennyi a 7 ciklikus permutációinak a száma. Ha egy 4 és egy 3 fős asztalhoz ülnek, akkor $\binom{7}{3}\cdot 3!\cdot 2! = 35\cdot 6\cdot 2 = 420$ lehetőség adódik, míg ha egy 3 fős és két 2 fős asztaltársaság alakul, akkor $\dfrac{\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{2}2!\cdot 1!\cdot 1!}{2} = \dfrac{35\cdot 6\cdot 2}{2} = 210$ lehetőség van. Egy eset lehet még, ha egy 5 fős és egy 2 fős asztalt használunk, ekkor a lehetőségek száma $\binom{7}{5}\cdot 4!\cdot 1! = 21\cdot 24 = 504$.

Az összes lehetőségek $720+420+210+504=1854$.

A cikkben nem részletezett módon újabb megoldáshoz juthatunk szitaformula alkalmazásával:

$$7!-7\cdot 6!+\binom{7}{2}\cdot 5!-\binom{7}{3}\cdot 4!+\binom{7}{4}\cdot 3!-\binom{7}{5}\cdot 2!+\binom{7}{6}\cdot 1!-\binom{7}{7}\cdot 0! =$$
$$= 21\cdot 120-35\cdot 24+35\cdot 6-21\cdot 2+7-1 = 2520-840+210-42+7-1=1854.$$

5. feladat

Egy 2×8-as táblát hézagmentesen, átfedés nélkül lefedünk 1×2-es dominókkal. Hány különböző lefedés van? Mi a helyzet, ha 1×1-es dominókat is használhatunk?

Megoldás:

Könnyen végiggondolható, hogy vízszintesen csak úgy helyezhető el dominó, ha egymás alatt ugyanazt a két oszlopot fedik. Így tulajdonképpen azt kell eldönteni, hogy hányféleképpen lehet elhelyezni 1 oszlopot lefedő függőleges dominókkal és 2 oszlopot lefedő vízszintes dominópárokkal a 8 oszlopot. Az első feladatban szereplő első, direkt módszernek megfelelően ezúttal is osztályokba sorolhatjuk az eseteket pl. a 2 oszlopos párok száma szerint, majd az így kapott értékeket összegezhetjük. Mindezt végiggondolva a következőt kapjuk:

$$\sum_{k=0}^{4}\binom{8-k}{k} = 1+7+15+10+1 = 34.$$

De ha már megismerkedtünk a rekurzív módszerrel, próbáljuk használni ebben a feladatban is. Jelöljük a 2×n-es tábla lehetséges parkettázásainak a számát p_n-nel!

Nyilván $p_1 = 1$ és $p_2 = 2$. Mit tudunk mondani p_n-ről? Osztályozzuk a lehetséges parkettázásokat aszerint, milyen parketta van a tábla végén (jobb szélén)! Ha egy 1 oszlopos álló dominó, akkor előtte egy szabályosan parkettázott $n-1$ hosszú tábla található, ilyenből p_{n-1}-féle van. Ha viszont egy 2 oszlopot fedő vízszintes dominópár, akkor előtte egy szabályosan parkettázott $n-2$ hosszú tábla található, ezek száma p_{n-2}. Azt kaptuk, hogy $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$. A rekurzív formula adja a sorozat elemeit: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 és $p_8 = 34$. A rekurzív formulából és a kezdőelemekből már látszott, hogy a jól ismert Fibonacci-sorozat elemeit kaptuk, $p_n = f_{n+1}$. A két megoldással egy szép általános összefüggést is bizonyítottunk a Fibonacci-sorozat elemei és a Pascal-háromszög között:

$$f_{n+1} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k}.$$

A feladat második kérdése a 2009-2010-es tanévben az informatika OKTV programozói kategóriájában az első fordulóban szerepelt, ahol a sorozat 2., 3., 4., 5., 7. és 8. elemét kellett kiszámolni, majd a második fordulóban a versenyzőknek programot kellett írniuk, amely a sorozat *n*-edik elemét tudja megadni. A kis módosítás kellően megnöveli a feladat nehézségét. Már az első néhány esetben is szép és általános iskolásoknak nagyon érdekes feladat a lehetséges megoldások összegyűjtése! Nyilván $l_1 = 2$ (használjunk másik nevet a sorozatra, hiszen másik feladatról van szó), de már kevésbé nyilvánvaló megtalálni az $l_2 = 7$-hez tartozó eseteket, méginkább az $l_3 = 22$-höz tartozókat! A következő elemek megtalálása az esetek módszeres összegyűjtésével már szinte reménytelen ($l_4 = 71$ és főleg $l_5 = 228$). Próbáljunk találni egy rekurzív formulát! Milyen dominók állhatnak a sor végén? Ha egy álló 1×2-es, akkor ilyenből l_{n-1} eset van, mint ahogy akkor is, ha két 1×1-es áll ott. Egyszerű még az az eset, amikor két fekvő 1×2-es áll a sor végén, ilyenből l_{n-2} eset van. Mi a helyzet, ha a végén felül egy fekvő 1×2-es dominó van, alatta meg egy 1×1-es? A probléma itt kezd érdekes lenni. Ha ezt a két dominót elvesszük, akkor egy olyan alakzatot kapunk, amelynek az alsó sora 1-gyel hosszabb, mint a felső. Az ilyen alakzatok hossza alatt értsük a hosszabbik soruk hosszát, és a lehetséges lefedések számát jelöljük a_n-nel, az olyanokét, amelyeknek meg a felső sora hosszabb eggyel, b_n-nel! Az utoljára említett esetben tehát a_{n-1}-féle lehetőség van a lefedésre. Végül a fordított esetben, ha a végén alul egy fekvő 1×2-es dominó van, felette meg egy 1×1-es, akkor b_{n-1} a lehetséges lefedések száma.

A következő rekurzív formulát kaptuk:

$$l_n = 2 \cdot l_{n-1} + l_{n-2} + a_{n-1} + b_{n-1}$$

Ezt a formulát viszont csak akkor tudjuk használni, ha az a_n és b_n sorozatokra is meghatározzuk a kezdeti elemeket és találunk rekurzív formulát.
Szimmetriaokokból nyilván minden n-re $a_n = b_n$, az első két elem pedig $a_1 = 1$ és $a_2 = 3$. Nézzük meg itt is az utolsó, csonka oszlopban lévő, azaz az alsó sorban lévő utolsó dominót! Ha ez egy 1×1-es, akkor előtte egy $n-1$ hosszú normál tábla áll, ilyenből l_{n-1}-féle van, míg ha 1×2-es, akkor ezt elvéve egy $n-1$ hosszú, felül hosszabb tábla marad, amit b_{n-1}-féle módon lehet lefedni. Az a_n és így a b_n sorozat rekurzív formuláit is megkaptuk tehát:

$$a_n = l_{n-1} + b_{n-1} \text{ és } b_n = l_{n-1} + a_{n-1}.$$

Bevezetve a $c_n = a_n + b_n$ jelölést a két rekurzív formula így írható:

$$\left.\begin{aligned} l_n &= 2 \cdot l_{n-1} + l_{n-2} + c_{n-1} \\ c_n &= 2 \cdot l_{n-1} + c_{n-1} \end{aligned}\right\}, \text{ ahol } l_1 = 2,\ l_2 = 7 \text{ és } c_1 = 2.$$

Ebből a rekurzív definícióból a két sorozat elemei rendre kiszámíthatók, hiszen a jobb oldali táblázat cellái oszlopról oszlopra haladva kitölthetők.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
l_n	2	7	22	71	228	733	2356	7573
c_n	2	6	20	64	206	662	2128	6840

Az úgynevezett szimultán rekurzív képletből algebrai eszközökkel kiküszöbölhetjük a c_n sorozatot, így a következő harmadrendű rekurzív formula adódik:

$$l_n = 3 \cdot l_{n-1} + l_{n-2} - l_{n-3}.$$

Ebből általános zárt formulát keresése már messze meghaladja még a középiskolai szintet is, hiszen ebben az esetben már komplex számokkal is kell dolgozni. Módszertanilag annyi személyes véleményt talán hozzátennék, hogy egy OKTV első forduló szintjét matematikai tartalma miatt messze meghaladja ez a feladat, kitűzését komoly didaktikai hibának érzem.

6. feladat

Egy 17 oldalú szabályos sokszög csúcsait 2 színnel színezzük. Hány különböző színezés van, ha a forgatással egymásba vihető színezéseket nem tekintjük különbözőnek?

Megoldás:

Nézzünk itt is egy egyszerűbb problémát, kezdjük egy háromszöggel! Két csoportba oszthatók az esetek: egy színt használok vagy kettőt. Ha egyet, akkor nyilván 2 eset van, ez több csúcs esetén is így van. Ha mindkét színt használom, akkor egy csúcs lesz egyik színű és kettő másik színű. Ki kell választani, melyik színt használom csak egy csúcsnál, ez 2 lehetőség. Az mindegy, hogy melyik csúcs lesz ilyen, hiszen ezek az esetek egymásba forgathatók. A háromszög lehetséges színezéseinek száma tehát összesen 4. Megnézhetjük a négyzetet is, jó gyakorló feladat, akár az összes eset megkeresése is, itt 2 egyszínű eset van, 2 olyan, amikor egy csúcs valamilyen a másik három másmilyen, illetve 2 olyan, amikor kettő ilyen és kettő olyan, hiszen itt a két egyszínű csúcs lehet szomszédos és szemközti is. Összesen 6 eset van. Lépjünk tovább az ötszögre! Egyszínűből itt is 2 van. Ha a színek megoszlása $1+4$, akkor 2 eset van, hiszen ezek a színezések egymásba forgathatók. Ha pedig $2+3$, akkor 4 eset található, hiszen kétféleképpen tudom kiválasztani, melyik színűből van kettő, és ezek egymáshoz képest kétféleképpen helyezkedhetnek el: vagy szomszédosak, vagy nem. Összesen 8 a lehetséges színezések száma. Az viszont látszik, hogy egyre több esetet kell vizsgálni a színek megoszlása és az egyszínű pontok elhelyezkedése miatt egyaránt. Érdemes lenne valami olyan észrevételt tenni, ami esetleg több csúcs esetén is használható. Mennyi lenne a színezések száma, ha az egymásba forgatható eseteket különbözőnek tekintenénk, azaz pl. a csúcsokat elneveznénk? Ekkor *n* csúcs esetén a lehetséges színezések száma 2^n lenne, hiszen minden csúcs kétféle színű lehet. Háromszög esetén ez 8 lenne, ehelyett mi 4-et kaptunk. Hol „veszett el” ez a 4 eset? Az egyszínű színezéseknél nyilván nem, hiszen azokat mindenképpen csak egyszer számoltuk, koncentráljunk a kétszínű esetekre. A 8 esetből 6 lenne ilyen, a mi számolásunk szerint csak 2, vagyis a harmada. Miért? Azért, mert mindegyik esetet háromszor számoltuk, hiszen egy általunk számolt színezéshez háromféleképpen lehet megbetűzni a csúcsokat (a körüljárási irányt megtartva persze, hiszen forgatásokról beszélünk, tükrözésről nem). A négyszögnél kicsit más a helyzet: van, amit kétszer számoltunk, van, amit négyszer, ez bonyolultabb. És az ötszögnél? A 32 esetből 30 kétszínű, de mi 6 ilyen esetet kaptunk, ami az összes esetek ötöde. Ez már érdekes megfigyelés: ahány csúcs van, annyiszor számoltuk az egyes eseteket. Miért? Azért, mert ennyiféleképpen lehet egy ábrát elforgatva más és más betűzéshez jutni. Miért működött ez 3-ra és 5-re, és miért nem működött 4-re? Esetleg még néhány esetet megvizsgálva egy nem könnyű végiggondolás után megszületik a válasz: azért, mert a 3 és az 5 prímszámok, a 4 pedig nem. Igen, mivel a 4-nek a 2 osztója, így van olyan színezés, ami két forgatás (180 fok) után

önmagába megy át. Általánosan kimondható azonban, hogy *p* oldalú sokszög esetén, ahol *p* prím, minden kétszínű színezést *p* különböző módon lehet megbetűzni, vagyis az összes esetek összeszámlálásánál, ha az egymásba forgatható eseteket megkülönböztetnénk, minden ilyen esetet *p*-szer számolnánk. Ezek alapján *p* oldalú sokszög esetén a kétszínű színezések száma $\frac{2^p - 2}{p}$, az összes színezések száma pedig ennél 2-vel több.
A feladatban szereplő esetben tehát

$$\frac{2^{17} - 2}{17} + 2 = \frac{2^{17} + 32}{17}.$$

A feladatot megoldottuk, de néhány érdekes megjegyzés tehető ezzel kapcsolatban. Ha a színek száma nem 2, hanem valamely *a* egész szám, ahol $a \geq 2$, akkor a nem egyszínű színezések száma $\frac{a^p - a}{p}$. A kifejezés értéke nyilván mindig egész szám kell legyen, hiszen mindig lehetőségek számát adja meg. Ez azt jelenti, hogy az $a^p - a$ mindig osztható *p*-vel, másként megfogalmazva

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

Egy nevezetes számelméleti állítást bizonyítottunk kombinatorikus módszerrel: nem mást, mint a kis Fermat-tételt.

7. feladat

Adott a síkon 11 egyenes. Legfeljebb hány részre darabolják a síkot? És 11 sík a teret?

Megoldás:

A legtöbb esetet akkor kapjuk, ha általános helyzetű egyeneseket rajzolunk a síkra: semelyik kettő nem párhuzamos és semelyik három nem metszi egymást ugyanabban a pontban. Vizsgáljunk kevesebb egyenest, és jelöljük *n* egyenes esetén a keletkező síkrészek számát s_n-nel! Az első néhány esetet könnyen megkapjuk: $s_1 = 2$, $s_2 = 4$ és $s_3 = 7$. Hogyan következtethetnénk ebből a további esetekre? Érdemes a rekurzív lépésre konkrét számokat használva rávezetni a tanulókat. Nézzük, hogy változik a részek száma, amikor a negyedik egyenest behúzom! Ezt az egyenest az előző 3 egyenes 3 pontban metszi, ez a 3 pont ezt az egyenest 4 részre osztja: 2 félegyenesre és 2 szakaszra. Mind a 4 rész keresztülhalad egy síktartományon az eddigiek közül, és azt két részre osztja, ezzel a síkrészek száma 4-gyel nő, azaz $s_4 = 11$. Mit csinálunk, amikor rekurzív formulát keresünk? Nem mást, mint 3 és 4 helyett végiggondoljuk ugyanezt *n*-re és $n+1$-re. Kapjuk, hogy $s_{n+1} = s_n + n$. A kezdeti értékeket használva megkaphatjuk a sorozat további elemeit egészen a feladatban szereplő tizenegyedikig:

2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, 56, $\underline{\underline{67}}$.

Természetesen mindig érdekes probléma a zárt formula keresése. Egyik lehetőség az, hogy megsejtjük a képletet és a középiskolában tanulandó eszközt, a teljes indukciót használva bebizonyítjuk. Van azonban olyan módszer is, amit általános iskolában is alkalmazhatunk. A kiszámolt kezdeti érték és a rekurzív formula alapján felírhatók a következő egyenletek:

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= 2 \\ s_2 &= s_1 + 2 \\ s_3 &= s_2 + 3 \\ s_4 &= s_3 + 4 \\ &\vdots \\ s_{n-1} &= s_{n-2} + (n-1) \\ s_n &= s_{n-1} + n \end{aligned}\right\}$$

Az egyenleteket összeadva némi rendezés után a következő összefüggéshez jutunk:

$$s_n = 2+2+3+4+\ldots+(n-1)+n = 1+\sum_{i=1}^{n} i = 1+\frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}.$$

Felhasználtuk a megoldás során az első *n* pozitív egész szám összegének közismert, általános iskolában is többféle módon bizonyítható, versenyeken remekül használható képletét. Érdekes megjegyzés, hogy a fenti képlet átírható $s_n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}$ alakúra. A képlet értelmezése: kezdetben volt $\binom{n}{0}=1$ sík, minden egyenes behúzásával keletkezik egy új síkrész, ezek száma $\binom{n}{1}$, továbbá ha két egyenes metszi egymást, minden metszéspont is eggyel növeli a síkrészek számát, és mivel minden egyenes minden másikat metsz, a metszéspontok száma $\binom{n}{2}$.

Mi a helyzet, ha növeljük a dimenziók számát, és térben vizsgálódunk? Az n darab általános helyzetű sík (mit is jelent ez?) a teret t_n részre darabolja. Nyilván $t_1 = 2$ és $t_2 = 4$. Az előző módon keressünk rekurzív formulát! Az n+1-edik síkot metszi mind az n előző sík egy-egy egyenesben, ez az n egyenes az újonnan felvett síkot s_n részre darabolja. Ezen síkrészek mindegyike a korábbi térrészek egyikét két részre osztja, mindenhol egy új térrészt behozva, így összesen s_n-nel növelve a térrészek számát. A következő rekurzív formulához jutunk tehát:

$$t_{n+1} = t_n + s_n .$$

Az előző feladat eredményeit felhasználva kiszámolhatjuk a sorozat első 11 elemét:

2, 4, 8, 15, 24, 42, 64, 93, 130, 176, 232.

A síkbeli esetnél leírt módszer segítségével, az ott bizonyított képletet alkalmazva itt is eljuthatunk a zárt formuláig, ez azonban egyrészt algebrailag is nehezebb, másrészt szükség van a négyzetszámok összegének zárt formulájára is. A bizonyítható képlet a következő:

$$t_n = \frac{n^3 + 5n + 6}{6} .$$

A síkbeli esetnél leírtak után talán nem meglepő, hogy a fenti képlet némi átalakítással a következő alakra hozható:

$$t_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}.$$

8. feladat

Barkochbázunk, de ezúttal a válaszokért fizetni kell. Kezdetben 10 zsetonunk van, és az igen válaszért 1, a nem válaszért 2 zsetont kell fizetni. Ha már csak 1 zsetonunk van, nem kérdezhetünk tovább, hiszen nem válasz esetén adósságba keverednénk. Legfeljebb hány szám közül tudjuk biztosan kitalálni a gondolt számot?

Megoldás:

A feladatot egy Pósa Lajos által tartott tanártovábbképző előadáson hallottam, de úgy gondolom, érdemes továbbadni, hiszen ezen az előadáson elég kevés tanár vett részt. Csalóka feladat, a 10 zseton elég kevés ahhoz, hogy az ember hajlamos direkt rohammal próbálkozni, ami valószínűleg kudarcra van ítélve. Kezdjük kevesebbel, és vizsgáljuk meg, hogy adott számú zsetonnal mi az a legnagyobb *n*, amelyre igaz, hogy 1-től *n*-ig bármelyik egész számra gondolhatnak, mi azt szerencse nélkül ki tudjuk találni. Jelöljük ezt a számot k_n-nel. Ha 1 zsetonunk van, akkor nem kérdezhetünk, tehát csak 1 szám közül tudjuk kitalálni a gondolt számot, azaz $k_1 = 1$. Hasonlóan egyszerűen végiggondolható, hogy $k_2 = 2$. Az első előremutató kérdés, hogy mi a helyzet, ha 3 zsetonunk van. Ha a feltett kérdésre igen lesz a válasz, akkor 2 zsetonunk marad, ami az előbb láttuk, hogy 2 szám közül tudja kiválasztani az igazit. Ha viszont nemleges a válasz, akkor csak 1 szám maradhat, hiszen nem tehetünk fel újabb kérdést. Vagyis $k_3 = 2+1 = 3$. Nagyon szép és tanulságos a probléma, hiszen egy szélsőérték-feladattal van dolgunk, és ezzel kapcsolatban megtaníthatjuk azt, hogy mi az ilyen típusú feladatoknál a teendő. Két dolgot kell megvizsgálni: több nem lehet, annyi viszont igen. Már láttuk, hogy 3-nál több számból nem lehet kitalálni a gondoltat. Másrészt 3-ra van konstrukció: kérdezzük meg, hogy e között a 2 között van-e. Ha nem, akkor megvan, hogy a harmadik számra gondoltak, ha igen, akkor meg még egy kérdéssel tisztázhatjuk, hogy a kettő közül melyikre. Mi a helyzet 4 zseton esetén? Ha igen választ kapunk, akkor 3 zsetonunk marad, ami 3 számra elég, ha pedig nem a válasz, akkor 2 zsetonnal 2 szám közül találjuk meg a gondoltat, azaz $k_4 = 3+2 = 5$. Sokaknak talán már kezd gyanús lenni a dolog! Valóban, újra a Fibonacci-sorozatra bukkantunk. Talán már nem is olyan nehéz megtalálni a rekurzív formulát. Ha *n* zsetonunk van, akkor igaz válasz esetén $n-1$ marad, ami k_{n-1} számra elég, míg ha nem a válasz, akkor $n-2$ zsetonunkkal k_{n-2} szám közül tudjuk megtalálni az igazit. Ez azt jelenti, hogy $k_n = k_{n-1} + k_{n-2}$, ami a $k_1 = 1$ és $k_2 = 2$ kezdőértékekkel éppen a Fibonacci-sorozat elemeit adja, amiből $k_{10} = 89$.