Lehet vagy nem?
Konstrukciók és lehetetlenségi bizonyítások

Dr. Katz Sándor, Bonyhád

A kreativitás fejlesztésének legközvetlenebb módja a konstrukciós feladatok megoldása.
Konstruáljunk meg valamit úgy, hogy előre adottak a tulajdonságok. Valójában az építész, a fejlesztő mérnök, a programozó, de szinte minden alkotó ember ezzel foglakozik.

Igen ám, csak ha sokadik próbálkozásra sem sikerül létrehozni, megalkotni a kívánt konstrukciót, akkor előbb utóbb felmerül a kérdés, hátha az adott elvárásokkal nem is lehet létrehozni.

Úgy tűnik az az egyszerűbb eset, ha lehet, akkor csak meg kell adni egy megfelelőt.

De hogyan bizonyítsunk, ha valamit nem találunk, ha valamilyen konstrukciót nem tudunk összeállítani? Ha nekünk nem sikerül, állíthatunk olyat, hogy ezt más sem tudja megtalálni, összeállítani?

A lehetetlenség bizonyításának legkézenfekvőbb, leggyakoribb módszere az indirekt bizonyítás. Feltesszük, hogy létezik az előállítandó dolog és ebből valami ellentmondásra jutunk. Ehhez gyakran szükséges valami olyan jellemzőt keresni, amely a konstrukciós lépések során nem változik, (ezt invariáns jellemzőnek szokás nevezni) de az elérendő állapotban ennek másnak kellene lenni, mint eredetileg volt.

Az alábbiakban három csoportban bemutatok néhány megoldási ötletet, majd adok néhány egyszerű gyakorló feladatot és néhány olyat is, amely már több ötletet igényel.

I. Számelméleti alapú feladatok

1. feladat

Héttagú társaságban történhettek-e kézfogások úgy, hogy mindenki pontosan

a) háromszor,
b) négyszer fogott kezet?

Megoldás:

a) Megpróbálhatjuk ábrázolni a kézfogásokat. Ha lerajzolunk 7 pontot és megpróbáljuk ezeket szakaszokkal összekötni úgy, hogy minden pontból 3 szakasz induljon ki, akkor ez nem sikerül. Megmutatjuk, hogy ez nem is lehetséges.

Tegyük fel, hogy minden pontból 3 vonal indul ki. Hány vonalat rajzoltunk összesen?
Mind a 7 pontból kiindul három vonal, ez összesen $7 \cdot 3$ vonal, de így minden vonalat kétszer számoltunk (mindkét végpontjánál). Ez nem lehet, mert $3 \cdot 7$ nem osztható 2-vel. Tehát valóban nem lehet, hogy mind a 7 pontból 3 vonal indul ki, mind a 7 ember pontosan háromszor fogott kezet.

(Ez valóban az egyik legegyszerűbb és leggyakoribb eset: annak száma, amit létre akarunk hozni, és azé, amit el tudunk érni, különböző paritású.)

b) Lehet-e, hogy minden pontból 4 vonal induljon? Ekkor az összes vonal száma $\frac{7 \cdot 4}{2} = 14$. Ez egész, tehát az előző gondolatmenet nem zárja ki, hogy lehet. De ez még nem is bizonyítja, hogy lehet. Ehhez meg kell adnunk egy konstrukciót, amelyben a fenti eset elő is állítható. Képzeljük el, hogy a 7 ember körbe áll, és a két szomszédjával nem fog kezet, (és persze önmagával sem,) csak a többiekkel. Ezek száma $7 - 3 = 4$. A szomszédság és a nem szomszédság kölcsönös, tehát lehet, hogy mindenki négy személlyel fog kezet.
(Le is rajzolhatjuk a kézfogásokat.)

2. feladat

Egy szigeten 150 kaméleon él, amelyek közül jelenleg 40 kék, 50 zöld és 60 piros színű. Mint tudjuk, a kaméleonok tudják változtatni a színüket. Ezen a szigeten azonban csak akkor történik színváltás, ha két különböző színű kaméleon találkozik. Ekkor megijednek, és mindkettő a harmadik színre változik át. Más esetben (pl. ha három vagy több kaméleon találkozik,) nem változik a színük Lehetséges-e a találkozások olyan sorozata, hogy azok után minden kaméleon azonos színű legyen?
Egy másik szigeten hasonló szabályok szerint történik a színváltás, de ott kezdetben 45 kék, 50 zöld és 60 piros színű kaméleon volt. Vajon itt lehetséges-e, hogy egy idő után minden kaméleon azonos színű legyen?

Megoldás:

A második szigeten némi próbálkozás után el tudjuk érni, hogy két színből azonos számú legyen: Pl. ha egymás után ötször zöld és piros találkozik, akkor a ezek száma öttel-öttel csökken, a kékeké 10-zel nő, azaz 55 kék, 45 zöld és 55 piros kaméleon lesz.
Ha ezután 55-ször kék és piros találkozik, akkor minden kaméleon zöld lesz.

Az első szigeten viszont akárhogy próbáljuk megszervezni a találkozásokat, nem tudjuk elérni, hogy minden kaméleon azonos színű legyen. Hogyan lehetne belátni, hogy ez nem is érhető el?

Írjunk fel néhány elérhető számhármast:

$$(40,50,60)\Rightarrow(42,49,59)\Rightarrow(44,48,58)\Rightarrow(46,47,57)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(48,46,56)\Rightarrow(50,44,54)\Rightarrow(52,43,53)\ldots?$$

Másként kezdve:

$$(40,50,60)\Rightarrow(39,52,59)\Rightarrow(38,54,58)\Rightarrow(37,56,57)\ \ldots?$$

Váltogathatom is a növekedő számot:

$$(40,50,60)\Rightarrow(39,52,59)\Rightarrow(41,51,58)\Rightarrow(40,53,57)\Rightarrow(39,55,56)\ \ldots?$$

Nagyon sokféle út van. Reménytelen dolog mindnél megmagyarázni, hogy miért nem vezet célhoz. (A cél a (0,0,150) a (0,150,0) vagy a (150,0,0) számhármasok valamelyikének elérése.)

Keressünk a fenti elérhető számhármasoknak olyan közös tulajdonságát, amellyel mindegyik rendelkezik, és amely a színváltásoknál mindig megmarad, és ha a megcélzott számhármasok egyike sem rendelkezik a talált tulajdonsággal, akkor azok nem érhetők el.

Egy ilyen megmaradó tulajdonsága az elérhető számhármasoknak az, hogy a három közül bármelyik két szám különbségét veszem, az nem osztható hárommal. (Másként: a három szám hármas maradéka különböző.)

Valóban 50-40, 60-50, 60-40 egyike sem osztható hárommal,
49-42, 59-49, 59-42 egyike sem osztható hárommal, stb.,
és ez így van minden fenti elérhető számhármasnál, de a további elérhetőknél is, mert ez a tulajdonság megmarad a lehetséges színváltozásoknál.

Milyen lehetőségek vannak a háromból valamelyik két szám változására?
Vagy mindkét szám eggyel csökken - ekkor különbségük nem változik. Vagy egyik szám kettővel nő, a másik eggyel csökken - ekkor különbségük 3-mal nő vagy csökken.
Ha a különbség nem volt osztható 3-mal, továbbra sem lesz, tehát ez a tulajdonság valóban megmarad. Így sosem juthatunk el a (0,0,150), a (0,150, 0) vagy a (150,0,0) számhármasokhoz, mert ezekben bármely két szám különbsége osztható 3-mal, tehát sosem lesz csak egyszínű kaméleon.

3. feladat

Össze lehet-e állítani 1x1-es és 2x2-es négyzetekből egy nagyobb négyzetet úgy, hogy a felhasznált kétféle négyzet együttes száma

a) pontosan 2000;
b) pontosan 2011?

Megoldás:

a) Ha *n* db 2x2-es és (2000-*n*) db 1x1-es négyzetet használok fel, akkor

$$4n + 2000 - n = k^2$$

kell hogy teljesüljön. $3(n+666)+2 = k^2$ nem lehet, mert egy négyzetszám hármas maradéka nem lehet 2.

b) Ha *n* db 2x2-es és (2011-*n*) db 1x1-es négyzetet használok fel, akkor

$$4n + 2011 - n = k^2$$

kell hogy teljesüljön. Ez teljesülhet pl. $n = 8$, $k = 45$. esetén 8 db 2x2-es és 2003 db 1x1-es négyzetből nyilvánvalóan ki lehet rakni egy 45x45-ösz négyzetet, pl. úgy hogy a bal felső 2x16-os téglalapot 2x2-esekkel, a többit 1x1-esekkel rakjuk ki.

(*Lehetetlenség bizonyítások alapja lehet az a tény, hogy a négyzetszámok maradékai között nem minden érték fordul elő. Pl. egy négyzetszám hármas maradéka nem lehet 2, négyes maradéka nem lehet 2 vagy 3, ötös maradéka nem lehet 2 vagy 3, nyolcas maradéka nem lehet 2, 3,5,6 vagy 7, tízes maradéka nem lehet 2, 3, 7 vagy 8, stb.)*

4. feladat

Van-e olyan háromszöglapokkal határolt test, amelynek

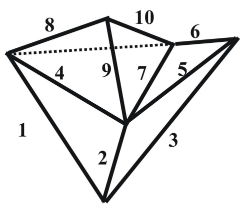
a) 10;
b) 300 éle van?

Megoldás:

a) 10 nem lehet, mert ha k lapja van, akkor az élek száma $\frac{3k}{2}$, de ez nem lehet 10.
b) Ilyen lehet. Pl. két 100 oldalú szabályos gúlát alapjával helyezzünk egymásra!

Az *a)* rész bizonyítását teljesen korrektnek érezzük, de azért vigyázzunk!
Íme egy ellenpélda.

Hol a hiba?



5. feladat

Egy táblára felírtuk az egész számokat – 6-tól 6-ig. (13 számot.) Egy lépésben a táblán levőkből kiválasztott két szám, *a* és *b* helyett felírhatjuk az

$$A = \frac{5a - 12b}{13} \quad \text{és} \quad B = \frac{12a + 5b}{13}$$

számokat. Elérhetjük-e ilyen lépésekkel, hogy 13 egyforma szám álljon a táblán?

Megoldás:

Nem érhetjük el.

Vegyük észre, hogy $A^2 + B^2 = a^2 + b^2$, így a számok négyzetösszege nem változik. Eredetileg ez $2(1^2+2^2+\ldots+6^2)$ =182 volt, ha ez megmarad, akkor a végén minden szám $\sqrt{182/13} = \sqrt{14}$ lenne, de az átalakítások nem vezetnek ki a racionális számok halmazából.

Gyakorló feladatok

1. feladat

a) Meg lehet-e adni 4 egész számot úgy, hogy összegük és szorzatuk is páratlan legyen?
b) Lehet-e 9 páratlan és 9 páros szám összege 99?
c) 8 páratlan és 8 páros szám összege 88?
d) 8 páratlan és 9 páros szám összege 89?
e) 9 egész szám összege is, szorzata is 9?
f) 10 egész szám összege is, szorzata is 10?
g) 10 egész szám összege 0, szorzata 10 ?
h) 8 egész szám összege 0, szorzata 8 ?

2. feladat

a) Lehet-e két prímszám összege 2009?
b) Lehet-e 3 egymást követő egész szám összege prímszám?
c) Lehet-e 15 egymást követő egész szám összege prímszám ?

3. feladat

a) A +1+3+5+7+9+11 összegben megváltoztatható-e a + jelek egy része úgy, hogy a végeredmény 13 legyen ?
b) A +1+2+3+...+100 összegben megválaszthatók-e a + és a - jelek úgy, hogy a végeredmény 2010 vagy 2011 legyen ?
c) Egy tanár felírta a táblára a következőt: 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 =
Majd azt kérte, hogy a csillagok helyére írjanak + vagy – jelet és számítsák ki az eredményt! András azt mondta, hogy 21-et kapott, Béla pedig 20-at. Jól számoltak-e?
d) Milyen *n*-re lehet a $\ast$-ok helyére + vagy – jelet írni úgy, hogy igaz legyen az egyenlőség? $\ast 1 \ast 2 \ast 3 \ast \dots \ast n = n+1$
e) Egy mesekönyv 30 mesét tartalmaz, az egyes mesék hossza 1, 2, 3, … 28, 29, 30 oldal. A meséket az 1-gyel számozott oldalon kezdték el nyomtatni és minden mesét új oldalon kezdenek. Legfeljebb hány mese kezdődhet páratlan oldalon?

4. feladat

Egy kilenc tagú társaságban történhettek-e kézfogások úgy, hogy mindenki pontosan
a) négyszer, b) ötször fogott kezet?

5. feladat

Egy táblára felírtunk 1990 db 0-t, 1994 db 4-est és 1995 db 5-öst. Bármely két különbözőt letörölhetjük, és helyette a harmadikból egyet írunk fel. Mutassuk meg, hogy ezen eljárás ismétlésével elérhetjük, hogy csak egyféle szám maradjon a táblán! Melyik lehet ez a szám?

6. feladat

a) A táblára felírtak 15 plusz és 15 mínusz jelet. Ezután minden lépésben letörölnek két tetszőleges jelet és helyette egyet írnak a következő szabály szerint: ha két azonos jelet töröltek le, akkor helyette pluszt írnak, ha két különbözőt, akkor mínuszt. Ezt mindaddig folytatják, amíg egy jel marad a táblán. Hány lépést végeznek, és milyen jel marad végül a táblán?

b) Egy csodakertben termett 25 banán és 30 barack. Minden reggel leszedünk két gyümölcsöt, de másnapra terem helyettük egy úgy, hogy ha két azonosat szedünk le, akkor egy barack, ha két különbözőt szedünk le, akkor másnapra egy banán terem helyettük. Milyen gyümölcs marad az utolsó napra?

7. feladat

a) Egy szigeten 11 kék, 12 zöld, 13 barna kaméleon él. Ha két különböző színű találkozik, akkor mindkettő a harmadik színre vált. Lehetséges-e, hogy egy idő után csak egyféle színű lesz?
b) Egy szigeten 3 kék 5 zöld és 7 piros kaméleon él. Ha két különböző színű találkozik, akkor mindkettő színe a harmadik színre változik. Lehet-e egy idő után minden kaméleon azonos színű?

8. feladat

Lehet-e egy 1993 lakosú faluban mindenkinek pontosan 1001 ismerőse? (Az ismeretség kölcsönös.)

9. feladat

Egy tíztagú társaságban mindenkitől megkérdezték, hogy hány ismerőse van a jelenlevők között. A válaszok: 6, 3, 4, 5, 7, 2, 3, 5, 6, 8. Mutassuk meg, hogy valaki tévedett!

10. feladat

Van-e olyan háromszöglapokkal határolt konvex test, amelynek a) l99l, b) l992 éle van?

11. feladat

Lehet-e $1x1x1$-es kis kockákból - lapjaiknál összeragasztva azokat -, olyan testet alkotni, amelynek felülete a) 1001, b) 1000 négyzetegység? (Az összeragasztott kockák egy-egy teljes lapjukkal vannak összeragasztva.)

12. feladat

Lehet-e egy végtelen négyzetrácson 15 mezőt kiszínezni úgy, hogy minden színezett mezőnek

a) páratlan számú;
b) páros számú szomszédja színezett?

13. feladat

Az $\frac{1}{2002}, \frac{2}{2001}, \frac{3}{2000}, \ldots, \frac{2000}{3}, \frac{2001}{2}, \frac{2002}{1}$ számok közül kiválasztható-e három úgy, hogy a kiválasztott három szám szorzata 1 legyen?

14. feladat

Adottak a koordináta-rendszerben a (0;0), (0;1), (1;0) és (1;1) pontok. Egy lépésben valamely pont helyett felírhatjuk egy másikra vonatkozó tükörképét. Eljuthatunk-e ilyen lépésekkel a (0;0), (1;1), (3;0) és (2;-1) pontnégyeshez?

15. feladat

Kitölthető-e egy *n x n*-es táblázat –1, 0, 1 számokkal úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és a két átlóban különböző legyen a számok összege?

16. feladat

2002 kavics három halomba van elosztva, ezek 26, 814, és 1162 kavicsból állnak.
Két lépés megengedet:
I. két halmot egyesíthetünk.
II. Ha egy halomban a kavicsok száma néggyel osztható, akkor, akkor két egyenlő részre oszthatjuk. Elérhető-e hogy 1001 halmunk legyen, mindegyikben 2-2 kaviccsal?

17. feladat

Leírhatók-e az 1, 2, 3, ... 100, 101 számok olyan sorrendben, hogy bármely két szomszédos összege prím legyen?

18. feladat

Létezik-e olyan tízes számrendszerben felírt pozitív egész szám, amely

a) 57-szer,
b) 58-szor kisebb lesz, ha első jegyét letöröljük?
c) Másik jegy letörlésével kaphatunk-e 57-szer vagy 58-ször kisebb jegyet?

19. feladat

Létezik-e száz olyan különböző pozitív egész szám, hogy közülük bármely 5 szorzata osztható ezen öt szám összegével?

20. feladat

Léteznek-e olyan számok (nem okvetlenül különbözőek), amelyek összege nagyobb 10-nél, négyzetük összege pedig kisebb 1/10-nél?

21. feladat

Létezhet-e olyan társaság, amelyben mindenkinek 6 barátja van és bármely két embernek pontosan két közös barátja van.

22. feladat

Egy táblára felírtuk az egész számokat –10-től 10-ig (21 számot). Egy lépésben két kiválasztott szám A és B helyett felírhatjuk a $\frac{3A-4B}{5}$, $\frac{4A+3B}{5}$ számokat. Elérhetjük-e ilyen lépésekkel, hogy 21 egyforma szám álljon a táblán?

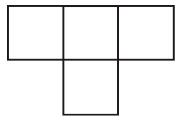
23. feladat

Tegnapelőtt még csak 10 éves voltam. Jövőre már 13 éves leszek. Lehet ez?

II. A színezés segít

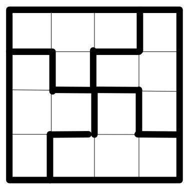
1. feladat

Az ábrán látható idomokkal lefedhető-e egyrétűen egy



a) 4 x 4-es,
b) 5 x 5-ös,
c) 6 x 6-os,
d) 2010 x 2010-es,
e) 20l2 x 20l2-es négyzetrács?

Megoldás:



a) Mint az ábra mutatja 4 x 4-es tábla lefedhető.

b) 5 x 5-ös nem fedhető le, mert *k* idom 4*k* mezőt fed le, $5 \cdot 5 = 25$ viszont nem osztható 4-gyel.

c) 6 x 6-os mező lefedéséhez 9 db idom szükséges, de bárhogy próbálkozunk, nem sikerül a lefedés. Az, hogy a különböző kiindulásokból hogyan jutunk el olyan helyzetig, ahonnan már nincs megfelelő folytatás, minden lehetséges esetet áttekintve szinte reménytelen leírni.

Keressünk ezért más bizonyítási módot! Az ilyen lefedési feladatoknál sokszor hasznos, ha színezzük az alakzatot. Itt a sakktábla-szerű színezés célra vezet. Így 18 világos és 18 sötét mezőt kapunk a 6 x 6-os rácson. Az idomunkat akárhogy tesszük a színezett táblára, annak kétféle elhelyezkedése lesz.

A) Három világos és egy sötét mezőt fed le, vagy
B) három sötét és egy világos mezőt fed le.

Tegyük fel, hogy a 6 x 6-os mezőt sikerül lefedni 9 idommal. Ha a 9 idom közül *k* db-ot az A) elhelyezkedésben, 9-*k* db-ot a B) elhelyezkedésben raktunk le, akkor a lefedett világos mezők száma: $3k+(9-k)=2k+9$. De ez nem lehet 18, mert ez minden *k*-ra páratlan. Tehát a 6 x 6-os rács nem fedhető le a fenti idomokkal.

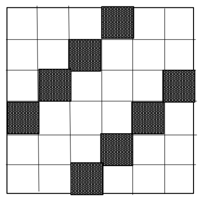
d) A c) feladattal teljesen azonos módon látható be, hogy az 2010 x 2010-es rács sem fedhető le. Ugyanez az eljárás célra vezet minden (4*k*+2) x (4*k*+2) alakú táblánál, mert itt a mezők száma $16k^2+16k+4$, a világosaké $8k^2+8k+2$ páros az idomoké viszont $4k^2+4k+1$ páratlan.

e) Az 2012 x 2012-es rács 4 x 4-esekre bontható, ezért lefedhető.

2. feladat

Egy 6 x 6-os négyzet lefedhető-e 1 x 4-es téglalapokkal?

Megoldás:



6·6 = 36. Így elvileg 9 db 1 *x* 4-e téglalap elférne, de ez mégsem sikerül. Az ábra szerinti színezés segít a megoldásban. Bárhogy helyezünk el a négyzetben egy 1 *x* 4-es téglalapot, az a színezett mezők közül pontosan 1-et fed le. Tehát 8-nál több téglalap nem helyezhető el.

8 téglalap elhelyezésére mutassunk is egy példát!

Gyakorló feladatok

1. feladat

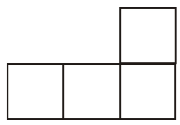
Egy 5 x 5-ös táblán 25 katicabogár ül, minden mezőn egy. Egy sípszóra mindegyik katicabogár átmegy az egyik szomszédos mezőre. (Két mező szomszédos, ha van közös oldaluk.) Lehetséges-e, hogy újra minden mezőn egy katicabogár lesz?

2. feladat

Egy 9 x 9-es táblán 81 katicabogár ül, minden mezőn egy. Egy sípszóra mindegyik katicabogár átmegy az egyik átlósan szomszédos mezőre. Így egyes mezőkön több bogár is lesz, mások üresen maradnak. Mennyi az üres mezők számának lehető legkisebb értéke?

3. feladat

Milyen *n* esetén lehet a 3 *x n* –es téglalapot lefedni ilyen alakú tetraminóval?

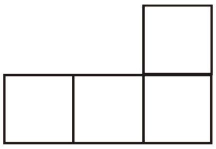


4. feladat

Egy 10 x 10-es négyzetrácsra elhelyezhetünk-e fedés nélkül 15 db 1 x 6-os téglalapot?

5. feladat

Az ábrán látható idomokkal lefedhető-e egy



a) 6 x 6-os, b) 2010 *x* 2010-es,
c) 2011 x 2011-es, d) 2012 x 2012-es sakktábla?
e) Milyen téglalapok fedhetők le ilyen alakú idomokkal ?

6. feladat

Egy sakktábláról levágták a bal alsó és a jobb felső sarokban található négyzetet. A megmaradó részt lefedhetjük-e 31 db 2x1-es téglalappal?

7. feladat

Egy sakktábláról levágták a jobb felső sarokban található négyzetet. A megmaradó részt lefedhetjük-e 21 db 3x1-es téglalappal?

8. feladat

8 x 8 -as sakktábla bal alsó mezőjéből el lehet-e jutni egy huszárral a jobb felső sarokba úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer lépünk?

9. feladat

8 x 8 -as sakktáblán egy lépésben valamely sor vagy oszlop mezőinek színét ellentétesre változtatjuk. Elérhető-e valahány lépésben, hogy egy kivételével minden mező fehér legyen?

10. feladat

a) 18 *x* 18-as,
b) 19 *x* 19-es négyzetbe hány 4 *x* 4-es négyzetet tudunk elhelyezni.

11. feladat

3 egység élű kocka 27 egybevágó kis kockából van összerakva. A középső kis kockában van egy bogár, amely át tud menni bármelyik szomszédos kis kockába.

Bejárhatja-e a bogár az összes kockát úgy, hogy mindegyik kockában csak egyszer lesz?

III. Egyéb konstrukciók

1. feladat

Egy konvex négyszög egy másik konvex négyszög belsejében van. Lehetséges-e, hogy a belső négyszögben az átlók hosszának összege nagyobb, mint a külsőben?

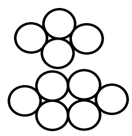
Megoldás:

Igen, lehetséges. Legyenek a belső csúcsai (-100;1), (-100;-1), (100;-1), (100;1).
A külsőé (-110;0), (0;12), (110;0), (0;-12).

2. feladat

Elhelyezhető-e a) 2000, b) 2001 c) 2002 egyforma pénzérme egy asztalra úgy, hogy mindegyik pontosan hármat érintsen?
d) Elhelyezhető-e véges sok egyforma pénzérme egy asztalra úgy, hogy mindegyik pontosan négyet érintsen?

Megoldás:



a), c) igen. Az ábrán látható alakzatokból elegendően hosszú zárt láncokat lehet összerakni

b) Nem lehet. Ha van n kör, akkor az érintési pontok száma $\frac{3n}{2}$.
Ez csak páros n-nél lehet.

d) Nem lehet. Vegyünk egy olyan támaszegyenest, amely csak egy kört érint. ezt a kört nem érintheti 4 másik.

3. feladat

Adott a síkon véges sok pont úgy, hogy nincs három egy egyenesen. Ezek közül néhány pár össze van kötve egy-egy szakasszal. Ha az AC és BD szakaszok metszik egymást, akkor ezeket letörölhetjük, és behúzzuk helyettük az AB és CD szakaszokat. Ilyen cserék sorozatával elérhetjük-e, hogy újra az eredeti állapot jöjjön létre?

Megoldás:

Nem, mert a szakaszok összhossza minden lépésnél csökken.

Megjegyzés:

Ha az *AC* és *BD* metsző szakaszok helyett az *AB* és *AD* szakaszokat húzzuk be, akkor lehetséges, hogy visszaálljon az eredeti állapot.

4. feladat

Egy l0 x l0 -es tábla 9l mezőjén egy-egy fehér bábu áll. Egy festő felvesz egy fehér bábut, befesti feketére és visszateszi egy üres mezőre. Ezt folytatja addig, amíg minden bábu fekete lesz. Lehetséges-e ezt úgy végezni, hogy közben sose álljon egymás mellett (közös oldallal rendelkező két mezőn) különböző színű bábu?

Megoldás:

Van olyan sor vagy oszlop, ahol 10 bábu áll, ha nem lenne, akkor legfeljebb (10*9=90) bábu állna a táblán. Vagyis ennek a sornak/oszlopnak minden bábuja mellett bábu áll! Tehát minden bábnak van szomszédja. Ha ebből a sorból/oszlopból valamelyik bábot feketére festjük, két különböző színű bábu kerül egymás mellé. Nem lehet úgy végezni a festést, hogy ne legyenek különböző színűek egymás mellett.

Gyakorló feladatok

1. feladat

Fel lehet-e bontani egy tompaszögű háromszöget hegyesszögű háromszögekre?

2. feladat

Van-e olyan háromszög, amelynek területe kisebb 1-nél, de
a) minden magassága nagyobb 100-nál,
b) minden oldala nagyobb 100-nál?

3. feladat

Van-e olyan háromszög, amelynek területe nagyobb 100-nál, de
a) minden magassága kisebb 1-nél,

b) minden oldala kisebb 1-nél?

4. feladat

Egy osztály minden tanulója vagy úszik, vagy kosarazik, esetleg mindkettőt csinálja. Lehetséges-e, hogy az osztályban több a lány mint a fiú, ha tudjuk, hogy

a) az úszóknak és a kosarasoknak is 60 %-a fiú,
b) az úszók 60 %-a, a kosarasok 75 %-a fiú?

5. feladat

Le lehet-e fedni egy kockát egyrétűen 12 db egybevágó négyzet alakú papírlappal?

6. feladat

Lefedhető-e a sík véges sok parabolalemezzel?

7. feladat

a) Van néhány kancsóm. Van köztük két különböző színű, és van köztük két különböző formájú is. Ki lehet-e választani biztosan kettőt, amelyek színben és formában is különböznek?

b) Egy áruházban kapott háromféle fazonú és háromféle színű nyári ruhát. Ki tudnak-e tenni a kirakatba három ruhát úgy, hogy mindegyik színből és mindegyik fazonból legyen kitéve?

8. feladat

Ki lehet-e színezni egy konvex hatszög oldalait és átlóit két színnel úgy, hogy

a) ne legyen benne egyszínű háromszög,
b) csak egy egyszínű háromszög legyen?
c) Egy 17 oldalú konvex sokszög oldalait és átlóit kiszíneztük 3 színnel. Lesz-e biztosan az ábrán egyszínű háromszög?

9. feladat

Egy 9 oldalú gúla oldaléleit és az alaplap átlóit kiszíneztük két színnel. Megtehetjük-e ezt úgy, hogy miden színezett háromszög oldalai között legyen mindkét színű szakasz?

10. feladat

Egy labdarúgó bajnokságban 18 csapat vesz részt, és túl vannak 8 fordulón. Kiválasztható-e 3 olyan csapat, amelyek közül semelyik kettő nem játszott egymással!

11. feladat

Egy nagy terem padlója "teljesen szabálytalanul" két színnel van kifestve. Van-e biztosan a padlón két olyan, egymástól pontosan 1 m-re levő pont, amely
a) egyszínű;
b) különböző színű?

12. feladat

Adott a síkon 100 piros és 100 kék pont úgy, hogy nincs három pont egy egyenesen. Össze lehet-e ezeket kötni száz szakasszal úgy, hogy minden szakasz egy kék és egy piros pontot kössön össze, és az összekötő szakaszok ne metsszék egymást?

13. feladat

Egy 10 x 10 telekből álló négyzet alakú területen 9 telket benőtt a gyom. Egy év alatt átterjed a gyom azokra a mezőkre, amelyeknek legalább két oldalszomszédja gyomos. Lehetséges-e a 9 gyomos mezőnek olyan elrendezése, amelynél néhány év alatt minden mezőre átterjed a gyom?

Irodalom:

- CSIRIK A. JÁNOS: EGY ÖTLET: Keressünk invariánst
  (POLYGON 1994. I.)
- RÓKA SÁNDOR: Miért nem lehet? Feladatok szakkörre I.
  (Matematika Tanítása1987. 4. sz.)
- RÓKA SÁNDOR: Miért nem lehet? Feladatok szakkörre II.
  (Matematika Tanítása1988. 3. sz.)
- RÓKA SÁNDOR: Miért nem lehet? Feladatok szakkörre III.
  (Matematika Tanítása1988. 6. sz.)
- TOTIK VILMOS: Lehetetlen
  (A Természet Világa1998. Matematikai különszám**)**
- JAKAB TAMÁS, KATZ SÁNOR: Tehetségfejlesztő feladatsorok
  (Feladatgyűjtemény az Arany J. Program. iskolái számára Kézirat)