Nevezetes középértékek megjelenése különböző feladatokban

Varga József, Kecskemét

Harminc éves tanári pályámon sokszor tapasztaltam, hogy a tehetséges tanulók közül azok dolgoznak eredményesebben, akik a feladatot, problémát, ha szükséges át tudják fogalmazni. A feladatmegoldás során megjelenő kifejezések átalakításához, összehasonlításához szükséges matematikai eszközökkel rendelkeznek. Sok feladat megoldásához van szükségünk a középértékekre és a köztük lévő összefüggésekre. Az alábbi feladatokban ezekre találunk példákat. A középiskolában használatos négy középérték fogalma: az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok

1.) számtani közepén az $A\left(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$;

2.) mértani közepén a $G\left(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\right)=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$;

3.) harmonikus közepén a $H(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$;

4.) négyzetes közepén a $N\left(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\right)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n}}$ kifejezést értjük.

A középértékek között a $H \le G \le A \le N$ egyenlőtlenséglánc áll fenn. Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

A tanulás folyamatát segíti, ha az absztrakt fogalomhoz társítani tudunk szemléletes, vizuálisan megjeleníthető jelentést is.

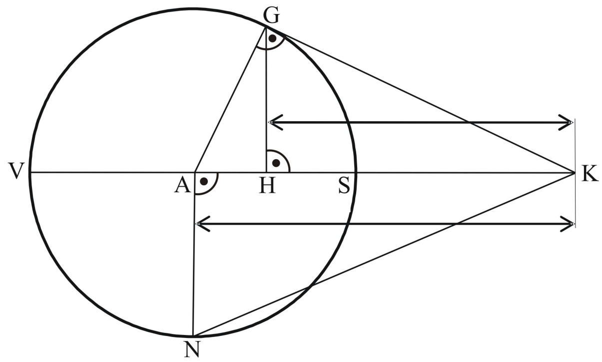
Feladatok:

A. Két változó esetén egy trapézban keressük meg a középértékeknek megfelelő, alapokkal párhuzamos szakaszokat!

B. Tekintsük a következő ábrát!

Legyen $a > b > 0$ és $KV = a$, $KS = b$.

Fejezzük ki az alábbi szakaszokat a és b segítségével:
$AK =$
$GK =$
$HK =$
$NK =$



Harmonikus középérték

1. feladat

Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű trapéz érintőnégyszög is, akkor az alapokra merőleges szár harmonikus közepe az alapoknak!

2. feladat

Bizonyítsuk be, hogy a szabályos hétszög oldala egyenlő a hétszög két különböző átlója hossza harmonikus közepének a felével!

3. feladat

Adott két egymást kívülről érintő kör. Határozzuk meg azon kör sugarát, mely érinti a két kört és azok közös érintőjét.

4. feladat

Bizonyítsuk be!

a) Bármely háromszögben a beírt kör sugara a magasságok harmonikus közepének a harmada.
b) Bármely tetraéderben a beírt gömb sugara a magasságok harmonikus közepének a negyede.

5. feladat

Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszög szögeire teljesül, hogy

$$\frac{3}{\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\,!$$

Mértani középérték

6. feladat

Bizonyítsuk be, hogy ha egy szimmetrikus trapéz magassága mértani közepe az alapoknak akkor a trapéz érintőnégyszög!

7. feladat

Egy körbe beírunk és köré írunk egy-egy nyolcszöget. Bizonyítsuk be, hogy a kör sugara mértani közepe a köré írt nyolcszög köré írt köre sugarának és a beírt nyolcszög beírt köre sugarának!

8. feladat

Egy háromszög belsejében felvett tetszőleges ponton át a háromszög oldalaival párhuzamos egyeneseket húzunk. Ezek az egyenesek a háromszög területét hat részre osztják. Mekkora az adott háromszög területe, ha adva van a három háromszög területe: t_1, t_2, t_3.

9. feladat

Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög akkor és csak akkor szabályos, ha szögeire fennáll a

$$\sqrt[3]{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}=\frac{1}{2}$$

egyenlőség!

10. feladat

Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben

$$\sqrt[3]{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}} \leq \frac{1}{2}\,!$$

11. feladat

Tekintsünk egy egységnyi oldalú szabályos háromszöget. Az oldalait osszuk 3 egyenlő részre, majd a „középső” szakaszok fölé rajzoljunk egyenlő oldalú háromszögeket. Hagyjuk el a középső szakaszokat. Így olyan sokszöget kaptunk, amelynek minden oldala $\frac{1}{3}$. Ezt az eljárást *n*-szer elvégezve határozzuk meg a kapott sokszög oldalainak hosszát, számát, kerületét és területét!

12. feladat

Tekintsünk egy *a* élű szabályos tetraédert. Minden lapon kössük össze a lapokat határoló élek felezési pontjait. Így minden lapot négy – egybevágó – egyenlő oldalú háromszögre bontottunk. A középső háromszögek fölé – minden egyes lapon – állítsunk szabályos tetraédereket. Az így kapott test oldallapjai $\frac{a}{2}$ hosszúságú szabályos háromszöglapok. Az előbb leírt eljárást ismételjük meg többször egymás után. Az *n*-edik „ráépítés” után mekkora lesz a kapott test felszíne és térfogata?

13. feladat

Adott egy egyenes és ugyanazon oldalán két pont. Szerkesszünk olyan kört, amely illeszkedik a két pontra és érinti az adott egyenest!

14. feladat

Egy körhöz egy külső pontból húzott érintők érintési pontjai *A* és *B*. A kör egy tetszőleges *Q* pontjából az érintőkre, valamint *AB*-re bocsátott merőlegesek talppontjai rendre *E, F, T*. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$QT^2 = QE \cdot QF \text{ !}$$

15. feladat

Az *ABCD* húrnégyszög (*AB* nem párhuzamos *CD*) átlóinak metszéspontja *M* Az *M* ponton át a *DC* oldallal párhuzamosan húzott egyenes az *AB* oldal egyenesét *P*-ben metszi. Igazoljuk, hogy

$$PM^2 = PA \cdot PB \text{ !}$$

16. feladat

Pont körre vonatkozó hatványa

Számtani középérték

17. feladat

Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben ${}_a+\rho_b+\rho_c \ge \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot k$, ahol ρ_a, ρ_b, ρ_c a háromszög *a*, *b* illetve *c* oldalához írt körök sugarai, *k* a háromszög kerülete!

18. feladat

Igazoljuk, hogy ha *k* egy háromszög kerülete *R* a háromszög köré írható kör sugara, akkor $k \le R\cdot 3\sqrt{3}$!

19. feladat

Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben $k \ge 6\cdot\sqrt{3}\cdot\rho$, ahol ρ a háromszög beírt körének sugara, *k* a háromszög kerülete!

20. feladat

Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben

$$\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3} \le \frac{1}{2}!$$

Négyzetes középérték

21. feladat

Az *R* sugarú körben *AC* és *BD* húrok merőlegesek egymásra. A húrokat metszéspontjuk négy szeletre bontja. Bizonyítsuk be, hogy

a) a négy szelet négyzetes közepe egyenlő *R*-rel!
b) az *ABCD* négyszög két-két szemközti oldalának négyzetösszege egyenlő!

22. feladat

Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben

$$\sqrt{\frac{tg^2\frac{\alpha}{2}+tg^2\frac{\beta}{2}+tg^2\frac{\gamma}{2}}{3}} \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ !}$$

23. feladat

Egy csonka kúp alap-, illetve fedőkörének sugara *R*, illetve *r*. Az alaplap síkjával párhuzamos síkkal két olyan csonka kúpra osztjuk, melyek

a) palástjainak területe egyenlő
b) térfogataik egyenlők.

Mekkorák a síkmetszetek sugarai?

Középértékek közötti kapcsolatok alkalmazása

24. feladat

Az $x^2 + y^2 = r^2$ sugarú kör első síknegyedbeli érintői közül melyik metszi le a koordinátatengelyekből a legkisebb területű háromszöget?

25. feladat

Egy piaci kofa tudja, hogy kétkarúmérlege nem mér pontosan, (a karok nem egyforma hosszúak). A pontatlanságot úgy próbálja korrigálni, hogy a kért áru, egyik felét az egyik serpenyőben, a másik felét a másik serpenyőben méri ki. Igazságos-e az így korrigált mérés?

26. feladat

Bizonyítsuk be, hogy minden olyan pozitív *a* és *b* számra, melyre $a+b=1$ igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2} \text{ !}$$

27. feladat

Bizonyítsuk be, hogy a háromszög *a*, *b*, *c* és *t* területe között fenn áll a következő összefüggés:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot t \text{ !}$$

28. feladat

Adott gömb köré írt egyenes körkúpok közül melyiknek a legkisebb a térfogat? Mekkora ekkor a gömb és a kúp felszínének az aránya?

29. feladat

Bizonyítsuk be, hogy a háromszög magasságaira fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq s^2$$

s a háromszög félkerületét jelöli!

30. feladat

Adott az $f : R^+ \to R$, $f(x) = 2x^6 + \frac{6}{x^2}$ függvény. Határozzuk meg a függvény minimum helyét és minimumértékét!

Irodalom:

- Ábrahám Gábor: Egyenlőtlenségek
- Bonifert Domonkos: Néhány tipikus problémaszituáció matematikából, MOZAIK Oktatási Stúdió, Szeged 1992.
- D.O. Skaljarszkij-N.N. Csencov-I.M. Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből I. (Aritmetika és algebra), Tankönyvkiadó, Budapest 1979.
- Molnár Emil: Matematika versenyfeladatok gyűjteménye, Tankönyvkiadó, Budapest 1974.
- Dr. Gerőcs László: Azok a csodálatos húrnégyszögek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1999.