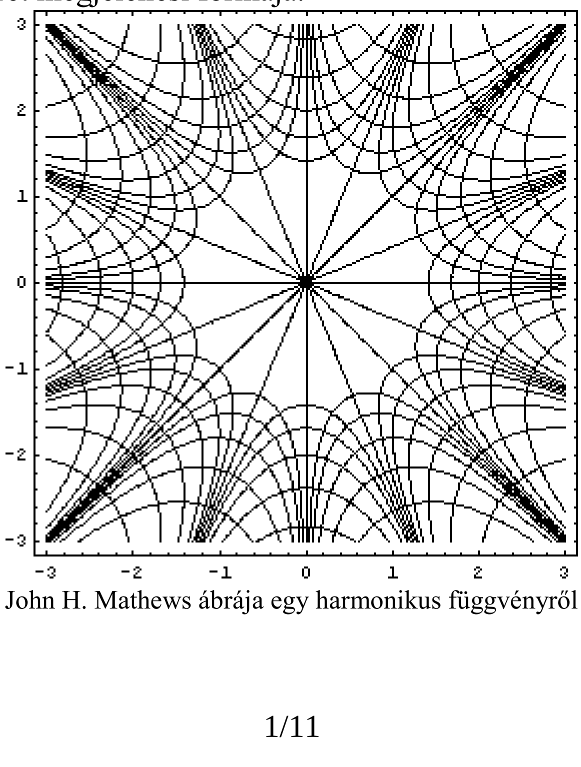
Számkitöltésektől a harmonikus függvényekig

Beharangozó feladatai:

1. **feladat:** Írjunk a 0 és az 1 közé kilenc számot úgy, hogy bármelyik szám egyenlő legyen a szomszédainak átlagával!
   0 ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) 1
2. **feladat:** Írjunk számokat az alábbi rács 9 üres rácsnégyzetébe úgy, hogy bármelyik szám egyenlő legyen a négy vele oldalszomszédos négyzetbe írt szám átlagával!

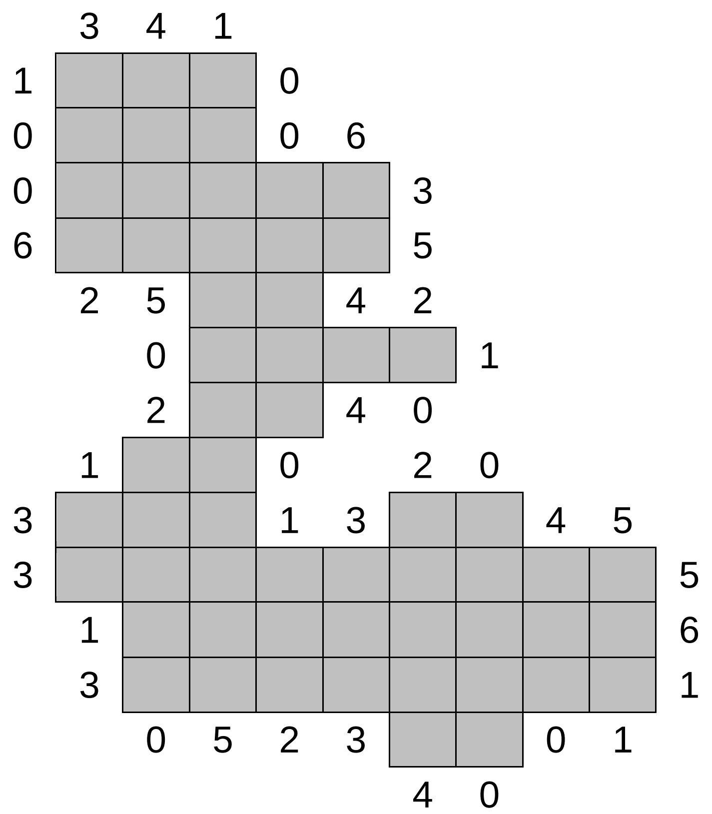
	1	1	1	
1				0
1				0
1				0
	0	0	0	

3. **feladat:** Mutassuk meg, hogy ha a síkbeli négyzetrács minden négyzetébe beírunk egy 0 és 1 közötti számot úgy, hogy minden szám a szomszédos négy szám átlaga, akkor az összes szám egyenlő.
4. A 3. feladat állítása akkor is igaz, ha a számokról csak azt tudjuk, hogy nemnegatívak, de ezt nehezebb megmutatni. Az előadásban arról lesz szó, hogy ezen elemi feladatok egész sor kérdést vetnek fel különböző középérték-tulajdonsággal rendelkező függvényekről. Mint kiderül, a feladatok kapcsolatban vannak véletlen bolyongásokkal vagy egy dróthurokra feszített szappanhártya alakjával. A probléma vizsgálata közben eljuthatunk a harmonikus függvényekhez, és kiderül, hogy 3. feladatunk állítása egy általános elv konkrét megjelenési formája.



John H. Mathews ábrája egy harmonikus függvényről

Azt a tulajdonságot, hogy minden mezőbe írt szám egyenlő a vele szomszédos mezőkbe írt számok átlagával nevezzük **középérték-tulajdonságnak**.
A továbbiakban középérték-tulajdonsággal rendelkező függvényeket vizsgálunk.
Rögtön az első feladat talán a legegyszerűbb példája egy ilyen függvénynek. Látható, hogy ennek a függvénynek az 1/10 megfelelő többszöröseit kell hozzárendelnie a mezőkhöz.
Bonyolultabb a helyzet, ha egy ehhez hasonló rendszerben szeretnénk elérni, hogy a belső, a sötétített mezőkre érvényes legyen a középérték-tulajdonság:



De térjünk vissza inkább a beharangozó egyszerűbb, 3x3-as négyzetének problémájára! Legkézenfekvőbb módszer ilyenkor a keresett számokat ismeretlennek tekinteni:

	1	1	1	
1	x_1	x_2	x_3	0
1	x_4	x_5	x_6	0
1	x_7	x_8	x_9	0
	0	0	0	

Mit jelent a középérték-tulajdonság? Azt jelenti, hogy x_1-t tekintve például:

$$x_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{4}$$

Ilyen egyenletből még felírható 8. A kérdés az, hogy ennek az egyenletrendszernek van-e megoldása, és ha igen, hány?
Írjuk az egyenleteket egy táblázatb, a tagokat x_1, x_2 , ..., x_9, valamint a konstans tagot meg különböztetve és külön oszlopba írva (azaz elsőbe az x_1-t másodikba az x_2-t ... utolsóba a konstans tagot). Ekkor azt tapasztaljuk, hogy az átlóba írt x-ek együtthatói nem kisebbek, mint az egyenleteikben szereplő összes többi együttható abszolútértékeinek összege. Azt vehetjük észre, hogy a lineáris egyenletrendszer minden egyenletében az egyik ismeretlen együtthatója nem kisebb, mint a többi – a kérdéses egyenletben megjelenő – együttható abszolútértékeinek összege. Ez az úgynevezett diagonálisan domináns eset.

Tétel: Diagonálisan domináns esetben pontosan egy megoldása van az egyenletrendszernek.

A tétel bizonyítása nem hangzott el.

A továbbiakban tárgyalt hasonló táblázatok egyenletrendszere is diagonálisan domináns lesz.

Ez nem a legegyszerűbb módja annak, hogy például esetünkben a 3x3-as négyzetbe írandó számokat kiszámoljuk, de mindenesetre annyit már látunk, hogy minden ehhez hasonló táblázatot ki lehet tölteni úgy, hogy rendelkezzzen a középérték–tulajdonsággal. Valamint látjuk, hogy egyértelműen lehet kitölteni: létezik megoldás és csak egy.

Visszatérve a bonyolultabb táblázatra, lássuk a következőt: ezek a rendszerek összeadhatók. Ha veszek két egybevágó (azonos méretű) középérték-tulajdonsággal rendelkező táblázatot, azokat egymás fölé helyezve és az egyes mezőkbe a két szám értékét írva ismét egy középérték-tulajdonsággal rendelkező táblázatot kapunk. Persze ezt a műveletet a határon is el kell végezni. Tartománynak a sötétített mezőket, határnak az őket oldallal határoló mezőket hívjuk. Látható, hogy a rendszerhez hozzáadhatok vagy kivonhatok belőle egy számot. Megszorozhatom az elemeit vagy akár el is oszthatom ugyanazzal a számmal. Persze ismét el kell végeznem a műveletet a határon is.

Válasszuk külön az egyértelműség és a létezés kérdését! Persze még mindig véges tartományokról beszélve tegyük fel, hogy valahol megjelenik a legnagyobb szám a tartományon belül (tehát nem a határon). Tekintsük ezt a mezőt! Mivel ez a legnagyobb szám a rendszerben, a középérték-tulajdonság miatt a vele oldalszomszédos mezőkbe is ennek a számnak kell kerülnie. S így tovább, a tartomány minden mezőjébe ennek a számnak kell kerülnie, a rendszer egy konstans rendszer és ez is csak akkor lehetséges, ha a határon is ez a szám szerepel mindenhol. Figyelem! A határra nem követeljük meg a középérték-tulajdonságot. Ugyanez a gondolatmenet a minimumra is elmondható.

Tétel: Nem konstans rendszer szélsőértékeit (maximumát és minimumát) a határon veszi fel. Ezt hívhatjuk maximumelvnek.

Tegyük fel, hogy a rendszerre van két kitöltésünk, melyek középérték-tulajdonsággal bírnak! Vegyük a két rendszer különbségét, azaz az azonos helyen álló elemek különbségéblől álló rendszert! Mivel a határ adott, az eredményként kapott rendszer határán csak 0 lesz. A tételünk szerint a rendszer minimumát és maximumát is a határon veszi fel. Tehát e rendszer minimuma és maximuma is a 0.

Így a rendszerünk a konstans nulla. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy a kiindulási két tetszőleges (de középérték-tulajdonsággal bíró) rendszerünk tökéletesen azonos volt. Ezzel bebizonyítottuk, hogy egy ilyen rendszernek maximum egy középérték-tulajdonsággal rendelkező kitöltése van.

Ezt felhasználva egyszerüsödik a 3x3-as négyzet problémája:

	1	1	1	
1	x_1	x_2	x_3	0
1	x_4	x_5	x_6	0
1	x_7	x_8	x_9	0
	0	0	0	

	0	0	0	
0	x_9	x_8	x_7	1
0	x_6	x_5	x_4	1
0	x_3	x_2	x_1	1
	1	1	1	

Forgassuk el a rendszert 180 fokkal, majd adjuk hozzá eredeti önmagához. Ekkor a határon csak 1-es lesz, tehát tételünk alapján ez a konstans 1 rendszer. Innen
$x_9 + x_1 = 1$, $x_8 + x_2 = 1$, $x_6 + x_4 = 1$, $x_3 + x_7 = 1$, $2x_5 = 1$
Az egyértelmű kitöltés és a szimmetria miatt
$x_6 = x_8$, $x_3 = x_7$.
Ezek ismeretében már csak két ismeretlenre kell felírni a középérték-tulajdonságból adódó egyenleteket, tehát lényegesen egyszerűsödött a problémánk.

Hogy döntsük el, hogy a bonyolultabb táblázat esetében van-e megoldás? Mindenesetre azt már tudjuk, hogyha van megoldás, akkor csak egy van. Elég lenne megvizsgálnunk azt az esetet, amikor a határon végig nulla van, kivéve egy helyen, ahol egy egyes. Ugyanis ilyenek megfelelő többszöröseit összeadva megkaphatjuk a kívánt rendszert.

Válasszuk ki a tartomány egy mezőjét! Előbb a tartomány többi mezőjétől függetlenül megmondjuk, hogy mi kerüljön ebbe a mezőbe, és erről majd belátjuk, hogy az így kapott kitöltés jó kitöltés. Bevezetjük a **véletlen bolyongás** fogalmát. A véletlen bolyongást a tartomány egy pontjáról índítjuk, és a bolyongás folyamán egy mezőről mindig egy szomszédos mezőre lépünk, miden szomszédra egyenlő valószínűséggel, azaz mindegyikre 0,25-ös valószínűséggel. Ezt addig folytatjuk, amíg ki nem érünk a határra. Lehetséges, hogy a bolyongásnak sosem lesz vége, ennek azonban véges nagy tartományban 0 az esélye.

Azt állítjuk, hogy a kiinduló mezőbe a bolyongás utolsó mezőjébe írt szám várható értékét kell írni. Azaz egyszerűsített esetben annak az esélyét, hogy az egyesre érünk a határon és nem nullára. Ez bonyolult kombinatorikai számolások eredményeképpen megkapható, de most képzeljük el, hogy mi nagyon sokszor megismételjük ezt a kisérletet. Nagyon sokszor. Ezáltal kapunk egy olyan számot, ami az észrevehetőség határán kívüli mértékben tér el a keresett értéktől (elvégezzük tízmilliószor a mérést és megszámoljuk, hányszor érkeztünk egy eggyel jelölt határmezőre, majd ezt a számot elosztjuk a tízmillióval).

A véletlen bolyongás első lépéseként a kezdő mező négy szomszédja közül egyenlő valószínűséggel kiválasztok egyet. Mit jelent ez? Azt jelenti, hogy a mezőbe írandó szám a négy szomszédos szám átlaga lesz. Minthogy abban az esetben, amikor az első lépést az egyik szomszédos mező felé tesszük meg, a bolyongás várható értéke annyi lesz, mintha onnan indultunk volna. Ez a kitöltés tehát rendelkezik a középérték-tulajdonsággal. Most már látjuk, hogy ezeknek a táblázatoknak van valamilyen középérték-tulajdonsággal rendelkező kitöltése.

Térjünk most vissza a beharangozó első példájához. Amit a síkon megtettünk, megtehetjük itt is. Megkérdezhetjük, hogyha egy mezőről véletlen bolyongást indítunk, akkor mi annak a valószínűsége annak, hogy az 1 felöli végére jutunk a rendszernek.

Ezt pénzfeldobálással modellezhetjük. Minden fej után jobbra lépünk egyet, minden írás után balra. A következőképpen modellezhetjük még: A bank ellen játszunk és k forintunk van. Feldobunk egy pénzérmét, ha fej, mi nyerünk egy forintot, ha írás, ő; mi annak a valószínűsége, hogy előbb lesz n forintunk (esetünkben 10), mint 0. Láthatjuk tehát, hogy fentebb ennek a valószínűségét is megállapítottuk: a $(k + 1)$-ik mezőn van k forintunk és ide $k/n = k/10$-t írtunk. Annak az esélye, hogy ha k forinttal indulunk, a bank ellen folytatott játékban valaha elérjük az $n = 10$ forintot k forintról indulva $k/10$. Hiszen ha a nullára érek, vége a játéknak. Persze ha a banknak akármennyi pénze van, és mi addig játszunk, amíg van pénzünk, 1 valószínűséggel visszaérünk a nullába.

Ez a **Pólya-tételnek** – Pólya György 1921-ben bizonyított tételének – a következménye. E tétel következménye, hogy a véletlen bolyongás egy- és kétdimenzióban rekurrens (visszatérő), de 3 vagy több dimenzióban nem az.

Térjünk vissza a beharangozó harmadik feladatához! Itt már a végtelen síkon dolgozunk. Láthatunk egy mellékfeltételt: a számok 0 és 1 közé esnek. E nélkül nyílván nem igaz a feladat állítása. Képzeljük el, hogy minden vizszintes egyenes mezőibe egészeket írunk. 1 magasságban csupa 1-t, 2 magasságban 2-t, 0 magasságban 0-t, –1 magasságban –1-t, stb… ez a kitöltés rendelkezik a középérték-tulajdonsággal. De vajon ki lehet-e tölteni a síkot hasonlóan 0 és 1 közötti valós számokkal. Érezzük azt, hogy a 0 és 1 csak azt jelenti, hogy ezek a számok korlátosak. Ha bizonyítani szeretnénk, hogy az összes szám egyenlő, akkor már nem alkalmazhatjuk a maximumelves okoskodásunkat, végtelen sok szám között egyáltalán nem biztos, hogy van legnagyobb vagy legkisebb.

Nos, akkor mit tehetünk? Első lépésben iteráljunk! Legyen $a_{i,j}$ az (i;j) koordinátájú mezőben lévő szám. Ekkor azt mondhatjuk, hogy

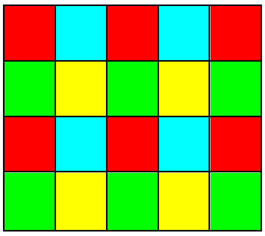
$$a_{0,0} = \frac{a_{1,0} + a_{0,1} + a_{-1,0} + a_{0,-1}}{4} = \frac{a_{0,2} + a_{2,0} + a_{0,-2} + a_{-2,0}}{16} + \frac{a_{1,1} + a_{1,-1} + a_{-1,-1} + a_{-1,1}}{8} + \frac{a_{0,0}}{4}$$

n. lépés után és 2^n-nel felszorozva egy ilyen alakú egyenletet kapunk:
$4^n a_{0,0} = \sum_{i,j} A_n(i,j) \cdot a_{i,j}$, ahol az A_n minden (i;j)-hez hozzárendeli annak a mezőnek az n. lépésben kapott együtthatóját (nagyon sok ezek közül nulla), valamint
$\sum_{i,j} A_n(i,j) = 4^n$.

$A_n(i,j)$ ha meggondoljuk, tulajdonképpen azt jelenti, hogy n lépésből hány különböző útvonalon lehet a (0;0) pontból az (i,j) pontba jutni, ezt $\binom{n}{\frac{n-(i-j)}{2}}$ féleképpen tehetjük meg. Hiszen (i–j)-vel kell többet vízszintes irányban lépnünk, mint függőleges irányban és így $\frac{n-(i-j)}{2}$-t kell függőleges írányban lépnünk ezt pedig n lépésben $\binom{n}{\frac{n-(i-j)}{2}}$ különböző képpen tehetjük meg.

A fentiekhez hasonlóan (0 ; 2).re is felírhatjuk az egyenletünket:
$$4^n a_{0,2} = \sum_{i,j} A_n(i,j) \cdot a_{i,j+2}$$
A két egyenlet különbsége 4^n-nel osztva:
$$a_{0,2} - a_{0,0} = \frac{1}{4^n} \sum_{i,j} A_n(i,j) \cdot (a_{i,j+2} - a_{i,j})$$
$$\left|a_{0,0} - a_{0,2}\right| \le \frac{1}{4^n} \binom{2n+2}{n+1}$$
Ezt a becslést kapjuk. Ha n-nel tartunk a végtelenbe, a jobb oldal tart a nullához. Azt kaptuk tehát a becslés által, hogy $a_{0,2} = a_{0,0}$. (Ennek teljes levezetése nem hangzott el)

Ugyanígy belátható, hogy $a_{2,0} = a_{0,0}$, és ezt kiterjeszthetjük az egész síkra.



Azt kaptuk, hogy a piros mezőkbe írt számok megegyeznek, valamint a többi egyszínű mezőbe írt számok is megegyeznek a többi megegyező színűre festett mezőbe írt számokkal.

Ez leegyszerűsíti a dolgunkat, hiszen így már csak négy ismeretlenünk van, s mivel továbbra is fennáll a középérték-tulajdonság, felírható négy darab egyenlet.

Tulajdonképpen nincs szükség a kétoldali korlátosságra, elégséges a bizonyításhoz az egyoldali korlátosság, de maradjunk most a kétoldalról korlátos esetnél.
Vegyük a szomszédságban levő mezők különbségeinek szuprémumát! Nem mondhatjuk, hogy a legnagyobbat vesszük, hiszen nem biztos, hogy van legnagyobb ezek közül. Viszont vehetjük a szuprémumot, a felső korlátok közül a legkisebbet, ez legyen α! Azt akarjuk bebizonyítani, hogy ez az érték 0, ez ekvivalens az állítással.
Mivel végtelen síkon dolgozunk, azt eltolhatjuk, akár el is forgathatjuk. Így feltehetjük, hogy az origóban lévő szám és egy azzal szomszédos szám különbsége tetszőlegesen közel van α-hoz.

		$a_{0,1}$	$a_{1,1}$	
	$a_{-1,0}$	$a_{0,0}$	$a_{1,0}$	$a_{2,0}$
		$a_{0,-1}$	$a_{1,-1}$	

$$a_{1,0} - a_{0,0} = \frac{1}{4}\left[\left(a_{2,0} - a_{1,0}\right) + \left(a_{1,1} - a_{0,1}\right) + \left(a_{0,0} - a_{-1,0}\right) + \left(a_{1,-1} - a_{0,-1}\right)\right]$$

Mivel az egyenlet baloldala gyakorlatilag α, és az egyenlet jobb oldalán szereplő különbségek legföljebb α-k, mindegyik különbségnek α-nak kell lennie, de legalábbis tetszőlegesen közel kell kerülnie hozzá, ha az egyenlet baloldalán szereplő különbséggel α-hoz tartunk.

Hasonlóan tovább folytatva bizonyítható, hogy $a_{j+1,0} - a_{j,0} = \alpha$. Innen pedig
$\sum_{j=0}^{n-1}\left(a_{j+1,0} - a_{j,0}\right) = a_{n,0} - a_{0,0} = n \cdot \alpha$.

Tegyük fel, hogy α egy pozitív szám! Ekkor a $\sum_{j=0}^{n-1}\left(a_{j+1,0}-a_{j,0}\right)=a_{n,0}-a_{0,0}=n\cdot\alpha$ különbség elég nagy n-re bármilyen korlátot túlnő. Mivel a sík mezőibe 1 és 0 közötti számokat írhattunk, két mező különbsége nem lehet 1-nél nagyobb. A kapott ellentmondás alapján α, azaz a különbségek szuprémuma nem negatív, tehát esetünkben 0. Ezzel bizonyítottuk a feladat állítását.

Az előadás során minden középérték-tulajdonsággal rendelkező rendszerre az volt igaz, hogy tetszőleges mező, az őt határoló négy mező átlaga. Ezt általánosítani is lehet, mondhatjuk hogy a rendszerben minden mező a vele érintkező 8 mező átlaga stb... A bemutatott megoldások ugyanúgy működnek.

Most térjünk át függvényekre! Folytonos függvényeket fogunk tekinteni. Amit feljebb megcsináltunk 1 oldalú ráccsal, most megcsináljuk ½ oldalúval, majd ¼ oldalúval stb... Azt sejtjük, hogy kapható egy folytonos „határeset”.

Legyen egy f függvényünk, mely a sík minden X pontjához egy számot rendel. Azt követeljük meg, hogy az f függvény minden pontban az ő környezetében található pontokban levő függvényértékek átlagát vegye fel. Persze itt nem beszélhetünk a hagyományos értelemben vett átlagról; helyette a következőt követeljük meg:

$$f(X)=\frac{1}{r^2\pi}\int_{\Delta_r(X)} f$$

Itt $\Delta_r(X)$ jelöli az X körüli kis, r sugarú kört.
Lehetne úgy bevezetni ezt az új fogalmat, hogy egy, a pont körüli kör kerületén átlagoljuk a függvényt. Ez ekvivalens lenne ezzel a megfogalmazással.
Ezt az új középérték-tulajdonságot minden belső pontra megköveteljük (a határra már nem, a határ nem feltétlenül egy görbe, lehet pl. két koncentrikus kör is). Ezzel a tulajdonsággal bíró folytonos függvényt **harmonikus függvénynek** hívjuk.

Mi a beharangozó első két feladatának analógja? Ismét adva van egy határ, és ez alapján ki kell terjesztenünk a függvényt a tartományra.
Legyen *D* a rendszerünk, *H* a határa! Adva van egy folytonos *F* függvény, mely *H* minden pontjához rendel egy értéket. Keressük azt a harmonikus *f* függvényt *D*-n, melyre *f*(*X*) = *F*(*X*) minden *H*-beli *X*-re. Ez a **Dirichlet-probléma**.

Ha van megoldása, akkor egy megoldás van, ugyanis ismét elővehetjük a maximum-elvet. Ha *f* maximuma *D**H*-n van, akkor *f* konstans. Az *f* nem konstans harmonikus függvény szélsőértékeit a határon veszi fel.
Ha az *f* függvény a maximális *M* értékét a tartomány egy*Y* pontjában veszi fel, akkor az *Y* pont körüli körlapban is mindenhol *M*-t vesz fel stb...

Ebből következik, hogy ha a nullahatár feltétellel akarjuk megoldani a problémát, akkor az egyetlen megoldás a konstans nulla. Innen pedig látható, hogy ha van két megoldásunk, akkor azok azonosak. Hiszen a két megoldást kivonhatjuk egymásból, s ekkor a határon konstans nullát kapok, ekkor a tartomány is konstans nulla, ez pedig azt jelenti, hogy a két megoldás azonos volt.

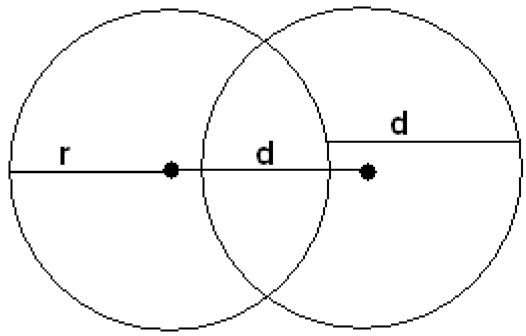
Általában megoldható-e a probléma? Vannak speciális esetek, amikor nem (pl egy körvonal mentén megköveteljük, hogy nulla legyen, de a középpontjában 1 legyen). Azonban általában megoldható lesz.
Ennek bizonyításához ismét csináljunk egy véletlen bolyongást. Vegyük a diszkrét esetben a véletlen bolyongást, s a már leírt módon sűrítsük a négyzetrácsot és keressük a „határesetet”. Egyre sűrűbb rácson tekintsük a véletlen bolyongást, egyre gyorsabban, hogy bár kisebb négyzetrácson de hasonlóan gyorsan mozogjon. Mit kapunk? Egy véletlen bolyongást a síkon, amely minden pontban változtatja az irányát. Ezt **Brown-mozgásnak** hívjuk.

Ismét elégséges azt megnéznünk, amikor a határ egy része 1, a többi nulla, ezek konstans szorosainak összege kiadja a kívánt rendszert. A Pólya-tétel alapján ez a mozgás 1 valószínűséggel eltalálja egyszer a határt. Ha kiért megállunk. Az *X* pontba azt a valószínűséget írjuk, hogy a Brown-mozgás a határra érve mekkora valószínűséggel ér egyesbe. Ez a függvény nyilván rendelkezik a középérték-tulajdonsággal.

Húzzunk ugyanis *X* köré egy tartománybeli körvonalat. Ennek egyes pontjait egyenlő valószínűséggel éri el. Tehát az *X* pontba a körvonalra írt számok átlagát kell, hogy írjuk. Ebből pedig integrálás révén következik, hogy az *X* körüli körlapban szereplő számok átlagát kellett írnunk. Tehát ez a fajta kitöltés valóban harmonikus függvény *D*-n.
Tehát létezik megoldás és csak egy megoldás.

Mi lenne a beharangozó harmadik feladatának analógiája? Az volt a feladat, hogy egy diszkrét korlátos harmonikus függvény az egész síkon konstans függvény.
Állítás: Ha f az egész síkon korlátos és harmonikus, akkor konstans.

Vegyünk két pontot a síkon! Rajzoljunk ezek köré *r* sugarú kört!



Legyen a két pont távolsága d! Ekkor az egyszeres fedésű félhold legnagyobb vízszintes kiterjedése is d. A két pontba a két körbe írt számok átlagát írom, így különbségük nem nagyobb, mint a két félholdba írt számok abszolútértékei összegének $\frac{1}{r^2}\pi$ szerese.

A két félhold együttes területe nem nagyobb mint cr (hiszen d konstans), ahol c egy konstans. Ha a félholdak minden pontjában is 1 van, a különbség akkor is csak maximum $\frac{c}{r}$. Ez a különbség pedig elég nagy r-re bármilyen közel kerülhet a nullához. Azt kaptuk tehát, hogy e két pontba írt számok megegyeznek.

Tulajdonképpen minden differenciálható függvény harmonikus függvény lesz. Tekintsünk egy differenciálható függvényt a komplex számsíkon!

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

$$z = x + iy$$

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$$

Ha h valós, illetve képzetes, akkor

$$f'(z) = U_x(x, y) + iV_x(x, y)$$

$$f'(z) = i \cdot U_y(x, y) + V_y(x, y)$$

Ahol alsó U_x, V_x vannak x szerint U_y, V_y pedig y szerint. Innen a fentiek alapján:

$$U_x = V_y \quad U_y = V_x$$

És egy további deriválás után:

$U_{xx} + U_{yy} = 0$, illetve $V_{xx} + V_{yy} = 0$

Ez pedig egy másik megfogalmazása lesz a harmonikusságnak. Tehát három dolog is ekvivalens: középérték-tuladjonság körlapra, illetve körlemezre, valamint ez a megfogalmazás.

Mik a legegyszerűbb differenciálható függvények? A polinomok.

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$$

$$P_n^{|}(z) = n a_n z^{n-1} + ... + a_1$$

Minden polinom és minden polinom reciproka is harmonikus.

Az algebra alaptétele, hogy P_n-nek van zérushelye, ha nem nulladfokú, méghozzá n darab. Bizonyítás: ha P_n-nek nincs zérushelye, akkor $\frac{1}{P_n}$ az egész komplex számsíkon értelmes harmonikus függvény, ráadásul korlátos. Bebizonyítottuk, hogy korlátos harmonikus függvény csak konstans függvény lehet. Emiatt $\frac{1}{P_n}$-nek konstans függvénynek kellene lennie. Ekkor viszont P_n is konstans lenne, de feltettük, hogy nem nulladfokú. Az ellentmondás következménye, hogy P_n-nek van megoldása, van zérushelye.

Ez persze akár több dimenzióban is elmondható. Harmonikus függvények több tudományterületen is megjelennek. Például: hővezetés kapcsán megkérdezhetjük, hogy mi lesz egy test egyensúlyi állapota, ha külsejének minden pontját valamilyen hőmérékleten tartjuk Az egyensúlyi állapot hőmérsékleteit a rendszer harmonikus függvényéből olvashatjuk ki.