Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon

dr. Kiss Géza, Budapest

Az előadás során a komplex számokkal kapcsolatos szokásos algebrai és geometriai fogalmakat, tulajdonságokat ismertnek tételezzük fel. Az időkeret miatt több esetben el kell tekintenünk az időigényes - bár nagyon fontos és hasznos - precíz építkezéstől, hogy lehetőség maradjon a komplex számok használatának áttekinthetőségét, eleganciáját és erejét is megmutatni.

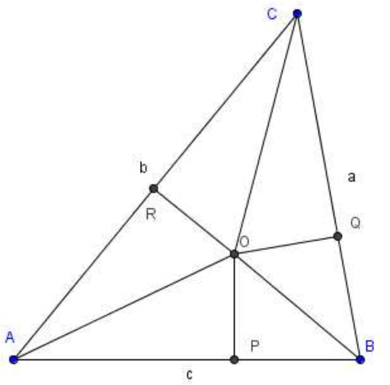
1. Bevezető feladatok

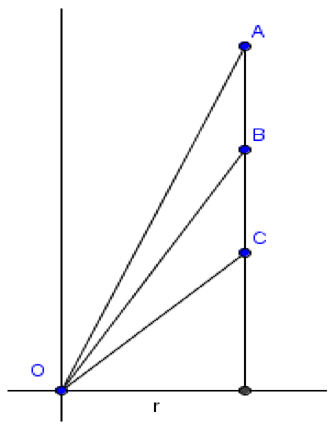
A következő Am. Math. Monthly-ban közölt bizonyításra Mészáros József tanár úr hívta fel a figyelmemet. A tétel bizonyításában szereplő módszerrel Mészáros tanár úr megoldotta Oláh György tanár úr egyik kedvenc feladatát, amely három egymáshoz csatlakozó négyzetre vonatkozik. Az egész anyag olvasható a Fazekas Gimnázium matematika portálján a szemináriumi anyagok között.

1.1. Tétel: (Heron-képlet) Tetszőleges háromszög területe a szokásos jelölések mellett

$$T=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Bizonyítás: Először készítsünk ábrát!





A háromszögek *O*-nál fellépő szögei a szokásos jelölésekkel rendre $90^{\mathrm{o}}-\frac{\alpha}{2}$, $90^{\mathrm{o}}-\frac{\beta}{2}$, $90^{\mathrm{o}}-\frac{\gamma}{2}$. A beírt kör sugara *r*, az érintőszakaszok $AP=s-a$, $BQ=s-b$, $CR=s-c$.
Helyezzük el most az *OPA*, *OQB* és *ORC* háromszögeket a Gauss-féle komplex számsíkon úgy, hogy az *O* pont mindegyik háromszögre legyen a középpontban és a háromszögek *r* hosszúságú befogója a valós tengelyre essen. Így az *A, B, C* csúcsoknak megfelelő komplex számok

$$A=r+(s-a)i,\ B=r+(s-b)i,\ C=r+(s-c)i.$$

A három komplex szám argumentumának összege

$$90^{\mathrm{o}}-\frac{\alpha}{2}+90^{\mathrm{o}}-\frac{\beta}{2}+90^{\mathrm{o}}-\frac{\gamma}{2}=270^{\mathrm{o}}-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=180^{\mathrm{o}}.$$

Szorzáskor az argumentumok összeadódnak, következésképpen a három szám szorzatának képzetes része nulla kell, hogy legyen.

$$\begin{gathered}A\cdot B\cdot C=\left[r+(s-a)i\right]\left[r+(s-b)i\right]\left[r+(s-c)i\right]=\\ \left[r^3-r(s-a)(s-b)-r(s-b)(s-c)-r(s-c)(s-a)\right]+\\ i\left[r^2(s-a)+r^2(s-b)+r^2(s-c)-(s-a)(s-b)(s-c)\right].\end{gathered}$$

A képzetes rész nulla:

$$r^2(s-a+s-b+s-c)-(s-a)(s-b)(s-c)=0.$$

Átrendezve és *s*-sel szorozva

$$r^2s^2=s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Végül beírjuk a jól ismert $T=r\cdot s$ összefüggést és éppen a Heron-képlet adódik

$$T=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

1.2. Most vizsgáljuk egy kicsit a húrnégyszög Feuerbach-körét.

Az általánosság megszorítása nélkül a húrnégyszög köré írt köre legyen egységnyi sugarú és középpontja az *O* pont, csúcsai *a, b, c, d*. A háromszögnél megismertek mintájára hívjuk az $s=\frac{a+b+c+d}{4}$ számot a négyszög súlypontjának, az $m=a+b+c+d$ számot a négyszög magasságpontjának, és végül az $e=\frac{a+b+c+d}{2}$ középpontú $\frac{1}{2}$ sugarú kört a négyszög Feuerbach-körének. Legyenek rendre az $(abc),(abd),(acd),(bcd)$ háromszögek súlypontjai s_d, s_c, s_b, s_a; magasságpontjai m_d, m_c, m_b, m_a; Feuerbach-köreiknek középpontjai e_d, e_c, e_b, e_a.

Most tekintsük például az *m* és m_d távolságát.

$$|m-m_d|=|a+b+c+d-a-b-c|=|d|=1.$$

Hasonlóan $|m-m_a|=|m-m_b|=|m-m_c|=1.$

A négy háromszög magasságpontjai körül írt egységkörök egy pontban metszik egymást. Ez az *m* pont a húrnégyszög magasságpontja.

Most vizsgáljuk az e pont távolságát az egyes háromszögek Feuerbach-köreinek középpontjától.

$$|e-e_d|=\left|\frac{a+b+c+d}{2}-\frac{a+b+c}{2}\right|=\left|\frac{d}{2}\right|=\frac{1}{2}.$$

Hasonlóan $|e-e_a|=|e-e_b|=|e-e_c|=\frac{1}{2}$. A négy Feuerbach-kör középpontja $\frac{1}{2}$ távolságra van az *e* ponttól, tehát az *e* középpontú $\frac{1}{2}$ sugarú kör mindegyik háromszög Feurbach-körének középpontját tartalmazza. A négy háromszög Feuerbach-köre az *e* pontban metszi egymást. Ez a kör joggal nevezhető tehát a négyszög Feuerbach-körének.

Most tekintsük a csúcsok és *s* súlypont, illetve az egyes háromszögek súlypontjainak és a súlypontnak a különbségét.

$$d-s=d-\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{3d-a-b-c}{4},$$
$$s-s_d=\frac{a+b+c+d}{4}-\frac{a+b+c}{3}=\frac{3d-a-b-c}{12}.$$

Látjuk, hogy *d*, *s* és s_d egy egyenesen vannak és *s* negyedeli az $s_d d$ szakaszt. Más szavakkal a csúcsokat a maradék három pont által meghatározott háromszög súlypontjával összekötő szakaszok egy pontban metszik egymást és negyedelik egymást. Ezt hívjuk a négyszög súlypontjának. Azt is természetesen látjuk, hogy az *O* pont, a súlypont, a Feuerbach-kör középpontja és a magasságpont egy egyenesen helyezkednek el.
Végül vegyük az egyes háromszögek magasságpontjainak és az átellenes csúcsoknak a felezőpontjait. $\frac{a+m_a}{2}=\frac{a+b+c+d}{2}=e.$ Ha az eredeti négyszöget tükrözzük a Feuerbach-körének középpontjára, akkor éppen a négy háromszög magasságpontjai által meghatározott négyszöget kapjuk. A két négyszög egybevágó.
Ez a megoldás mutatja, hogy a komplex számok minden olyan kellemes tulajdonságot hordoznak, amiket a vektoroknál már megszoktunk. De ennél sokkal többet is mondhatunk a későbbiekben.

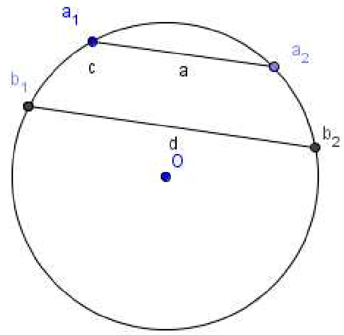
2. Segédeszközök

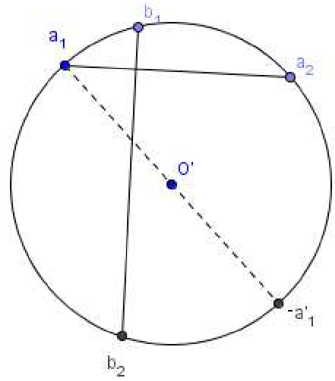
Gyakran van szükségünk annak eldöntésére, hogy két adott egyenes párhuzamos-e, illetve merőleges-e egymásra. Viszonylag kényelmes ennek eldöntése a komplex számsíkon akkor, ha ismerjük a szereplő egyeneseknek és egy körnek a metszéspontjait.

2.1. *Párhuzamosság.* Az *O* középpontú kör két párhuzamos húrjának végpontjai legyenek a_1, a_2, illetve b_1, b_2.
Az (a_1b_1) ív egyenlő az (a_2b_2) ívvel, tehát a_1-et ugyanaz az *O* középpontú forgatás viszi b_1-be, amely b_2-t a_2-be. A két komplex szám hányadosa ugyanaz az egységnyi hosszúságú komplex szám kell, hogy legyen.

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{a_2}{b_2}\Leftrightarrow a_1a_2=b_1b_2.$$

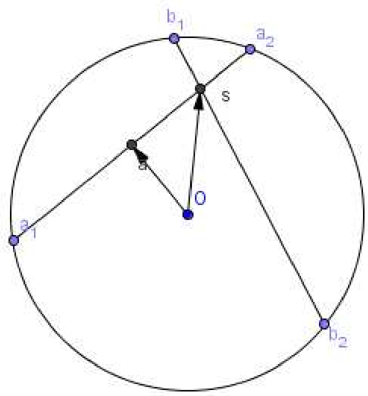
A bizonyítás oda-vissza olvasható, ez a párhuzamosság feltétele.





2.2. *Merőlegesség.* Legyen most az (a_1a_2) húr merőleges a (b_1b_2) húrra. Tükrözzük a_1-et az *O* pontra, így $-a_1$-et kapjuk. A $(-a_1a_2)$ húr párhuzamos a (b_1b_2) húrral, tehát $a_1a_2 = -b_1b_2$, ez a merőlegesség feltétele.

2.3. *Két húr metszéspontja.* Legyen (a_1a_2) és (b_1b_2) az *O* középpontú egységkör két húrja.



Célunk a két húr metszéspontjának meghatározása a végpontok segítségével. Jelöljük az (a_1a_2) húr felezőpontját *a*-val, a (b_1b_2) húr felezőpontját *b*-vel, a metszéspontot *s*-sel. Mivel az (Oas) háromszög derékszögű, ezért alkalmazhatjuk a Pitagorasz-tételt: $|s|^2 = |s-a|^2 + |a|^2$. Figyelembe véve, hogy a komplex szám hosszának négyzete a szám és konjugáltjának szorzata

$$s \cdot \bar{s} = (s-a)(\bar{s}-\bar{a}) + a \cdot \bar{a}.$$

Ebből algebrai átalakítással

$$\frac{s}{2a}+\frac{\bar{s}}{2\bar{a}}=1,$$

illetve a $2a=a_1+a_2$ miatt

$$\frac{s}{a_1+a_2}+\frac{\bar{s}}{\bar{a}_1+\bar{a}_2}=1,$$

a_1 és a egységnyi komplex számok, tehát konjugáltjuk éppen reciprokukkal egyezik meg. Ezeket behelyettesítve az

$$\bar{s}a_1a_2+s=a_1+a_2$$

egyenlőség adódik. Az *s* pont a (b_1b_2) húr egyenesén is rajta van, ezért hasonló eredmény írható fel *b*-re is:

$$\bar{s}b_1b_2+s=b_1+b_2\,.$$

Az utóbbi két összefüggésből *s* már kifejezhető:

$$s=\frac{a_1a_2\left(b_1+b_2\right)-b_1b_2\left(a_1+a_2\right)}{a_1a_2-b_1b_2}\,.$$

Amennyiben az *O* középpontú kör nem egységnyi sugarú, akkor az egyes komplex számokat a kör *r* sugarával osztva egységnyi abszolút értékű számokat kapunk és alkalmazhatjuk az előző képletet. Ez egy középpontos hasonlóság *O*-ra vonatkozóan. Az előző jelölésekkel az egységsugarú körben a metszéspont *s*’.

$$s'=\frac{\frac{a_1}{r}\cdot\frac{a_2}{r}\left(\frac{b_1}{r}+\frac{b_2}{r}\right)-\frac{b_1}{r}\cdot\frac{b_2}{r}\left(\frac{a_1}{r}+\frac{a_2}{r}\right)}{\frac{a_1}{r}\cdot\frac{a_2}{r}-\frac{b_1}{r}\cdot\frac{b_2}{r}}=\frac{1}{r}\cdot\frac{a_1a_2\left(b_1+b_2\right)-b_1b_2\left(a_1+a_2\right)}{a_1a_2-b_1b_2}\,.$$

Most *r*-rel szorozva látjuk, hogy az előző formula most is érvényes tetszőleges *r* sugarú körben.

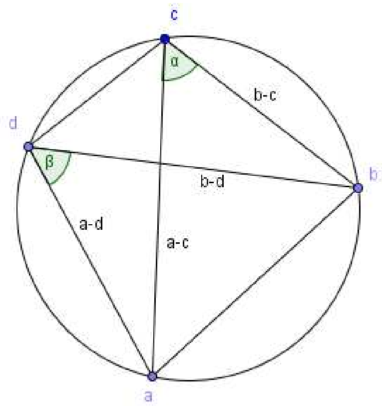
$$s=r\cdot s'=\frac{a_1a_2\left(b_1+b_2\right)-b_1b_2\left(a_1+a_2\right)}{a_1a_2-b_1b_2}\,.$$

Különösen egyszerű a két húr metszéspontjának számolása, ha a két húr merőleges egymásra.

Ekkor $a_1a_2 = -b_1b_2$, tehát

$$s = \frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2}{2}.$$

2.4. *Köri pontnégyes.* Vizsgáljuk meg, hogy mi az algebrai feltétele annak, hogy négy pont egy körön legyen.



Az *a*, *b*, *c*, *d* pontok egy kör pontjai az ábra szerint. A kerületi szögek tételéből következik, hogy $(acb)\sphericalangle = (adb)\sphericalangle$, és emiatt a $b-c$ vektort ugyanolyan szögű forgatás viszi az $a-c$ –vel párhuzamos helyzetbe, mint $b-d$ –t $a-d$ –vel párhuzamos helyzetbe. Jelöljük *e*-vel azt az egységvektort, amely ezt a forgatást biztosítja. Ekkor

$$(b-c)e \parallel a-c, \text{ valamint } (b-d)e \parallel a-d,$$
$$\text{vagyis } (b-c)e = \lambda(a-c) \text{ és}$$
$$(b-d)e = \mu(a-d).$$

A két egyenletet egymással elosztva és átrendezve

$$\frac{a-c}{a-d} = \frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{b-c}{b-d} \Leftrightarrow \frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{b-d}{a-d} = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} = \frac{\mu}{\lambda}.$$

Az $\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}$ kifejezést az *a*, *b*, *c*, *d* komplex számok kettős viszonyának nevezzük és (*a*, *b*, *c*, *d*)-vel jelöljük. Látjuk, hogy köri pontnégyes esetén ez a kettős viszony egy valós szám. Vajon igaz-e ez visszafelé is? Abból, hogy négy komplex szám előbb definiált kettős viszonya valós következik-e, hogy a négy pont egy körön van?

Ha $\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} = k \in \mathbb{R}$, akkor $\frac{a-c}{b-c} = k \cdot \frac{a-d}{b-d}$. Tehát $\frac{a-c}{b-c} \parallel \frac{a-d}{b-d}$.

Ha a *k* valós szám pozitív, akkor $a-c$ és $b-c$ vektorok α szöge megegyezik $a-d$ és $b-d$ vektorok β szögével, ellenkező esetben pedig 180°-ra egészíti ki azt. Ha $\alpha = 0$, akkor $\beta = 0$ vagy $\beta = 180^\circ$, tehát a négy pont egy egyenesen van. Ha $\alpha \neq 0$, és ha *c* és *d* az (*ab*) egyenes ugyanazon oldalán helyezkedik el, akkor

$\frac{a-c}{b-c}$ és $\frac{a-d}{b-d}$ egyirányúak, tehát $\alpha=\beta$, a kerületi szögek tétele alapján a négy pont egy körön van. Ha az (*ab*) elválasztja *c*-t és *d*-t, akkor az $\frac{a-c}{b-c}$ és $\frac{a-d}{b-d}$ vektorok ellentétes irányúak, következésképpen $\alpha+\beta=180^{\circ}$, az α és β egy húrnégyszög két szemközti szöge, a négy pont egy körön van.
A kettős viszonynak rengeteg fontos tulajdonsága van, nagyon sok kiemelt területen alkalmazható. Teljesebb kiépítése időigényes, de megtérül. A későbbiekben felhasználjuk azt a tényt is, hogy a pontok sorrendjét változtatva négy pont kettős viszony összesen hatféle értéket vehet fel. Ezek $\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}, \frac{\lambda-1}{\lambda}$. Mivel a kettős viszony nem vehet fel sem 0, sem 1 értéket, így, ha valamelyik valós, akkor mindegyik valós.

2.5. *Hasonló háromszögek.* Az (*xyz*) és $(x'y'z')$ azonos irányítású háromszögek akkor és csak akkor hasonlók, ha az $x-z$ vektort ugyanaz a forgatva nyújtás viszi át az $y-z$ –be, mint amelyik $x'-z'$ –t az $y'-z'$ –be. Ez azt jelenti, hogy van olyan *f* komplex szám, amellyel $(x-z)f=y-z$ és $(x'-z')f=y'-z'$. Ebből pedig

$$\frac{x-z}{y-z}=\frac{x'-z'}{y'-z'}.$$

2.6. *Szabályos háromszögek.* Ha az (*abc*) háromszög szabályos, akkor egyben (*abc*) és (*bca*) háromszögek hasonlóak is. Használjuk az előző feltételt:

$$\frac{a-c}{b-c}=\frac{b-a}{c-a}.$$

Beszorzás és rendezés után $-a^2+2ac-a^2=b^2-bc-ab+ac$, azaz

$$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca.$$

Mivel az átalakítások oda-vissza elvégezhetők és az (*abc*) háromszög akkor és csak akkor hasonló a (*bca*) háromszöghöz, ha a háromszög szabályos, egy szép algebrai feltételt nyertünk háromszög szabályosságának igazolására.

3. Tételek, feladatok, alkalmazások

3.1. Feladat: *Mutassuk meg, hogy a háromszög magasságpontjának oldalakra vonatkozó tükörképei a köré írt körön vannak.*

Megoldás:

Legyen az egyszerűség kedvéért a köré írt kör középpontja ismét az *O* pont, a háromszög csúcsai pedig *a*, *b* és *c*. Állítsunk merőlegest a (*bc*) oldalra az a pontból és messe ez a merőleges a kört *a’* pontban. A merőlegesség feltétele alapján tudjuk, hogy $bc = -a \cdot a'$.

Ebből $p = -\frac{bc}{a}$. Ezután határozzuk meg a két merőleges húr metszéspontját

$$t = \frac{a + b + c - \frac{bc}{a}}{2}.$$

Ha *a’* pont *t*-re vonatkozó tükörképe valóban az *m* pont, akkor $\frac{p+m}{2} = t$. Ez teljesül, az állítás igaz.

3.2. Feladat: *Igazoljuk, hogy a háromszög talpponti háromszögének oldalai merőlegesek a háromszög köré írt kör csúcsokhoz tartozó sugaraira.*

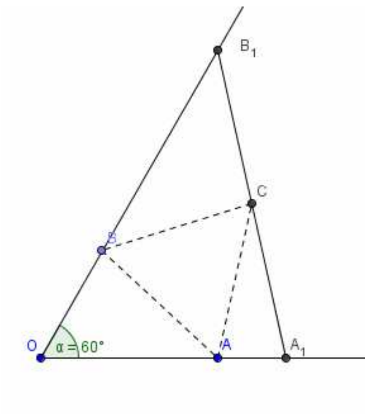
Megoldás:

Az előző feladat alapján tudjuk, hogy a talpponti háromszög oldalai párhuzamosak az $(a'b'c')$ háromszög oldalaival. Az $(a'b'c')$ háromszög a talpponti háromszög *m*-ből kétszeres nagyított képe. Elegendő tehát belátni, hogy a *c*-be mutató sugár merőleges $(a'b')$-re; a másik két sugárra ugyanez teljesül. Az (*Oc*) sugarat tartalmazó húr másik végpontja –*c*, így azt kell belátni, hogy $(c, -c)$ és $(a'b')$ húrok merőlegesek. Ennek teljesülését ellenőrizhetjük a merőlegesség feltételével: $a' \cdot b' = -(-c) \cdot c$.

$$a' \cdot b' = -\frac{bc}{a} \cdot \left(-\frac{ac}{b}\right) = c^2.$$

<u>3.3. Feladat:</u> *Egy* 60^o *-os szög egyik szárán elhelyezkedő A, illetve* A_1 *pontnak a szög csúcsától mért távolsága p, illetve 2q; a másik száron elhelyezkedő B, illetve* B_1 *pontnak a csúcstól mért távolsága pedig q, illetve 2p. Az* A_1B_1 *szakasz felezőpontja C. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög szabályos.*

Megoldás:



Erre a feladatra most a forgatásoknál megszokott módszer mellett algebrai megoldást is adunk. Az egyszerűség kedvéért legyen a szög csúcs *O*, és legyen az *OA* szögszár a valós tengelyen. Ekkor a másik szár pontjai ennek a szárnak a pontjaiból 60^o -os egységvektorral történő szorzással érhetők el. Az egységvektor $e = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i.$ Az egyes pontokhoz tartozó komplex számok:

$$a = p,\ a_1 = 2q,\ b = q \cdot e;\ b_1 = 2p \cdot e.$$

A *C* ponthoz tartozó komplex szám felezőpontként adódik. $c = pe + q.$ Írjuk be az eddigieket a szabályos háromszögre vonatkozó szükséges és elégséges feltételbe.

$$p^2 + q^2 \cdot e^2 + p^2 \cdot e^2 + 2pq \cdot e + q^2 =$$
$$= pq \cdot e + pq \cdot e^2 + q^2 \cdot e + p^2 \cdot e + pq.$$

Ezt rendezve

$$p^2(e^2 - e + 1) + q^2(e^2 - e + 1) = pq(e^2 - e + 1),$$
$$\left(p^2 - pq + q^2\right)(e^2 - e + 1) = 0.$$

Ez valóban teljesül, mert $e^2 + 1 = e.$

A vektoros megoldásnál $\overrightarrow{AC} = q + pe - p = q + p\left(e - 1\right),$ továbbá felhasználva, hogy $e^2 = e - 1,$ $\overrightarrow{AC} = q + p \cdot e^2.$ Az $\overrightarrow{AB} = q \cdot e - p.$ Forgassuk el az $\overrightarrow{AC}$ -t 60^o -kal pozitív irányba, ez éppen egy *e*-vel történő szorzás. Így, mivel e hatodik egységgyök kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{AC} \cdot e = \left(q + p \cdot e^2\right) e = q \cdot e + p \cdot e^3 = q \cdot e - p = \overrightarrow{AB}.$$

A két oldalvektor egymás 60^o -os elforgatottja, a háromszög szabályos.

3.4. Feladat: *Egy ABC háromszög oldalai fölé szerkesztett négyzetek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak. Mit mondhatunk a háromszögről?*

Megoldás:

Legyen az eredeti háromszög (*abc*), négyzetközéppontok által meghatározott pedig (*xyz*) Ha x az (*ab*) oldal fölé szerkesztett négyzet középpontja, akkor $x-a$ merőleges $b-x$ –re és vele egyenlő hosszúságú.

$$(x-a)i = b - x,$$

ebből

$$x = \frac{b+ai}{1+i},$$

és ugyanígy

$$y = \frac{c+bi}{1+i}, \quad z = \frac{a+ci}{1+i}.$$

Annak feltétele, hogy az (*xyz*) szabályos legyen

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx.$$

Ebbe az egyenlőségbe az előbbieket behelyettesítve és $(1+i)^2$ -tel szorozva:

$$b^2 + 2abi - a^2 + c^2 + 2bci - b^2 + a^2 + 2cai - c^2 =$$
$$= bc + b^2 i + cai - ab + ca + c^2 i + abi - bc + ab + a^2 i + bci - ca.$$

Az egyszerűsítések után és *i*-vel osztva

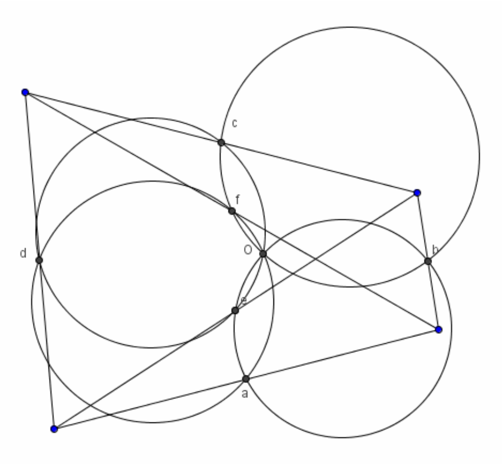
$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

Látjuk, hogy a két egyenlőség ekvivalens. Pontosan akkor lesz a négyzetközéppontok által meghatározott háromszög szabályos, ha az eredeti is az.

3.5. Feladat: *Igazoljuk, hogy tetszőleges négyszög csúcsaiból képzett háromszögek Feuerbach-körei egy közös ponton mennek át. (Az előző tanévben KÖMAL feladat volt.)*

Megoldás:

Legyenek a négyszög oldalainak felezőpontjai *a, b, c* és *d*, átlóinak felezőpontjai *e* és *f* - az ábra szerint.



Az *O* pontot úgy válasszuk meg, hogy az (*abe*) és (*adf*) körök *a*-tól különböző közös pontja legyen. (Az *O* egybe is eshet *a*-val!) Elegendő megmutatni, hogy a fenti két kör közös *O* pontján pl. a (*bcf*) kör is átmegy. A (*cde*) körre a bizonyítás ugyanúgy menne.

A feltétel algebrailag azt jelenti, hogy az (*o*, *e*; *a*, *b*) és (*o*, *d*; *f*, *a*) kettős viszonyok valósak, a bizonyítandó pedig az, hogy (*o*, *c*; *f*, *b*) is valós.

A feltétel részletesebben:

$$(o,e;a,b)=\frac{a}{b}:\frac{e-a}{e-b}=\lambda \text{ (valós)},$$

$$(o,d;f,a)=\frac{f}{a}:\frac{d-f}{d-a}=\mu \text{ (valós)}.$$

Szorozzuk össze a két egyenlőséget:

$$\frac{f}{b}:\frac{(e-a)(d-f)}{(e-b)(d-a)}=\lambda\mu.$$

De tudjuk, hogy $d-f=e-b$, mivel közös alapú háromszögek középvonalvektorai. Ugyanezen okból $e-a=c-f$ és $d-a=c-b$.

Egyszerűsítés után ezeket behelyettesítve

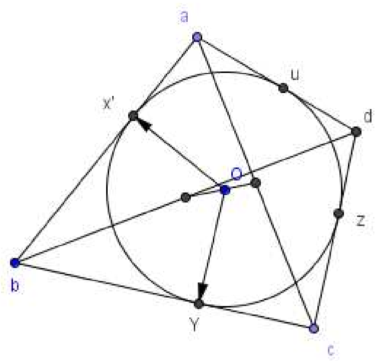
$$\frac{f}{b}:\frac{(e-a)(d-f)}{(e-b)(d-a)}=\frac{f}{b}:\frac{(e-a)}{(d-a)}=\frac{f}{b}:\frac{(c-f)}{(c-b)}=(o,c;f,b).$$

Ez a négy pont is egy körön van.
A nehézséget még valamennyi gyakorlás után is az okozza, hogy elegánsan, áttekinthető algebrai művelettel származtassuk a keresett kettős viszonyt. Látjuk, hogy nem kizárólag a bevezetőben tárgyalt húrnégyszögek négy Feuerbach-köre metszi egymást egy pontban, ez az állítás tetszőleges négyszögre igaz. Ekkor azonban a Feuerbach-körök sugara különböző, a négy középpont nincs egy körön.

3.6. Tétel: (Newton tétele) Az érintőnégyszögbe írt kör középpontja rajta van az átlók felezőpontjait összekötő egyenesen.

Bizonyítás:

Helyezzük el az *abcd* négyszöget úgy, hogy beírt körének középpontja az *O* pont legyen. Jelölje a beírt kör érintési pontjait az (*ab*), (*bc*), (*cd*), (*da*) oldalakon rendre *x*, *y*, *z* és *u*.



Mivel az *x* vektor merőleges $b-x$ -re és y merőleges $b-y$-ra, továbbá $|x|=|y|$ és $|b-x|=|y-b|$, ezért $b-x=\lambda ix$, és $y-b=\lambda iy$, mivel az *x* vektort ugyanaz a 90^{o} -os forgatva nyújtás viszi át $b-x$ -be, mint amilyen *y*-t $y-b$-be. Ebből a két egyenletből $\frac{b-x}{y-b}=\frac{x}{y}$.
Most ki tudjuk fejezni *b*-t az *x* és *y* segítségével $b=\frac{2xy}{x+y}$.

Hasonlóan kapjuk, hogy $c=\frac{2yz}{y+z}$, $d=\frac{2zu}{z+u}$, $a=\frac{2ux}{u+x}$.

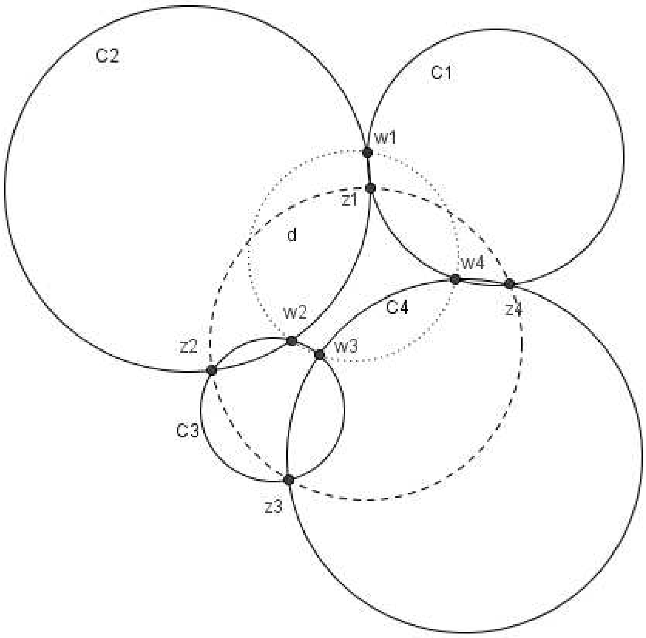
Legyen most az (*ac*) és (*bd*) átlók felezőpontja *e* és *f*. Azt kell belátnunk, hogy *e* és *f* vektorok egymás számszorosai, vagyis hányadosuk valós.

Mivel $e = \frac{a+c}{2}$ és $f = \frac{b+d}{2}$,

$$\frac{e}{f} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{\frac{ux}{u+x} + \frac{yz}{y+z}}{\frac{xy}{x+y} + \frac{zu}{z+u}} = \frac{(x+y)(z+u)}{(u+x)(y+z)} = \frac{x+y}{z+u} : \frac{z+y}{z+u},$$

ez viszont éppen az *x*, *z*, -*y*, -*u* köri pontnégyes kettősviszonya, ami valós szám.

3.7. Lemma: Adott négy kör C_1, C_2, C_3, C_4 a komplex síkon úgy, hogy C_1 és C_2 metszéspontjai z_1, w_1; C_2 és C_3 metszéspontjai z_2, w_2; C_3 és C_4 metszéspontjai z_3, w_3; és végül C_4 és C_1 metszéspontjai z_4, w_4. A z_1, z_2, z_3 és z_4 pontok akkor és csak akkor helyezkednek el egy körön, ha w_1, w_2, w_3 és w_4 pontok is egy körön vannak.



Bizonyítás: Feltevésünk szerint a következő kettős viszonyok mind valósak:

$$(z_1, w_2; z_2, w_1) = \frac{z_1 - z_2}{w_2 - z_2} : \frac{z_1 - w_1}{w_2 - w_1},$$
$$(z_2, w_3; z_3, w_2) = \frac{z_2 - z_3}{w_3 - z_3} : \frac{z_2 - w_2}{w_3 - w_2},$$
$$(z_3, w_4; z_4, w_3) = \frac{z_3 - z_4}{w_4 - z_4} : \frac{z_3 - w_3}{w_4 - w_3},$$
$$(z_4, w_1; z_1, w_4) = \frac{z_4 - z_1}{w_1 - z_1} : \frac{z_4 - w_4}{w_1 - w_4}.$$

Következésképpen

$$\frac{(z_1, w_2; z_2, w_1)}{(z_2, w_3; z_3, w_2)} \cdot \frac{(z_3, w_4; z_4, w_3)}{(z_4, w_1; z_1, w_4)} =$$
$$\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)(w_2 - w_1)(w_4 - w_3)(w_3 - z_3)(w_1 - z_1)(z_2 - w_2)(z_4 - w_4)}{(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)(w_3 - w_2)(w_1 - w_4)(w_2 - z_2)(w_4 - z_4)(z_1 - w_1)(z_3 - w_3)} =$$

Az egyszerűsítés után pedig

$$\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)(w_2 - w_1)(w_4 - w_3)}{(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)(w_3 - w_2)(w_1 - w_4)}.$$

Most két-két előjelet megváltoztatva a képlet átírható

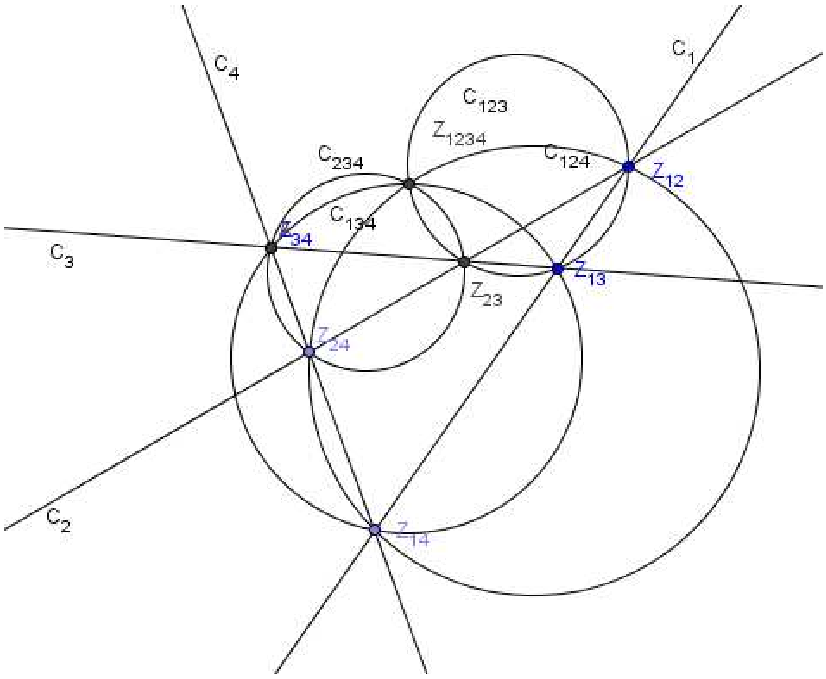
$$\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)(w_1 - w_2)(w_3 - w_4)}{(z_3 - z_2)(z_1 - z_4)(w_3 - w_2)(w_1 - w_4)} = \left\{\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} : \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}\right\} \cdot \left\{\frac{w_1 - w_2}{w_3 - w_2} : \frac{w_3 - w_4}{w_1 - w_4}\right\} =$$
$$= (z_1, z_3; z_2, z_4) \cdot (w_1, w_3; w_2, w_4).$$

Vagyis $(z_1, z_3; z_2, z_4)$ pontosan akkor lesz valós, ha $(w_1, w_3; w_2, w_4)$. Ezzel az állítást beláttuk.

3.8. Clifford-tétel: A síkon *n* darab egyenest általános helyzetűnek nevezünk, ha semelyik kettő nem párhuzamos és semelyik három közülük nem metszi egymást egy pontban. Két általános helyzetű egyenes metszéspontját nevezhetjük a két egyenes Clifford-féle pontjának. Három általános helyzetű egyenesnek három Clifford-féle pontja van és ezek körülírt köre, a három egyenes Clifford-köre. Most vegyünk négy általános helyzetű egyenest a síkon: C_1, C_2, C_3, C_4. Legyen a C_j és C_k egyenesek (egyik) metszéspontja z_{jk} (a másik ∞), a z_{jk}, z_{km}, z_{jm} pontok köré írt köre pedig C_{jkm}. Alkalmazzuk az előző lemmát a $C_{234}, C_2, C_1, C_{134}$ „körök”-re. Ekkor a következőket figyelhetjük meg:

C_{234} és C_2 metszéspontjai z_{23}, z_{24};
C_2 és C_1 metszéspontjai ∞, z_{12};
C_1 és C_{134} metszéspontjai z_{13}, z_{14};
C_{134} és C_{234} metszéspontjai z_{34}, z_{1234},

ahol z_{1234} az ’új’ metszéspontja a C_{134} és C_{234} köröknek (, a másik z_{34}). Mivel $z_{23}, \infty, z_{13}, z_{34}$ kollineárisak, ezért azonnal következtethetünk, hogy $z_{24}, z_{12}, z_{14}, z_{1234}$ egy körön vannak. A jelölések alapján azt is tudjuk, hogy z_{24}, z_{12}, z_{14} köré írt köre C_{124}. Ezek szerint $C_{124}, C_{134}, C_{234}$ körök metszik egymást a z_{1234} pontban.



Másrészt, ugyanez elmondható a $C_{234}, C_2, C_1, C_{134}$ körökre más szereposztással is. Mivel $z_{24}, \infty, z_{14}, z_{34}$ kollineárisak (mind a C_4 egyenesen vannak), ezért $z_{23}, z_{12}, z_{13}, z_{1234}$ egy körön vannak. A z_{23}, z_{12}, z_{13} köré írt kör C_{123}. Ezek szerint $C_{123}, C_{134}, C_{234}$ körök is a z_{1234} pontban metszik egymást. A négy kör a z_{1234} pontban metszi egymást. Ezt a pontot hívjuk a négy egyenes Clifford-féle pontjának.

Ezután már nem érdemes megállni! Most vegyünk öt általános helyzetű egyenest. Bármelyik négynek van Clifford-féle pontja. Belátható, hogy az így nyerhető öt Clifford-féle pont egy körön van. Sőt! Hat általános helyzetű egyenesnek hat Clifford-féle köre van. Ezek úgy keletkeznek, hogy egy-egy pontot elhagyunk és a maradék öt pontnak vesszük a Clifford-körét. Belátható, hogy ez a hat kör egy pontban metszi egymást, stb…

Kaptunk egy végtelen tétells láncolatot, az ún. Clifford-féle tételláncot.

Felhasznált irodalom:

1, Reiman István: Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon, Középiskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó, 1972.

2, Reiman István: Geometria és határterületei, Szalay Könyvkiadó, 1999.

3, I.M. Jaglom: Complex Numbers in Geometry, Academic Press, 1968.

4, Edvards, M.D.: ,,A proof of Heron's Formula", Am. Math. Monthly XII. 2007.

5, http://www.matek.fazekas.hu/portal/tovabbkepzesek/szeminarium/2010/2010pub05.pdf

6, Liang-shin Hahn: Complex Numbers and Geometry, The Mathematical Association of Amerika, 1994.