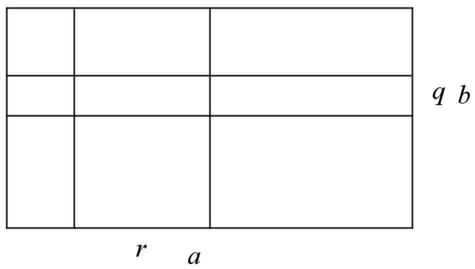
Szakkörre szánt feladatok a 7-8. évfolyamosok számára

Kubatov Antal, Kaposvár

1. *Egy téglalap alakú zászló területe 2000 cm². A zászló ábrája egy „kereszt”, amelynek oldalai párhuzamosak a zászló oldalaival. A „vízszintes” csík területe 800 cm², a „függőlegesé” 500 cm². Mekkora a kereszt területe?*

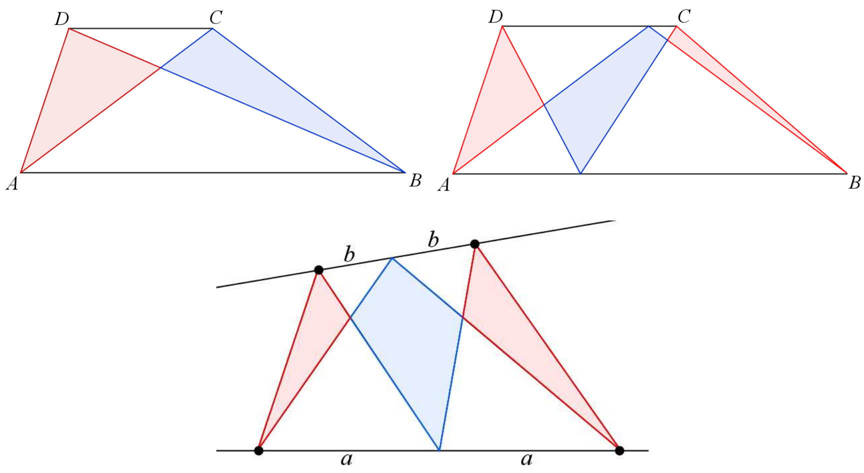
Megoldás:



$$aq = 800(cm^2)$$
$$pb = 500(cm^2) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; abpq = 800 \cdot 500$$
$$ab = 2000(cm^2)$$
$$2000\,pq = 800 \cdot 500$$
$$pq = 200$$

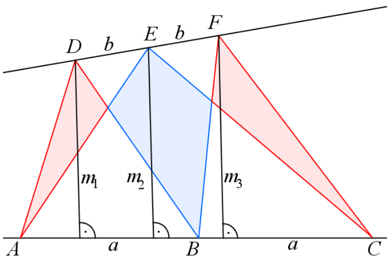
Így a kereszt területe: $800 + 500 - 200 = 1100(cm^2)$.

2. *Igazoljuk –a két utóbbi ábrán- ,hogy a négyszög területe egyenlő a háromszögek területeinek összegével.*



Megoldás:

A két „trapézos” triviális.



$$t_{ABC\Delta} = \frac{2a \cdot m_2}{2} = t_{sai} + t_{2üres}$$

$$t_{ABD\Delta} + t_{BCF\Delta} = \frac{am_1}{2} + \frac{am_3}{2} =$$

$$= a \cdot \frac{m_1 + m_3}{2} = t_{kar} + t_{2üres}$$

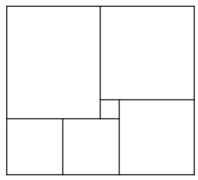
$\frac{m_1 + m_3}{2} = m_2$, mert trapéz körvonala

$$\Downarrow$$

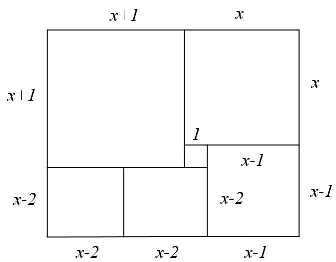
$$t_{ABC\Delta} = t_{ABD\Delta} + t_{BCF\Delta}$$

$t_{sat} = t_{kar}$

3. *Osszuk fel a téglalapot hat négyzetre az ábrán látható módon. Határozzuk meg a legnagyobb négyzet oldalhosszát, ha a legkisebbé egy egység.*

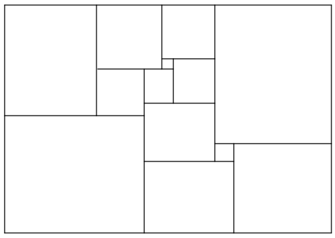


Megoldás:

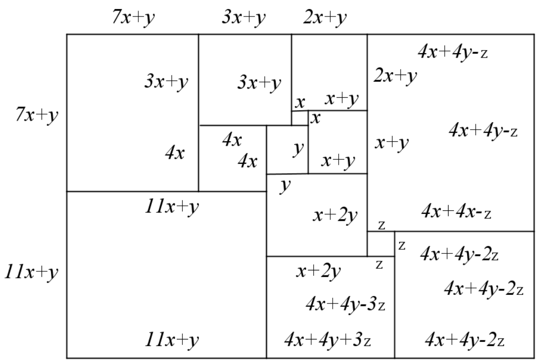


A legnagyobb négyzet oldalhossza 7 egység.

4. *Mekkorák lehetnek annak a lehető legkisebb téglalapnak az oldalai, amelyet az ábrán látható módon lehet egész oldalú négyzetekre felbontani?*



Megoldás:



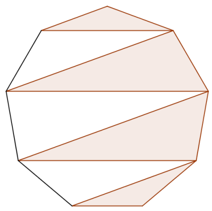
$$16x+7y-z=19x+9y-5z$$
$$18x+2y=8x+8y-3z$$

$$3x+2y=4z$$
$$10x-6y=-3z$$

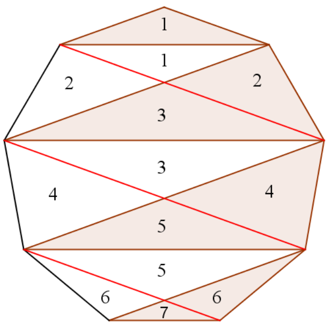
$$9x+6y=24y-40x$$
$$49x=18y$$
$$x=18\,,\ \ y=49\,,\ \ z=38$$

A téglalap oldalai: 422; 593.

5. *Egy szabályos kilencszöget hat átlónak az ábrán látható módon történő behúzásával felosztottunk háromszögekre. Melyik terület a nagyobb: a satírozott, vagy az üres?*



Megoldás:



Az azonos számmal jelzett területek nyilvánvalóan egyenlőek, következésképpen a satírozott terület nagyobb.

6. *Egy téglalapot felosztottunk 16 részre, majd néhányba beírtuk a kerületét. Ha mindegyik téglalapba beírjuk a kerületét, akkor mi lesz a 16 darab szám összege?*

83		42	
	61	57	
	71		80
			39

I. Megoldás:

	e	*f*	*g*	*h*
a	83		42	
b		61	57	
c		71		80
d	*x*			39

A keresett összeg:

$$8\left(a+b+c+d+e+f+g+h\right)=2\left(83+42+61+57+71+80+x+39\right)$$

Jelölje x a bal alsó mező kerületét, *a, b, c, d* illetve *e, f, g, h* az ábrán látható szakaszhosszak. Ekkor:

$$a+e=41{,}5 \quad a+g=21 \;*$$

A jelzettek összege egyenlő a nem jelzettek összegével:

$b+f=30{,}5 \;*$ $\qquad \dfrac{x}{2}+91{,}5=125$

$b+g=28{,}5$ $\quad x=67$

$c+f=35{,}5$ $\qquad$ Így a keresett összeg: 1000

$c+h=40 \;*$

$d+e=\dfrac{x}{2} \;*$

$d+h=19{,}5$

II. Megoldás:

83	46	42	55
98	61	57	70
108	71	67	80
67	30	26	39

Vegyük észre, hogy az azonos sorban illetve oszlopban lévő számok „ugyanannyival nagyobbak”, s ez alapján kitölthető a táblázat.

III. Megoldás:

a	b
c	d

Vegyük észre, hogy $a+d=b+c$, s ez alapján kitölthető a táblázat.

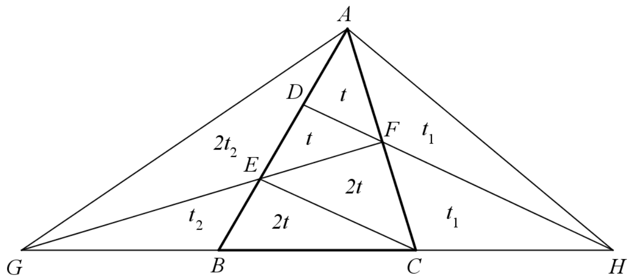
IV. Megoldás:

Ha úgy választunk ki négy mezőt, hogy minden sorból és minden oszlopból pontosan egy szerepeljen, akkor ezen számok összegének négyszerese megadja a keresett összeget.
Ez csak egyféleképpen tehető meg: $4(39+71+57+83)=1000$.

7. *Az egységnyi területű ABC háromszög AB oldalán a harmadolópontok legyenek D és E, az AC oldalán a felezőpont pedig F. A CB egyenest az FE egyenes G-ben, az FD egyenes H-ban metszi. Határozzuk meg az FGH háromszög területét.*

Megoldás:

Jelöljük az *ADF* háromszög területét *t*-vel. Az *AEF* háromszögben *FD*, az *AEC* háromszögben pedig *EF* súlyvonal. Ezért $t_{AEF}=2t_{ADF}=2t$ és $t_{AEC}=2t_{AEF}=4t$. Az *AEC* és az *EBC* háromszögek *C*-hez tartozó magassága közös, ezért területeik aránya megegyezik *AE* és *EB* arányával, ami 2. Tehát $t_{EBC}=\frac{1}{2}t_{AEC}=2t$. Ezért az *ABC* háromszög területe 6*t*, vagyis $t=\frac{1}{6}$.



Az *ACH* háromszögben *HF* súlyvonal, tehát $t_{AFH} = t_{FCH}$. Az *ABH* háromszögben *D* harmadolja az *AB* oldalt, ezért

$$2 \cdot t_{ADH} = t_{DBH} \text{, vagyis } 2 \cdot \left(\frac{1}{6} + t_{FCH} \right) = 5 \cdot \frac{1}{6} + t_{FCH} \text{,}$$

amiből kapjuk, hogy $t_{FCH} = \frac{1}{2}$. Az *E* is harmadolja az *AB* oldalt, ezért $2 \cdot t_{EGB} = t_{AGE}$, és mivel az *AGC* háromszögben *GF* súlyvonal, azért

$$t_{AGF} = t_{FGC} \text{, vagyis } 2 \cdot \frac{1}{6} + 2t_{EGB} = 4 \cdot \frac{1}{6} + t_{EGB} \text{,}$$

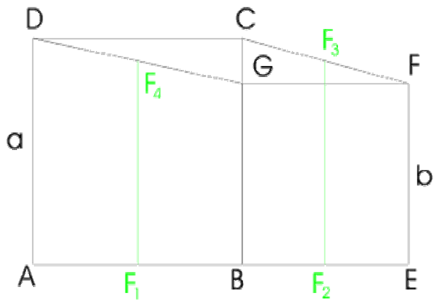
amiből kapjuk, hogy $t_{EGB} = \frac{1}{3}$.

Tehát a keresett terület $t_{FGH} = t_{EGB} + t_{EBCF} + t_{FCH} = \frac{1}{3} + \frac{4}{6} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

8. *Az a oldalú ABCD, és a b oldalú BEFG négyzeteket az ábrán látható módon rajzoltuk egymás mellé. Fejezzük ki a-val és b-vel az AB, BE, FC és DG szakaszok felezőpontjai által meghatározott négyszög területét.*

Megoldás:

F_1F_4 az *ABGD* trapéz középvonala, így párhuzamos *AD*-vel, és hossza $\frac{AD+BG}{2}=\frac{a+b}{2}$. F_2F_3 az *EFCB* trapéz középvonala, így párhuzamos *BC*-vel, hossza pedig $\frac{BC+EF}{2}=\frac{a+b}{2}$.



Mivel *AD*||*BC*, ezért $F_1F_2F_3F_4$ két szemben fekvő oldala, F_1F_4 és F_2F_3 párhuzamos és egyenlő, tehát ez a négyszög paralelogramma. Mivel oldalai merőlegesek egymásra $\left(F_1F_4 \parallel AD \perp AE\right)$, ezért téglalap.

$F_1F_2=F_1B+BF_2=a/2+b/2$, tehát $F_1F_2F_3F_4$ négyzet. Így területe: $T=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Felhasznált irodalom:

- Kömal
- Schultz János: Elemi matematikai versenyfeladatok
  ZALAMAT Alapítvány, Nagykanizsa,2011.