

Orosz Gyula  
Markov-láncok

**Bevezető**  
**A valószínűesszámítás témaköre**

A valószínűesszámítás témaköre korábban úgy szerepelt a középiskolás matematika-oktatásban, mint "nem hangsúlyozott anyag rész". Nem volt törzsanyag, ezért az országos középiskolai versenyeken és a főiskolai-egyetemi felvételi feladatok között is csak elvétve találtunk példákat ebből a témakörből. Ugyanakkor szakkörön vagy fakultáción a téma általában sikeresnek bizonyult: a tanulókat érdekelték az általános- és középiskolai alapfeladatokon túlmutató problémák.

Pozitív változást a kétszintű érettségi vizsga bevezetését megelőző időszak hozott. A formailag és tartalmilag megváltozott érettségi kapcsán módosultak a tantárgyi követelmények. Az új típusú vizsga előkészítő szakaszában, például a statisztika-tanítási koncepció keretében ismét kötelezően tanítottuk a témát, elsősorban mint a statisztika segédeszközét. A jelenlegi érettségi vizsgakövetelmények pedig - amelyek, remélhetőleg, jó néhány évig változatlanok maradnak - emelt szinten tartalmazzák

- a nagy számok törvényének szemléletes tartalmát;
- a geometriai valószínűség fogalmát;
- egyes eloszlások alkalmazását, várható értékét és szórását;
- a relatív gyakoriság becslését a sokaság paramétereinek ismeretében.

**A Markov-láncok**

Ebben a cikkben a valószínűesszámítás egy speciális területéről, a Markov-láncok témaköréből válogattunk feladatokat.

A Markov-láncok alkalmazását középiskolában általában nem tanítjuk. Ennek - a lecsökkent óraszámok miatti időhiány mellett - elsősorban az az oka, hogy a témakör mélyebb tárgyalásához szükség van például a feltételes valószínűség fogalmára vagy a lineáris algebra egyes tételeire. Azonban a téma elemi úton is tanítható; ekkor csupán a kombinatorika összeadási és szorzási szabályának ismeretére van szükség, amelyet alkalmazhatunk a klasszikus valószínűségekre is.

(Összeadási és szorzási szabály:

Ha egy bizonyos  $A$  objektumot  $m$ , egy másik független  $B$  objektumot  $n$ -féleképpen lehet kiválasztani, akkor az összeadási szabály azt jelenti, hogy a "vagy  $A$ , vagy  $B$ " kiválasztás  $m + n$  féleképpen történhet; a szorzási szabály pedig azt, hogy az  $(A, B)$  pár kiválasztása (" $A$  és  $B$ ")  $m \cdot n$ -féleképpen lehetséges.)

A diákok már a Markov-láncok minimális ismeretében is látványos eredményeket érhetnek el. Sokféle, korábban megoldhatatlannak tűnő, vagy megfelelő matematikai eszköz hiányában kezelhetetlen feladatra egyszerű, elegáns megoldást találhatnak.

Itt fontos egy módszertani megjegyzést tennünk. Általában nem érdemes egyszerre "nagyot markolni"; például nem szabad új elméleti anyagot úgy tárgyalnunk, hogy közben

párhuzamosan tanítjuk a tárgyaláshoz szükséges technikai apparátust is. Ekkor a feladat - és a diákjaink is - könnyen "elúsznak". Javasoltabb időben széthúzni, kisebb részekre bontani, többször előásni a problémát, vagyis a "kis (de jól megtervezett) lépések taktikáját" alkalmazni.

Egy konkrét példa későbből: a bolyongások tárgyalásához szükség lehet a másodrendű lineáris rekurziók megoldásának ismeretére. Teljesen reménytelen ugyanazon a tanítási órán a bolyongást modellezni, felállítani egy másodrendű rekurzív összefüggést, valamint ezt a rekurziót - melyet életében először lát a diák - általánosan megoldani. A tanár számára komoly módszertani feladat az előzményeket és az aktuális témát eredményesen összekapcsolni, ez pedig nyilván csak megfelelő felkészüléssel érhető el.

### **Mi ennek az írásnak a célja?**

Több célt tűztünk magunk elé.

Szeretnénk egyrészt a Markov-láncokkal kapcsolatos megoldási technikákat és módszereket minél szélesebb körben ismertté tenni. Gyakran élünk (tanárokhoz szóló) módszertani megjegyzésekkel, de úgy gondoljuk, hogy ez nem kizáró ok: a cikket bárki - tanuló, érdeklődő, egyéb olvasó - számára ajánljuk.

A következő fejezetek mindegyike egy-egy tipikus alkalmazásra mutat példát. A problémák egy részét a gyakorlati életből vettük; tárgyalásukban, feldolgozásuk módjában igyekszünk - amennyire csak lehetséges - elemi módszereket alkalmazni.

A Markov-láncok tipikus témaköreinek (sorsolások, érmedobálások, statisztikus golyójátékok, bolyongások) vizsgálatakor az volt a célunk, hogy a bevezető típusfeladatok részletes szakmai és módszertani feldolgozása után biztos alapot kapjon az Olvasó. Erre a vázra építve, az egyes fejezetek anyagának további bővítése már önállóan is elvégezhető.

(Nem törekedhettünk teljességre, még az egyes speciális témakörökön belül sem. Ennek a szakmai okokon túl olyan egyszerű technikai akadályai is vannak, mint például az időhiány, vagy a terjedelmi korlátok. Kit ne rettentene el egy bevezető jellegű írás, ha az több száz oldal hosszú?)

Végül a speciális fejezetek (számítógépes támogatás, paradoxonok, versenyfeladatok) reményeink szerint hangsúlyozzák, hogy érdemes volt az Olvasónak átrágnia magát a korábbi fejezetek anyagán; hiszen egy érdekes, széles körben és igen eredményesen alkalmazható módszerhez jutott.

## A feladatok feldolgozásának számítógépes támogatása

A következő fejezetekben a valószínűségszámítási problémák játékok elemzéseként jelennek meg.

A matematikai játékok rendszeres, órai alkalmazását rendkívül fontosnak tartjuk. Általában is igaz, hogy adott témakörön belül egyes feladatokat - ha lehetséges - érdemes egy- vagy többszemélyes játék "köntösébe csomagolva" tálalni. A diákok számára a játék mindig új kihívást jelent. A hagyományos feladat friss, játékos, újszerű megfogalmazása "környezetváltozással" jár; a diákjaink lényegesen lelkesebben, motiváltabban s gyakran eredményesebben teszik próbára képességeiket.

A cikkben szereplő játékok *számítógépes* játékokként is bevezethetők és elemezhetők. Feltétlenül érdemes a játékok némelyikét (talán többségét is) a hagyományos matematikai tanulmányozás mellett számítógépes szimulációként futtatni.

A véletlenszerű folyamatok szimulálására kiváló segédeszköz a számítógép. A diák egyik leghatékonyabb tanulási módja a játék; manapság pedig ebben a témakörben (valószínűségszámítási, statisztika kísérletek, szimulációk) a számítógép gyakorlatilag nem nélkülözhető. A diákok szeretnek a számítógéppel játszani, nem kell őket különösebben motiválni, hogy leüljenek a gép elé; ugyanakkor a játszva-tanulás sokkal érdekesebb, élményszerűbb, plasztikusabb (alkalmanként maradandóbb is) a hagyományos oktatásnál.

A játékok programjai viszonylag kis programozói rutinnal, házilag is elkészíthetők. (Általában a diákokra bízhatjuk a megírásukat; majdnem mindig találunk erre alkalmas tanulót az osztályban.) Egy-két fejezet végén megemlítünk néhány alkalmazási-feldolgozási lehetőséget. Ezek természetesen csak minták, hiszen az esetleges programok számtalan további variációja képzelhető el.

A 9. fejezetben a számítógéppel támogatott problémamegoldásra mutatunk néhány példát. Itt a feladatok javasolt feldolgozási módja a következő:

- gépi szimuláció (sok-sok játék futtatása);
- sejtések, becslések, a diákok tippjei (erre a részre mindenképpen szánjunk időt; rendkívül tanulságos tapasztalatok gyűjthetők);
- a játék matematikai modellezése;
- ahol szakmailag indokolt és lehetséges, a játék matematikai elemzése.

### Köszönetnyilvánítás:

Ennek a cikknek az alapjait elsősorban a diákokkal végzett közös szakköri feldolgozó munka jelenti. Merítettem a Módszertani Lapok - Matematika c. folyóiratban megjelent írásaim, valamint a 90-es évek elején a pécsi Vándorgyűlésen, továbbá a váci és balatonberényi előadásokon elhangzottakból is. Külön szeretnék köszönetet mondani

- Kőváry Károly matematika-tanáromnak, mindannyiunk által szeretett Kavicsnak, aki a témát középiskolás koromban megismertette velem;
- valamint Surányi László kollégámnak, akitől nagyon sokat tanultam.

## Tartalom

A továbbiakban a következő témaköröket vizsgáljuk:

1. Fogalmak (a Markov-láncok bevezetése)
2. Visszatevéses sorsolások
3. Érm dobálások
4. Statisztikus golyójátékok
5. Ferdefoci
6. A ferdefoci általános vizsgálata
7. Bolyongások
8. Vegyes feladatok
9. Számítástechnikai támogatás
10. Érdekeségek, paradoxonok
11. Feladatgyűjtemény

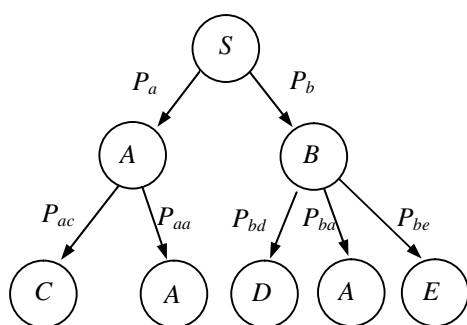
### Felhasznált és javasolt irodalom:

- [1] Bognárné - Nemetz - Tusnády: Ismerkedés a véletlennel (Tankönyvkiadó, 1980)
- [2] Erben P. - Orosz Gy.: Matematika és informatika I-III, KOMA, Fazekas M. OKS Alapítvány, 2004-2005.
- [3] Hraskó A. szerk.: Új matematikai mozaik, Typotex, 2002
- [4] Kemeny - Snell - Thompson: A modern matematika alapjai (Műszaki, 1971)
- [5] Közös nevezőnk a matematika, Kőszeg, 2001, Jakab Tamás cikke
- [6] Nemetz Tibor: Valószínűségszámítás (Tankönyvkiadó, 1986)
- [7] Nemetz - Wintsche: Valószínűségszámítás és statisztika mindenkinek (Polygon, 1999)
- [8] Szevasztyanov - Csisztyakov - Zubkov: Valószínűségelméleti feladatok (Tankönyvkiadó, 1987)
- [9] Székely J. Gábor: Paradoxonok a véletlen matematikájában (Műszaki, 1982)
- [10] Élet és Tudomány LIII. évfolyam 12-17. számok, Móri Tamás cikkei
- [11] A Fazekas Mihály Gimnázium honlapján található szakanyagok ([www.fazekas.hu](http://www.fazekas.hu))
- [12] Középiskolai Matematikai Lapok évfolyamai
- [13] Módszertani Lapok - Matematika évfolyamai
- [14] Orosz Gyula: Válogatás külföldi nemzeti matematikaversenyek feladataiból ([www.fazekas.hu](http://www.fazekas.hu))

## 1. Véges sztochasztikus (valószínűségi) folyamatok

A görög 'sztochosz' szó egyik jelentése 'sejtés'; így a fenti elrettentő cím valójában egyszerűen csak olyan kísérletsorozatokat (eseménysorozatokat) jelöl, amelyekben a kísérletek lehetséges kimenetelei véletlen tényezőktől függenek. A folyamat végessége úgy értendő, hogy a továbbiakban csak olyan eseményrendszereket vizsgálunk, amelyekben a kísérletek száma és az egyes kísérletek kimenetelei (az elemi események) egyaránt véges számúak. A folyamatok egészével kapcsolatos kijelentéseket teszünk, a célunk pedig az lesz, hogy ezen kijelentések valószínűségeit határozzuk meg. Például: egy pénzdarabot többször feldobva megkérdezhetjük, mi annak a valószínűsége, hogy a fejek és írások száma megegyezik; vagy hogy a dobások adott százalékában fej lett az eredmény és így tovább.

A folyamat egészéhez kell tehát egy valószínűségi mértéket hozzárendelnünk; nézzünk erre egy konkrét példát.



A fenti ábrán két kísérletből álló sorozat folyamatábrája látható.

Az összes kísérlet lehetséges kimenetelei  $\{A, B, C, D, E\}$ ; nem számítottuk ide az  $S$  kezdőhelyzetet. Az ábra alapján az első kísérlet eredménye vagy  $A$ , vagy  $B$  lehet.  $P_a$ -val jelöltük annak a valószínűségét, hogy az első kísérlet eredménye  $A$ ,  $P_b$ -vel pedig azt, hogy az első kísérlet eredménye  $B$ .

Nézzük most a második kísérletet! Ha az első kísérlet eredménye  $A$ , akkor a második kísérlet lehetőségeinek halmaza már csak  $\{C, A\}$ -ra szűkölt le. Az ábrán  $P_{ac}$ -vel jelöltük annak a valószínűségét, hogy a második kísérlet eredménye  $C$ , feltéve, hogy az első  $A$ . Ennek megfelelően értelmezzük a  $P_{aa}, P_{bd}, \dots, P_{be}$  valószínűségeket is.

Ha hangsúlyozni kívánjuk a kísérletsorozat folyamat-jellegét, akkor az  $S, A, B, \dots, E$  kimeneteleket nevezhetjük állapotoknak, a  $P_a, P_b, \dots, P_{be}$  értékeket átmeneti valószínűségekké, a folyamatábrát pedig átmenetdiagramnak.

A két kísérlet lehetséges kimenetelei az ábrán látható irányított fagráf  $S$ -ből induló egyes ágai, ezeken az ágakon definiáljuk a valószínűségi mértéket.

Mekkora valószínűséggel lesz a második kísérlet eredménye  $C$ ? Ez akkor következik be, ha az első kísérlet eredménye  $A$  (ennek  $P_a$  a valószínűsége), és a második kísérlet eredménye  $C$  (ennek  $P_{ac}$  a valószínűsége). Alkalmazhatjuk a valószínűségekre a szorzási szabályt, így a  $C$  kísérlet  $P(C) = P_a \cdot P_{ac}$  valószínűséggel következik be. Hasonlóan  $P(D) = P_b \cdot P_{bd}$ ,  $P(E) = P_b \cdot P_{be}$ . Végül a második kísérletre az  $A$  eredményt kétféleképpen kaphatjuk: vagy rendre  $A, A$  következik be (ennek valószínűsége  $P_a \cdot P_{aa}$ ), vagy  $B, A$  (ennek valószínűsége  $P_b \cdot P_{ba}$ ). Az összeadási szabály miatt  $P(A) = P_a \cdot P_{aa} + P_b \cdot P_{ba}$ .

Ezzel a módszerrel (amikor tehát az egyes ágakhoz tartozó valószínűségek szorzatával súlyozzuk az utakat) megállapíthatjuk a fa összes irányított útjához tartozó valószínűségeket.

Az egyes ágakhoz rendelt számok elemi eseményekhez rendelt valószínűségek, így a  $P_a, P_b, \dots, P_{be}$  rendelkeznek néhány *tulajdonsággal*:

- (1)  $P_a, P_b, \dots, P_{be}$  pozitívak;
- (2)  $P_a + P_b = 1$ ;
- (3)  $P_{ac} + P_{aa} = 1$ ;
- (4)  $P_{bd} + P_{ba} + P_{be} = 1$ .

(Megjegyezzük, hogy (1)-ben nem érdemes megengednünk a 0 értéket.

A 0 valószínűségű esemény nincs hatással a folyamat egészére, nem módosítja az egyes ágakon definiált valószínűségi mértéket; megállapodhatunk tehát abban, hogy ha valamelyik esemény 0 valószínűségű, akkor nem soroljuk fel a gráfban.)

A fenti alaptulajdonságokon kívül a sztochasztikus folyamatok témakörében általában nem teszünk fel egyéb megszorításokat. Például az egyes valószínűségek függhetnek az előző (vagy azokat megelőző) kísérletek eredményeitől, vagy akár az is lehetséges, hogy értékük nem független az időtől és így tovább. Hogy az egyes valószínűségeknek konkrétan milyen jellemzőik vannak, azt mindig az általunk alkalmazott modell, illetve annak pontossági igénye dönti el.

Például a legtöbb matematikai modellben ha feldobunk egy érmét, akkor közelítőleg 0,5 - 0,5 valószínűséggel kapunk fejet vagy írást. Ez az érték nyilván csak (jó) közelítés, hiszen szabályos érme nem létezik. „Fizikus szemmel nézve” a leeső érme az ütközés miatt deformálódik, így a fejek és írárok előfordulásának a valószínűsége minden dobás után megváltozik. Sőt, ha fejet vagy írást dobunk, akkor más-más a deformáció mértéke, így az újabb dobás esetén nemcsak az előző dobás *ténye* befolyásolja az eredményt, hanem az is, hogy mi volt az előző dobás *eredménye*. A sort folytathatnánk; de azért azt is megemlíthetjük, hogy „matematikus szemmel nézve” az elméleti 0,5 értéktől vett eltérés általában olyan csekély, hogy gyakorlatilag állandó értéknek vehető, s hasonlóan azt is feltehetjük, hogy minden egyes kísérlet független az előzőek eredményétől.

A továbbiakban olyan kísérletsorozatokat vizsgálunk, amelyekben az egyes kimenetek valószínűségei csak a közvetlenül előttük álló kísérletek eredményétől függenek. Ebben a modellben ha tudjuk, hogy az eseménysorozat milyen kezdőállapotból indul, és ismerjük az egyes állapotok lehetséges kimeneteleit, valamint az ezekhez tartozó átmeneti valószínűségeket, akkor kiszámíthatjuk az eseménysorozat fa-mértékét. Az ilyen eseménysorozatokat nevezzük Markov-láncoknak (A. A. Markov orosz matematikus, 1856 - 1922).

A fenti példa is egy  $\{A, B, C, D, E\}$  kimenetelű Markov-lánc. Az új fogalmat természetesen konkrét példákon, alkalmazásokon keresztül lehet igazán megérteni, úgyhogy a következő fejezet anyagának feldolgozása közben visszautalunk ezen fejezet elméleti tartalmára.

## 2. Sorsolások visszatevéssel

Néhány konkrét feladat segítségével vezetjük be a Markov-láncok fogalmát és a hozzájuk kapcsolódó megoldási módszereket, tipikus eljárásokat. Ahol lehet, több megoldást is adunk; így lehetőségünk nyílik ezek szakmai-módszertani összehasonlítására.

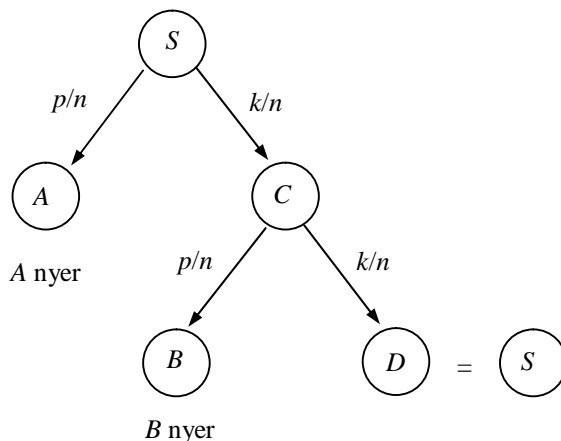
A következő **2.1. - 2.4.** játékokban ketten játszanak egymás ellen. A kezdő játékost jelöljük  $A$ -val, a másodikat  $B$ -vel.

**2.1. feladat:** Egy urnában  $k$  darab kék és  $p$  darab piros golyó van ( $k + p = n$ ). Ketten felváltva húznak véletlenszerűen egy-egy golyót úgy, hogy miután megnézték a golyó színét, visszateszik az urnába. Az a játékos győz, aki először húz piros golyót. Mekkora eséllyel nyer  $A$ , illetve  $B$ ?

**Első megoldás (mértani sor):** Jelentse  $P(i)$  az  $i$  esemény valószínűségét. Ekkor  $P(A$  nyer) és  $P(B$  nyer) a kérdés.

$P(A$  nyer) =  $P(A$  nyer vagy az első, vagy a harmadik, vagy az ötödik stb. lépésben (és közben  $B$  nem nyer)). Alkalmazhatjuk az összeadási és szorzási szabályt, ennek segítségével formailag a  $P(A$  nyer) =  $\frac{p}{n} + \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{p}{n} + \left(\frac{k}{n}\right)^4 \frac{p}{n} + \dots$  egyenletet kapjuk. A végtelen mértani sor összege  $P(A$  nyer) =  $\frac{n}{n+k}$ , tehát az  $A$  játékos  $\frac{n}{n+k}$  valószínűséggel nyer.

**Második megoldás (Markov-láncok):** Az előző fejezet alapján megadhatjuk a probléma folyamatábráját:



Hogyan kaptuk ezt az ábrát?

$S$  jelenti a startállapotot, amikor  $A$  húz. Az  $A$  játékos vagy piros golyót húz  $\frac{p}{n}$  valószínűséggel, amikor is eljutunk az ábrán  $A$ -val jelölt állapotba (ekkor  $A$  győzött), vagy kék golyót húz  $\frac{k}{n}$  valószínűséggel, ekkor jutunk a  $C$  állapotba. Innen folytatva megint két

eset lehetséges: vagy piros golyót húz  $B$  (ekkor a  $B$  állapotba jutunk, amikor is  $B$  győz), vagy kék golyót ( $D$  állapotba jutunk - a játék folytatódik).

Ezzel a gondolatmenettel a gráf végtelen hosszú lenne. Észrevehetjük azonban, hogy a játék szempontjából az  $S$  és a  $D$  állapot nem különbözik lényegesen egymástól: mindkettőben a kezdő  $A$  játékos következik húzásra  $D$ -ben úgy, "mintha eddig nem történt volna semmi a játékban". Alkalmazhatjuk tehát a  $D \equiv S$  egyszerűsítést (összevonást), amellyel a lánc végessé tehető.

Az ábrán feltüntettük az egyes ágakhoz rendelt átmeneti valószínűségeket. Ezek segítségével az előző fejezetben leírt módon meghatározhatjuk a fagraf egyes útjaihoz tartozó valószínűségeket.

Legyen  $s$  annak a valószínűsége, hogy  $A$  nyer az  $S$  állapotból, hasonlóan legyen  $P(A$  nyer  $C$ -ből)  $= c$ . Ekkor az ábra alapján felírható egyenletrendszer:

$$(1) \quad s = \frac{p}{n} \cdot 1 + \frac{k}{n} c,$$

$$(2) \quad c = \frac{p}{n} \cdot 0 + \frac{k}{n} s.$$

Az egyenletek az összeadási és szorzási szabály egyszerű alkalmazásai. (1) azt jelenti, hogy  $A$  az  $S$  állapotból

- vagy  $\frac{p}{n}$  valószínűséggel piros golyót húz, tehát rögtön (1 valószínűséggel) nyer,

- vagy  $\frac{k}{n}$  valószínűséggel kék golyót húz, és a továbbiakban  $c$  valószínűséggel nyer, a  $C$

állapotból folytatva a játékot.

Hasonlóan (2) matematikai tartalma: a  $B$  játékos a  $C$  állapotból

- vagy  $\frac{p}{n}$  valószínűséggel piros golyót húz, tehát rögtön veszít  $A$ ;

- vagy  $\frac{k}{n}$  valószínűséggel kék golyót húz, amikor is eljutunk a  $D$  állapotba, és a

továbbiakban  $s$  valószínűséggel nyer  $A$  a  $D \equiv S$  állapotból.

Az egyenletrendszer megoldása  $s = \frac{n}{n+k}$ . (Mellékeredmény:  $c = \frac{k}{n+k}$ .)

### Megjegyzések:

1. A kapott kifejezés nem szimmetrikus,  $k < n$  miatt  $s$  mindig nagyobb, mint 0,5; vagyis a kezdő játékosnak mindig előnyös ez a sorsolás.

2. A játékban a döntetlen valószínűsége  $\left(\frac{k}{n}\right)^N$ , ami nullához tart, ha  $N$  tart végtelenhez

(ez egyébként a cikkben tárgyalt legtöbb játékra igaz lesz). Így a kezdőállapotban  $B$

győzelmének a valószínűsége  $1 - P(A \text{ nyer}) = (1 - s) = \frac{k}{n+k}$ . Ez az érték természetesen

megegyezik az egyenletrendszer megoldásakor kapott  $P(C) = c$  értékkel, hiszen az  $S$  állapotban  $A$ , valamint a  $C$  állapotban  $B$  szerepe szimmetrikus. Ez utóbbi észrevétel segítségével egy harmadik típusmegoldást is adhatunk.



**3. Harmadik megoldás („logikai rekurzió”):** Mivel a döntetlen valószínűsége 0, ha az  $A$  játékos  $s$  valószínűséggel nyer a kiindulási állapotból, akkor innen a  $B$  játékos nyeresi esélye  $(1 - s)$ . Ekkor vagy  $\frac{p}{n}$  valószínűséggel  $A$  nyer, vagy  $\frac{k}{n}$  valószínűséggel olyan állapotba kerül a játék, amelyet úgy tekinthetünk, mintha  $B$  lenne a kezdő egy most induló játékban. Tehát innen már  $B$  nyer  $s$  valószínűséggel,  $A$  nyeresi esélye pedig ekkor  $(1 - s)$ . Az ez alapján felírható egyenlet  $s = \frac{p}{n} + \frac{k}{n}(1 - s)$ , ennek megoldása  $s = \frac{n}{n+k}$ .

Ezt a módszert – amelyet házi használatra „logikai rekurzió” neveztünk el – a későbbiekben is alkalmazni fogjuk. Lényege, hogy valamely változóra önmagával hivatkozunk. A fenti egyenletben a hivatkozás közvetlenül történt; később esetleg előfordulhat, hogy a hivatkozás több lépés mélységű lesz.

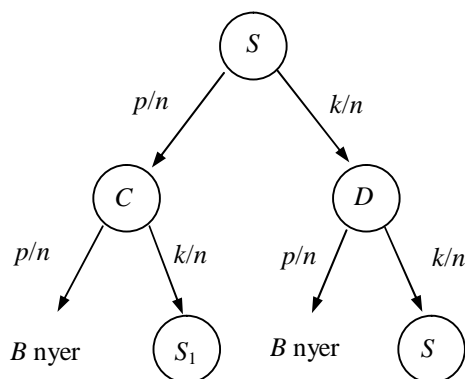
**4.** Például a  $k = p = 1$  ( $n = 2$ ) választással az érmedobálási modellt kapjuk. Vagyis ha két játékos felváltva egy szabályos pénzérmét dobál,  $s$  az győz, akinek először sikerül fejét dobnia, akkor az első játékos  $\frac{n}{n+k} = \frac{2}{3}$ , a második játékos pedig  $\frac{1}{3}$  valószínűséggel nyer.

**2.2. feladat:** Két játékos felváltva dob fel egy dobókockát. Az a játékos győz, aki először tud hatost dobni. Mekkora valószínűséggel nyernek az egyes játékosok?

**Megoldás:** A  $p = 1$ ,  $k = 5$  ( $n = 6$ ) választással a **2.1.** feladat speciális esetét kapjuk, tehát  $s = \frac{6}{11}$  valószínűséggel győz  $A$ ,  $\frac{5}{11}$  valószínűséggel pedig  $B$ .

**2.3. feladat:** A **2.1.** játékot annyiban módosítjuk, hogy az  $A$  játékos győzelméhez a piros golyót kétszer kell kihúznia, míg  $B$ -nek továbbra is elég egy piros húzás a győzelemhez. Mekkora eséllyel nyer most  $A$ , illetve  $B$ ?

**Megoldás:** Készítsük el a játék folyamatábráját!



Most is sikerül egyszerűsítéseket végeznünk, fel tudjuk használni a **2.1.** feladat eredményét.

A startállapotból  $\frac{p}{n}$  valószínűséggel a  $C$  állapotba jutunk (ekkor  $A$  már húzott egy piros golyót). Innen vagy győz  $B$   $\frac{p}{n}$  valószínűséggel, vagy  $\frac{k}{n}$  valószínűséggel az  $S_1$  állapotba jut a játék, ami megegyezik a **2.1.** játék kezdőállapotával; ugyanis ekkor  $A$  vagy  $B$  közül az a játékos győz, aki előbb húz piros golyót.

Ha a startállapotból  $\frac{k}{n}$  valószínűséggel kék golyót húz  $A$ , akkor a  $D$  állapotba jutunk. Innen vagy győz  $B$ , vagy - kék golyó húzása esetén - minden kezdődik előlről, az  $S$  kezdőállapotba kerül a játék.

Jelöljük  $s$ -sel az  $A$  játékos győzelmének a valószínűségét. A **2.1.** feladat jelöléseit és eredményét felhasználva a felírható egyenletrendszer:

$$(1) \quad s = \frac{p}{n}c + \frac{k}{n}d,$$

$$(2) \quad c = \frac{k}{n}s_1,$$

$$(3) \quad d = \frac{k}{n}s,$$

$$(4) \quad s_1 = \frac{n}{n+k}.$$

Az egyenletrendszer megoldása  $s = \frac{nk}{(n+k)^2}$ , ekkora valószínűséggel győz a kezdő játékos.

A következő feladatban a folyamatok egy másik jellemzőjét, az átlagos hosszukat határozzuk meg.

**2.4. feladat:** Átlagosan hány húzásig tart a **2.1.** játék?

**Első megoldási lehetőség:** A húzások számának várható értéke a kérdés.

A játék  $\frac{p}{n}$  valószínűséggel 1 lépésben véget ér a piros golyó húzásával.

2 lépés hosszú akkor lehet a játék, ha előbb egy kék, majd egy piros golyót húzunk; ennek a valószínűsége  $\frac{k}{n} \cdot \frac{p}{n}$ .

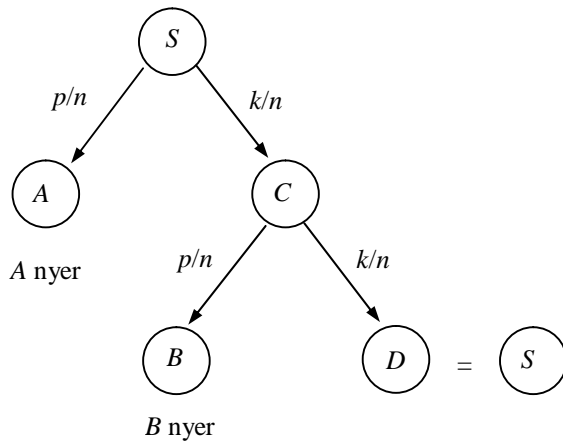
3 lépés hosszú a játék, ha 2 kék és 1 piros golyó húzása történik, ennek a valószínűsége  $\left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{p}{n}$ .

Általában a játék  $N$  lépésben ér véget, ha  $(N-1)$  kék és 1 piros golyó húzása történik, s ennek a valószínűsége  $\left(\frac{k}{n}\right)^{N-1} \cdot \frac{p}{n}$ . A várható érték kiszámolása ezek után úgy történhet, hogy az egyes valószínűségeket szorozzuk a hozzájuk tartozó húzásszámokkal, s az így kapott

tagokat összegezzük. A definíciót alkalmazva az átlagos  $L$  húzásszám kiszámításához tehát

az  $L = \frac{p}{n} \cdot 1 + \frac{p}{n} \cdot \frac{k}{n} \cdot 2 + \frac{p}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot 3 + \dots$  sor összegét kellene meghatározni.

**Második megoldás:** A Markov-láncok segítségével elkerüljük a várható érték fogalmát. A játék folyamatábrája alapján egyenletrendszer írhatunk fel a játék befejezésig szükséges húzások átlagos számára.



Jelentse  $L_i$  a befejezésig szükséges húzások átlagos számát, ha a játék az  $i$  állapotban van. Ekkor felírható az alábbi egyenletrendszer:

$$(1) \quad L_S = \frac{p}{n} \cdot 1 + \frac{k}{n} (1 + L_C),$$

$$(2) \quad L_C = \frac{p}{n} \cdot 1 + \frac{k}{n} (1 + L_S).$$

Az (1) egyenlet úgy értelmezhető, hogy a kezdőállapotból kiindulva a befejezésig szükséges húzások átlagos számát a következő módon kaphatjuk meg: vagy  $\frac{p}{n}$

valószínűséggel húzunk összesen egy golyót, vagy  $\frac{k}{n}$  valószínűséggel a  $C$  állapotba kerülünk; vagyis egyet húzunk, plusz még annyi húzás történik, amennyit a  $C$  állapotból átlagosan végzünk a továbbiakban a játék folyamán (ezt jelöltük  $L_C$ -vel).

A (2) egyenlet értelmezése: a  $C$  állapotból kiindulva a befejezésig szükséges húzások átlagos száma vagy  $\frac{p}{n}$  valószínűséggel összesen egy golyó; vagy  $\frac{k}{n}$  valószínűséggel egyet húzunk, plusz még annyi húzás történik, amennyit a továbbiakban az  $S$  állapotból átlagosan végzünk (ezt jelöltük  $L_S$ -sel).

Az (1) egyenlet átalakítás után formailag az  $L_S = 1 + \frac{k}{n} \cdot L_C$  alakba is írható, jelentése ekkor hasonlóan értelmezhető: a kezdőállapotból mindig húzunk 1-et, valamint  $\frac{k}{n}$

valószínűséggel még annyi további húzás történik, amennyi átlagosan a  $C$  állapotból szükséges a játék végéig. (Hasonlóan alakítható át (2) is.)

Az egyenletrendszer megoldása  $L_S = \frac{n}{p}$ , átlagosan ennyi húzást végzünk egy játék alatt.

**Megjegyzések:**

1. Érdemes tudatosítani, hogy megkaptuk az első megoldás végtelen sorának összegét.  
 2. Az érmedobálási modellben ( $k = p = 1, n = 2$ ) az átlagos dobásszám 2; a dobókocka-modellben ( $k = 5, p = 1, n = 6$ ) az átlagos dobásszám 6.

3. Határozzuk meg  $L_C$ -t: az  $\frac{n}{p} = 1 + \frac{k}{n} \cdot L_C$  egyenletből  $L_C = \frac{n}{p}$ , vagyis  $L_C = L_S$ . Hát

persze: a  $C$  állapot az átlagos lépésszám tekintetében egyenértékű  $S$ -sel, hiszen a játék „nem tudja”, hogy az  $A$  vagy a  $B$  játékos következik soron.

4. **Harmadik megoldás („logikai rekurzió”)**: Ha a megoldás első lépéseként felismerjük az  $L_C = L_S$  kapcsolatot, közvetlen összefüggést írhatunk fel az  $L$  átlagos

lépésszáma:  $L = 1 + \frac{k}{n} \cdot L$ .

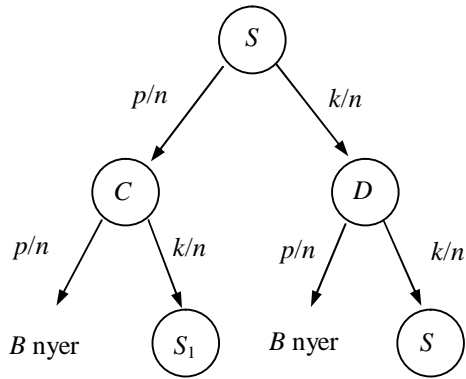
Láthatjuk, hogy nemcsak a valószínűségekre (2.1. 3. megjegyzés), hanem a lépésszámokra is felírhatunk olyan egyenletet, amelyben a változóra önmagával hivatkozunk.

5. Ha a diákok nem találkoztak még a várható érték fogalmával, problémát jelenthet számukra, hogy az összeadási és szorzási szabályt valószínűségekre mondtuk ki, ezekben az egyenletekben pedig a lépésszámok (tehát más “dimenziójú” mennyiségek) szerepelnek. Itt tulajdonképpen a véletlen számok azon tulajdonságát használjuk fel, hogy összegük várható értéke megegyezik a várható értékeik összegével. Tapasztalataink szerint ez a nehéz gondolat szemléletesen világos a diákok számára; a mély tétel bizonyítása megtalálható például a [6] tankönyvben.

6. A további feladatok megoldása során igyekszünk elkerülni a várható érték fogalmát, illetve a várható érték definíció szerinti kiszámolását; s erre hatékonyan alkalmazhatjuk a fenti „trükköt”, az egyenletrendszer módszerét. Mivel tehát ezt a módszert a későbbiekben is gyakran használjuk, fontos, hogy a diákok valóban megértsék, s ne csak automatikusan alkalmazzák.

**2.5. feladat:** Átlagosan hány húzásig tart a 2.3. játék?

**Megoldás:** Az előző feladat megoldásához hasonlóan a folyamatábra alapján felírjuk a lépésszámokra (a húzások számára) vonatkozó egyenletrendszert.



Jelentse  $L_i$  a befejezésig szükséges húzások átlagos számát, ha a játék az  $i$  állapotban van (továbbá  $L_1$  jelenti az  $S_1$  állapotból szükséges húzások számát). Ekkor:

$$(1) \quad L_S = \frac{p}{n} \cdot (1 + L_C) + \frac{k}{n} (1 + L_D),$$

$$(2) \quad L_C = \frac{p}{n} \cdot 1 + \frac{k}{n} (1 + L_1),$$

$$(3) \quad L_D = \frac{p}{n} \cdot 1 + \frac{k}{n} (1 + L_S).$$

Az egyenletek rendezett alakja:

$$(1) \quad L_S = 1 + \frac{p}{n} L_C + \frac{k}{n} L_D,$$

$$(2) \quad L_C = 1 + \frac{k}{n} L_1,$$

$$(3) \quad L_D = 1 + \frac{k}{n} L_S.$$

Felhasználhatjuk az előző feladat megoldása alapján, hogy  $L_1 = \frac{n}{p}$ .

(2)-ből  $L_C = \frac{n}{p}$  ( $= L_1$ ) adódik. Így van: ha már történt egy piros húzás ( $C$  állapot), akkor a továbbiakban az a játékos nyer, aki először húz piros golyót; s ehhez átlagosan  $L_1$  húzásra van szükség.

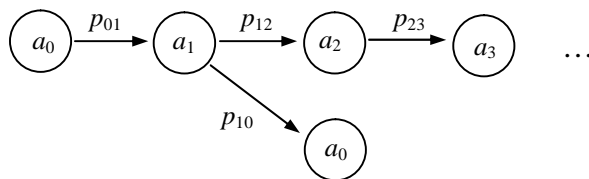
(1)-ből és (3)-ból  $L_S = \frac{n}{p} \cdot \frac{2n+k}{n+k} = L_1 \cdot \left(1 + \frac{n}{n+k}\right)$  Innen látható, hogy a lépésszám nagyobb, mint  $L_1$ .

A konkrét  $p = 1, k = 1$  ( $n = 2$ ) értékekkel (érmedobálás)  $L_S = \frac{10}{3} \approx 3,33$ ; a dobókockának megfelelő  $p = 1, k = 5$  ( $n = 6$ ) értékekkel  $L_S = \frac{102}{11} \approx 9,27$ .

### A Markov-láncok módszere (összefoglalás)

Tekintsünk egy sztochasztikus folyamatot, melyben a kísérletek lehetséges kimeneteleit, az egyes állapotokat  $a_0, a_1, a_2, \dots$  módon jelöljük. Ha a folyamat diszkrét időben változik, az  $a_i$  állapotok száma véges, és az egyes állapotok bekövetkezésének a valószínűségei csak a közvetlenül előttük álló állapotoktól függenek, akkor a folyamatot Markov-láncnak nevezzük.

Tegyük fel, hogy az  $a_0$  állapotból  $p_{01}$  valószínűséggel az  $a_1$  állapotba, innen  $p_{12}$  valószínűséggel az  $a_2$  vagy  $p_{10}$  valószínűséggel vissza az  $a_0$  állapotba jutunk, az  $a_2$  állapotból  $p_{23}$  valószínűséggel az  $a_3$  állapotba stb. A folyamatot átmenetdiagrammal ábrázolhatjuk:



Ha most ismerjük az  $a_0$  kezdőállapotot és a  $p_{ij}$  átmeneti valószínűségeket, akkor az összes további  $a_i$  esemény valószínűsége meghatározható, sőt a folyamat átlagos hosszáról is információkat kaphatunk. (Elképzelhető, hogy a folyamat, a vizsgált kísérletsorozat végtelen hosszú. Mivel azonban csak véges sok állapotot engedünk meg, maga a lánc mindig végessé tehető.)

#### A megoldási technikák:

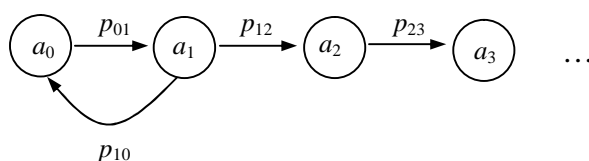
A Markov-láncok segítségével bizonyos típusú feladatok megoldása egyszerűen tárgyalható. Összefoglaljuk a megoldás lépéseit:

- megrajzoljuk az eseménysorozathoz tartozó folyamatábrát;
- az eseményrendszer ekvivalens állapotait összevonjuk;
- elkészítjük az egyszerűsített folyamatábrát;
- az átmeneti valószínűségek segítségével egyenletrendszert állítunk fel (ezekben az  $a_i$  események bekövetkezésének a valószínűsége, illetve a folyamat befejezéséhez szükséges átlagos lépésszámok szerepelnek);
- az egyenletrendszer megoldása adja meg az egyes állapotok valószínűségét vagy a folyamat átlagos hosszát.

(Az egyenletrendszerek alkalmazása mellett dolgozhatunk rekurzív sorozatokkal vagy mátrixokkal is, mint később látni fogjuk.)

Az átmeneti valószínűségek megadása többféleképpen történhet.

Az eddig használt (irányított) fagráf mellett alkalmazhatjuk az alábbi folyamatábra-típust is:



Ekkor úgy ábrázolhatjuk a folyamatot, hogy  $a_1$ -ből a  $p_{10}$  valószínűséghez tartozó élt egyszerűen visszanyilazzuk  $a_0$ -ba. Ekkor nem fagrafot kapunk, de a korábbihoz hasonló módon határozhatjuk meg az egyes utakhoz tartozó valószínűségeket.

Az átmeneti valószínűségeket megadhatjuk egy mátrix segítségével is. Például három

állapot esetén a mátrix  $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$  alakú. Itt az  $i$ . sor  $j$ . eleme,  $p_{ij}$  jelenti annak a

valószínűségét, hogy az  $i$ . állapotból a  $j$ . állapotba kerül a folyamat. A **2.1.** feladat diagramjának például az alábbi mátrix felel meg:

	<b>S</b>	<b>A</b>	<b>C</b>	<b>B</b>
<b>S</b>	0	$p/n$	$k/n$	0
<b>A</b>	0	0	0	0
<b>C</b>	$k/n$	0	0	$p/n$
<b>B</b>	0	0	0	0

A mátrix-reprezentáció alkalmazásával, erősebb matematikai segédeszközöket igénybe véve, természetesen komolyabb eredményeket is elérhetünk (lásd például a [4] szakirodalomban).

**2.6. feladat:** Végezzük el a **2.1.** játék általános vizsgálatát (kétszemélyes visszatevéses sorsolás állandó  $P$  valószínűséggel).

Az alábbi táblázat konkrét értékekre mutatja a **2.1.**, **2.4.** feladatok eredményeit.

Az első két sorban a piros és kék golyók számát, a harmadikban ezek összegét tüntettük fel. A negyedik sorban  $P$ -vel jelöltük annak a valószínűségét, hogy piros golyót húzunk  $\left(P = \frac{p}{n}\right)$ ; az ötödik sorban  $A$  nyerési esélye, a hatodikban pedig az átlagos lépésszám található.

<b>p</b>	1	1	1	1	1	1	1
<b>k</b>	1	2	3	4	5	9	99
<b>n</b>	2	3	4	5	6	10	100
<b>P</b>	0,5	0,333333	0,25	0,2	0,166667	0,1	0,01
<b>P(A nyer)</b>	0,666667	0,6	0,571429	0,555556	0,545455	0,526316	0,502513
<b>L</b>	2	3	4	5	6	10	100

A játékban valójában a piros és kék golyók szerepe csak annyi, hogy segítségükkel adjuk meg a játékra jellemző  $P = \frac{p}{n}$  valószínűséget. Ezzel a jellemzővel kifejezve a kezdő játékos  $s$  nyerési esélyére az  $s = P + (1 - P)(1 - s)$  rekurziót írhatjuk fel, melynek megoldása  $s = \frac{1}{2 - P}$  (s amely természetesen összhangban van a korábban kapott  $s = \frac{n}{n + k}$  értékkel).

Alkalmazzunk hasonló rekurziót az  $L_S$  átlagos lépésszámmra is:  $L_S = 1 + (1 - P)L_S$ , innen  $L_S = \frac{1}{P}$ . (A kapott lépésszám megegyezik a korábban kapott  $\frac{n}{P}$  eredménnyel.)

**Megjegyzés:** Általában is megmutatható, hogy ha egy esemény lépésenként  $0 < P$  valószínűséggel következik be, akkor

a) 1 valószínűséggel véges sok lépésben következik be;

b) és első bekövetkezéséhez átlagosan  $\frac{1}{P}$  számú kísérletre van szükség. (Ez éppen a  $P$  paraméterű geometriai eloszlás várható értéke.)

Ugyanis a komplementer valószínűségekre a  $Q = 1 - P$  jelölést használva

a) annak a valószínűsége, hogy  $n$  számú kísérlet alatt nem következik be az esemény,  $Q^n$ , s ez tetszőlegesen kicsi lesz  $n$  növekedtével;

b) a kísérletek várható száma pedig (a végtelen mértani sor összegképletét felhasználva)  $P + 2QP + 3Q^2P + \dots = P(1 + Q + Q^2 + \dots) + (Q + Q^2 + Q^3 + \dots) + (Q^2 + Q^3 + Q^4 + \dots) + \dots$   
 $= P\left(\frac{1}{1-Q} + \frac{Q}{1-Q} + \frac{Q^2}{1-Q} + \dots\right) = \frac{P}{1-Q}(1 + Q + Q^2 + \dots) = \frac{P}{1-Q}(1 + Q + Q^2 + \dots) = \frac{P}{1-Q^2} = \frac{1}{P}$ .

**2.7. feladat:** Végezzük el a 2.3. és 2.5. játék általános vizsgálatát (kétszemélyes visszatevéses sorsolás állandó  $P$  valószínűséggel; a kezdőnek kétszer kell piros golyót húznia).

A jellemző  $P = \frac{P}{n}$  valószínűség segítségével átalakítjuk az  $s = \frac{nk}{(n+k)^2}$  eredményt.

$$\frac{n+k}{n} = 1 + (1-P) = 2-P; \quad \frac{n+k}{k} = 1 + \frac{1}{1-P} = \frac{2-P}{1-P}; \quad \text{így}$$

$$P(\text{A nyer}) = s = P(\text{A nyer}) = s = \frac{1}{2-P} \cdot \frac{1-P}{2-P} = \frac{1-P}{(2-P)^2}.$$

Az átlagos húzásszámra  $L_s = L_1 \cdot \left(1 + \frac{n}{n+k}\right) = \frac{1}{P} \left(1 + \frac{1}{2-P}\right) = \frac{3-P}{P(2-P)}$ .

Az alábbi táblázatban néhány konkrét esetet tüntettünk fel.

$p$	1	1	1	1	1	1	1	2	3	2	3	9
$k$	1	2	3	4	5	9	3	4	1	1	1	1
$n$	2	3	4	5	6	10	5	7	3	4	4	10
$P$	0,500	0,333	0,250	0,200	0,167	0,100	0,400	0,429	0,667	0,750	0,900	
$A \text{ nyer}$	0,222	0,240	0,245	0,247	0,248	0,249	0,234	0,231	0,188	0,160	0,083	
$L$	3,333	4,800	6,286	7,778	9,273	15,263	4,063	3,818	2,625	2,400	2,121	

**Megjegyzés:** Az  $A$  nyerési esélyét megadó  $s = s(P)$  függvény deriváltja

$$s'(P) = \frac{-(2-P)^2 + (1-P) \cdot 2 \cdot (2-P)}{(2-P)^4} = \frac{P(P-2)}{(2-P)^4}.$$



A függvény szigorúan monoton csökkenő a  $]0; 1[$  intervallumon, határértéke  $s(0) = 0,25$ ,  $s(1) = 0$ . Tehát  $A$  nyerési esélye a  $P = 0$  értékhez közeledve a legnagyobb; számára az a szerencsés, ha a piros golyók számához képest minél több a kék golyó.

Az átlagos lépésszámokat megadó  $L = L(P) = \frac{3-P}{P(2-P)}$  függvény deriváltja

$$L'(P) = \frac{3-P}{P(2-P)} \cdot \frac{-P(2-P) + (P-3)(-2P+2)}{P^2(2-P)^2} = \frac{-P^2 + 6P - 6}{P^2(2-P)^2} = \frac{-(P-3)^2 + 3}{P^2(2-P)^2} < 0, \text{ ha } P \in$$

$]0; 1[$ . A függvény szigorúan monoton csökkenő, határértéke  $P = 0$ -ban  $+\infty$ , a  $P = 1$  helyen pedig  $L = 2$ . Tehát a játék annál tovább tart, minél nagyobb a kék golyók aránya a piros golyókhoz képest.

**2.8. (kitűzött) feladat:** Megvizsgálhatjuk a probléma következő módosításait, illetve általánosításait (ezekre a későbbiekben még visszatérünk):

**a)** Módosíthatjuk a nyerési valószínűségeket. Például  $A$  nyer  $p$ ,  $B$  nyer  $q = 1 - p$  valószínűséggel húzásonként.

**b)** Adott golyóeloszlás esetén az  $A$  játékosnak  $x$ -szer, a  $B$  játékosnak  $(x + k)$ -szor kell kihúznia a piros golyót, hogy nyerjen.

**c)** Ha adott  $x$  és  $k$ , akkor közelítőleg milyen golyóeloszlás esetén lesz igazságos a játék?

**d)** További általánosítási lehetőség, ha  $r$  valószínűséggel „nem történik semmi”: ekkor  $p + q + r = 1$ .

**e)** Az eredeti játékokat és a fenti általánosításukat kettőnél több személy is játszhatja.

A **számítógépes támogatást** akkor érdemes igénybe venni, ha a feladat modellezése vagy matematikai tárgyalása túlságosan nehéznek bizonyulna. A fenti általánosítások megoldásai például nem tartalmazznak elvi újdonságot, csak a paraméterek növekedése miatt bonyolultabbak lesznek az állapotdiagramok, és a belőlük következő egyenletrendszerek.

### 3. Érmédobálások

Az alábbiakban egyszerű kétszemélyes érmédobálós játékokat vizsgálunk meg. A játékosok a játék elején kiválasztanak (tippelnek) egy-egy dobássorozatot, majd egy szabályos érmét dobálnak fel. A dobások eredményét sorban lejegyzik, például fej, fej, írás, ... A játéknak akkor van vége, ha előáll valamelyik, a játékosok által választott dobássorozat. A játék nyertese az a játékos, akinek a tippje sikeres volt.

A továbbiakban a fej dobásokat F, az írás dobásokat I betűvel jelöljük.

#### Könnyen eldönthető játékok

A témakör elején feltétlenül érdemes néhány könnyen eldönthető játékot megvizsgálni; ezekben nincs szükség a Markov-láncokkal kapcsolatban eddig alkalmazott megoldási technikákra. Az alábbiakban csak példákat mutatunk ezekre az egyszerű esetekre.

##### 1 hosszú sorozatok esetén:

Ha az  $A$  játékos például az F, a  $B$  pedig az I sorozatot választja, akkor a játék nem túl izgalmas: biztosan véget ér 1 lépésben, valamelyik játékos győzelmével. A játék igazságos: mindkét játékos  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel nyer.

##### 2 hosszú sorozatok esetén:

Ha az  $A$  játékos tippje az FF, a  $B$  tippje pedig az FI sorozat, akkor egy játék lefolyása lehet például az IIFF, illetve IFI sorozat. (Az első játékot  $A$  nyerte a 4. lépésben; a másodikat  $B$  a 3. lépésben.)

Könnyen látható, hogy ez a játék is igazságos. Ha ugyanis kezdetben néhány I-t dobunk, akkor tulajdonképpen „nem történt semmi”, olyan, mintha csak ezután kezdődne a játék. Ha pedig a kezdeti I dobások után bármikor F dobás történik, akkor a következő dobás után a játék véget ér, FF vagy FI befejezéssel; s a győzelemre mindkét játékosnak egyenlő esélye van.

(A 3.4. feladatban áttekintjük azokat a játékokat, amelyekben  $A$  és  $B$  kettő hosszúságú (különböző) célsorozatot választ.)

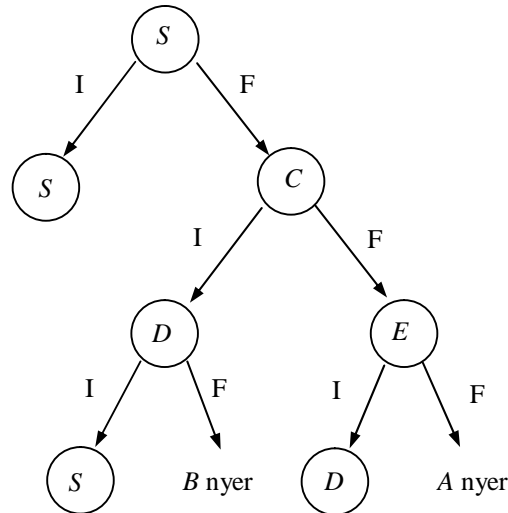
**3 hosszú sorozatok esetén** is könnyen adhatunk példát igazságos játékokra. Nyilván ilyen lehet az  $A$ : FFF,  $B$ : FFI; vagy az  $A$ : FFF,  $B$ : III játék.

Érdemes olyan 2 vagy 3 hosszú játékot is elemezni, amely nem igazságos, s amely könnyen (egyszerű megfontolásokkal) igazolható. A továbbiakban is találhatók ilyen feladatok (3.3., 3.4.), bár a céljaink szerint nehezebb (eszközigényesebb) játékokat vizsgálunk meg

**3.1. feladat (KöMaL P.209.):** Két játékos egy szabályos érmét többször feldob egymás után úgy, hogy mindig csak a legutolsó három dobás eredményét veszik figyelembe. Az  $A$  játékos akkor győz, ha az utolsó három dobás FFF volt,  $B$  pedig akkor, ha az utolsó három dobás FIF volt. Melyik félnek kedvező a játék?

(Például az FIFFFF játékot  $A$  nyerte a 6. lépésben; az IIIFFIF játékot pedig  $B$  a 7. lépésben.)

**Megoldás:** A játék kiértékelésekor a lehetséges nyolc állapot közül egyesek összevonhatók, mint az alábbi átmenetdiagram mutatja:



Hogyan keletkezett ez a folyamatábra?

Tekintsük például az IF állapotot, vagyis amikor már egy I és egy F dobás történt. Ha a következő dobás F, a játék szempontjából a kapott IFF sorozatnak csak az utolsó két tagja vehető figyelembe; ekkor kapjuk az FF állapotot (az ábrán *E*-vel jelöltük). Ugyanígy az IFI sorozat megfelel az FI állapotnak (az ábrán *D*); vagyis az IF állapot ekvivalens az F állapottal (az ábrán *C*).

Induljunk ki tehát a kezdő *S* állapotból. Ha az első dobás írás, akkor a játék szempontjából semmi sem történt: a dobásból sem *A*-nak, sem *B*-nek nincs haszna, kezdődik minden előről (*S* állapot). Ha az első dobás fej, a második dobás kétféle lehet, így eljutunk a *D*, illetve *E* állapotokba.

Ezután észrevehetjük, hogy az FII állapot megegyezik az *S* kezdőállapottal, valamint az FI és FFI állapotok is ekvivalensek (*D*). Ezzel a gondolatmenettel sikerült a nyolc lehetséges állapot számát négyre redukálnunk. A kezdőállapottal együtt négy ismeretlenünk van, szükségünk van tehát négy egyenletre.

Az érme szabályos, így az állapotok közötti átmeneti valószínűségek értéke  $\frac{1}{2}$ . Ahogy a korábbi játékokban, most is jelöljük rendre *s*, *c*, *d*, *e*-vel annak a valószínűségét, amellyel az *A* játékos nyer az *S*, *C*, *D*, *E* állapotokból indulva. A folyamatábra alapján felírható egyenletrendszer:

$$(1) \quad s = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}s,$$

$$(2) \quad c = \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}d,$$

$$(3) \quad e = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}d,$$

$$(4) \quad d = \frac{1}{2}s.$$

Az egyenletrendszer megoldása  $s = \frac{2}{5}$ , tehát az  $A$  játékos  $\frac{2}{5}$  valószínűséggel nyer. A

további értékek:  $c = \frac{2}{5}$ ,  $d = \frac{1}{5}$ ,  $e = \frac{3}{5}$ .

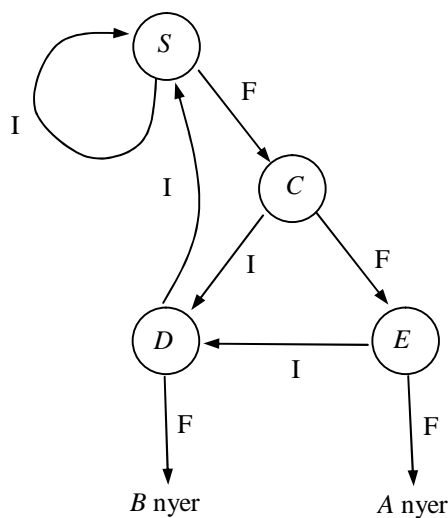
### Megjegyzések:

1. Most is igaz, és a későbbi érmedobálós feladatokban is teljesül, hogy a játék 1 valószínűséggel véget ér. A döntetlen 0 valószínűségű, így ebben a játékban a  $B$  játékos

$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$  valószínűséggel nyer.

2. A folyamatábra nem szimmetrikus, számolás nélkül is észrevehetjük, hogy a játék  $B$ -nek előnyös. Az (1) egyenletből rögtön adódik  $s = c$ . A folyamatábrán ez úgy látszik, hogy a baloldali  $S$  ág önmagára vezet vissza, a játék szempontjából semleges szerepű, tehát a "tényleges játék" a  $C$  állapotban kezdődik.  $B$  nagyobb nyerési esélye pedig abból következik, hogy a  $C$  állapot négy kimenetele közül egyben-egyben  $A$  és  $B$  nyer, a harmadik ág a semleges  $S$ -re vezet, a negyedik viszont (és itt jön  $B$  előnye) egy olyan  $D$  állapotra, ahonnan vagy rögtön nyerni tud  $B$ , vagy az  $S$  állapotba jut a játék.

3. Talán a szimmetria megbontása jobban látható, ha a folyamatábrát fagráf helyett körrel adjuk meg.



Látható, hogy akkor kapnánk szimmetrikus ábrát (akkor lenne igazságos a játék), ha a  $D \rightarrow S$  átmenet helyett a  $D \rightarrow E$  átmenet szerepelne.

**4.** Mi a későbbiek folyamán általában a fa-diagramot alkalmazzuk. Elképzelhető - mint ebben az esetben is -, hogy a kör-diagram alkalmazása célravezetőbb; tehát a megoldás tervezésénél ezzel a lehetőséggel (módszerrel) is érdemes számolni.

**3.** A  $d = \frac{1}{5}$ ,  $e = \frac{3}{5}$  értékek mutatják, hogy az FI dobások után igen nehezen tud győzni az A játékos, viszont az FF dobások után már neki előnyös a játék.

**3.2. feladat:** Átlagosan hány dobásig tart a **3.1.** játék?

**Megoldás:** Jelöljük  $L_s$ -sel azt az átlagos dobásszámot, ameddig tart még a játék az  $S$  állapotból kiindulva. (Hasonló a jelentése az  $L_c$ ,  $L_d$ ,  $L_e$  változóknak is.) Az előző fejezet játékaikhoz hasonlóan itt is felírhatjuk a lépésszámokra (dobásszámokra) vonatkozó egyenletrendszer:

$$(1) \quad L_s = 1 + \frac{1}{2}L_c + \frac{1}{2}L_s,$$

$$(2) \quad L_c = 1 + \frac{1}{2}L_e + \frac{1}{2}L_d,$$

$$(3) \quad L_e = 1 + \frac{1}{2}L_d,$$

$$(4) \quad L_d = 1 + \frac{1}{2}L_s.$$

(Itt például az első egyenlet azt jelenti, hogy az  $S$  állapotból indulva egyet dobunk a játékosok, aminek eredményeképpen  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel vagy a  $C$ , vagy az  $S$  állapotba jutunk.

Ezekből az állapotokból halad tovább a dobás után a játék, s az ehhez szükséges átlagos dobásszámot éppen  $L_s$ -sel, illetve  $L_c$ -vel jelöltük.)

Az egyenletrendszer megoldása  $L_s = \frac{34}{5}$ , tehát egy játék átlagosan 6,8 dobásig tart.

**Megjegyzés:** A fenti két feladatban alkalmazott megoldási technikával az összes hasonló játék tárgyalható (például tetszőleges hosszú és tetszőleges tartalmú sorozatokat választhatunk).

**3.3. feladat:** Két játékos egy szabályos érmét többször feldob egymás után úgy, hogy mindig csak a legutolsó három dobás eredményét veszik figyelembe. Az A játékos akkor győz, ha az utolsó három dobás FFF volt. A B játékos szabadon választhat egy saját, három dobás hosszú célsorozatot; B akkor győz, ha az utolsó három dobás az általa választott célsorozattal egyezik meg. Hogyan érdemes B-nek választania?

**Megoldás:** Vegyük észre, hogy ha B az IFF sorozatot választja, akkor csak úgy győzhet A, ha az első három dobás FFF. Ugyanis ha a játék folyamán bármikor egy I-t dobunk a játékosok, akkor további FF után B győz, egyébként egy újabb I dobás után az előző I

dobással ekvivalens állapotot kapunk. A három kezdeti FFF dobás valószínűsége  $\frac{1}{8}$ , vagyis  $B$  nyeresi esélye  $\frac{7}{8}$ , ha az IFF sorozatot választja.

A három hosszú érmedobás-sorozat folyamatábrájának harmadik szintje legfeljebb nyolc állapotot különböztet meg, melyekből egy biztosan  $A$  győzelmét jelenti.  $B$  legfeljebb hét állapot elérésekor győzhet, ezért  $B$  nyeresi esélye legfeljebb  $\frac{7}{8}$ , vagyis a megadott IFF sorozat optimális.

### Néhány szó a szimmetriáról

A fenti játékokat tekintve világos, hogy az FFF, illetve III sorozatok szimmetrikus szerepűek: ha ezeket választja  $A$  és  $B$ , akkor mindketten  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel nyernek, a játék igazságos. Hasonlót állíthatunk az FFF, illetve FFI sorozatokról is: itt két egymás utáni fej dobásra mindkét játékosnak szüksége van, azután pedig mindketten  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel nyernek. Az előző 3.3. feladatban láttuk, hogy FFF és IFF - ebben az értelemben - nem szimmetrikusak. Kérdés, hogy vajon vannak-e más karakterű szimmetrikus sorozatok is?

**3.4. feladat:** Elemezzük a szimmetria szempontjából azokat a játékokat, amelyekben  $A$  és  $B$  kettő hosszúságú (különböző) célsorozatot választ! Kinek melyik játék az előnyös?

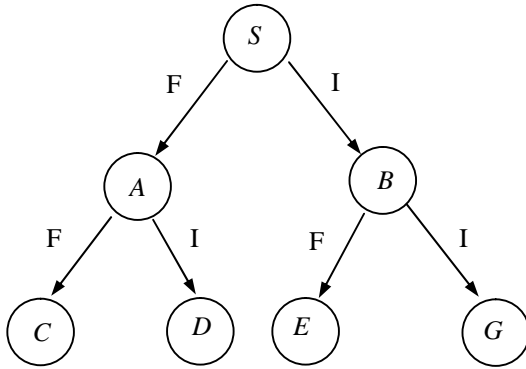
**Megoldás:** A 12 lehetőség közül az  $A$  és  $B$  játékos szimmetrikus szerepe miatt csak 6-ot kell megvizsgáljunk (legyenek ezek az alábbi táblázat jobb felső háromszögének elemei). Igazságos az FF – II, FF – FI, IF – II játék.

	FF	FI	IF	II
FF	–	1:1		1:1
FI	1:1	–		
IF			–	1:1
II	1:1		1:1	–

A további három játék vizsgálata:

**1.** Az  $A: FF - B: IF$  játékban könnyen látható, hogy FF csak az első két dobás folyamán jöhet ki (ha bármikor I-t dobunk, már  $B$  nyer). Vagyis az alábbi ábra  $C, D, E, G$  állapotai közül három esetben nyer  $B$ ; a győzelmi valószínűségek aránya  $A : B = 1 : 3$ . (Akár a táblázatban, itt is  $A$  és  $B$  egymáshoz viszonyított győzelmi esélyét jelöltük. Ez alapján tehát

$$P(A \text{ nyer}) = \frac{1}{4}, P(B \text{ nyer}) = \frac{3}{4} .)$$



2. Az  $A: FI - B: IF$  játékot szimmetrikusnak érezzük, s valóban: fej dobás után már csak  $A$ , írás kezdés után pedig már csak  $B$  nyerhet. ( $D$ -ben  $A$ ,  $E$ -ben  $B$  nyer; de  $C$  és  $A$ , valamint  $B$  és  $G$  ekvivalens állapotok. Az  $FI$  és  $IF$  sorozatok egyike sem lehet kitüntetett a másikkal szemben, a lehetséges átbetűzés miatt.)

3. Végül az  $A: FI - B: II$  játék tulajdonképpen megegyezik az elsőnek tárgyalt  $A: FF - B: IF$  játékkal, a játékosok fordított szereposztásával és a fej-írás cserével. Tehát  $A : B = 3 : 1$ .

Ez alapján a 2 hosszú fej-írás sorozatok nyeresi esélytáblázata az alábbi:

	FF	FI	IF	II
FF	–	1:1	1:3	1:1
FI	1:1	–	1:1	3:1
IF	3:1	1:1	–	1:1
II	1:1	1:3	1:1	–

**Megjegyzés:** Érdekes, hogy ebben a feladatban a „szimmetria” szót három értelemben is használtuk. Szimmetrikus lehetett az  $A$  és  $B$  játékosok játékbeli szerepe; szimmetria állt fenn az érme írás és fej oldala között; végül a célsorozatok szimmetriáját vizsgáltuk, ami az igazságossággal, az esélyek egyenlőségével volt kapcsolatban.

**3.5. feladat (problémafelvetés):** Bebizonyítjuk, hogy a 2 hosszú célsorozatok közül bármely két sorozat „szimmetrikus”; abban az értelemben, hogy bármelyiket is választja  $A$  és  $B$ , a játék igazságos lesz.

**Bizonyítás (hibás):** A szimetriaviszonyok miatt elég az  $FF$  és  $IF$  sorozatokat összehasonlítani. Az  $FF - II$  játék nyilván igazságos; az  $II - IF$  játék is a fentiek miatt; ebből pedig  $FF - IF$  igazságossága már adódik.

A táblázatból látjuk, hogy ez nem így van. Hol lehet a hiba a bizonyításban?

**Megoldás:** Csak azzal lehet a baj, hogy az igazságosság mint reláció nem tranzitív; s ezt a táblázat értékei megerősítik. (Tehát  $FF - II$  igazságos játék;  $II - IF$  szintén; de ebből nem következik, hogy  $FF - IF$  is az.)

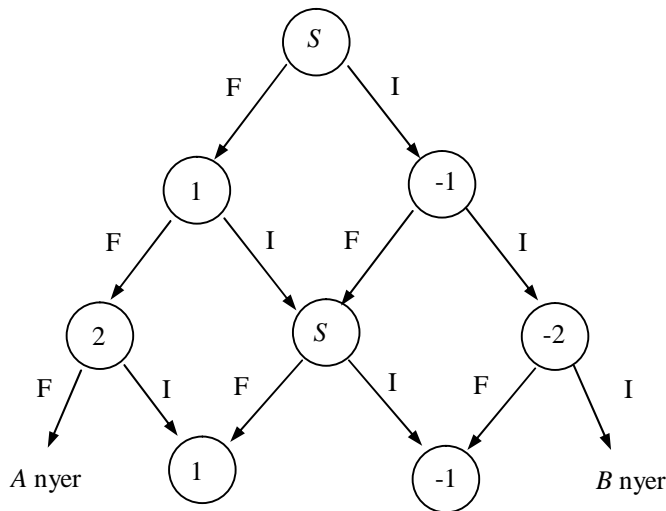
**Megjegyzés:** Ugyanezzel az eljárással a 2-nél hosszabb célsorozatok szimmetriája is „bizonyítható”; hasonló problémákkal bőségesen találkozunk a **10.** fejezetben.

**További feladatok**

**3.6. feladat:** Két játékos egy szabályos érmét többször feldob egymás után. Az  $A$  játékos akkor győz, ha a fejek száma hárommal több lesz, mint az írások száma; míg  $B$  akkor győz, ha az írások száma lesz hárommal több, mint a fejek száma.

Elemezzük a játékot! Mekkora valószínűséggel győz  $A$  és  $B$  a játék különböző állapotaiban? Mennyi ezekben az állapotokban a játék befejezéséig szükséges dobások átlagos száma?

**Megoldás:** Jelölje az  $i$ . állapot azt a helyzetet, amikor a fejek és írások különbsége  $i$ ;  $p_i$  annak a valószínűségét, amellyel  $A$  nyer az  $i$ . állapotból,  $L_i$  pedig azt a dobásszámot, ameddig átlagosan tart a játék az  $i$ . állapotból indulva. (Ekkor a 0. állapot a kezdőállapot.) A játék folyamatábrája:



A folyamatábra szimmetriája is mutatja, hogy  $p_S = p_0 = \frac{1}{2}$  (szabályos érme). Ezt felhasználva, a többi valószínűség meghatározásához felírjuk a valószínűségi egyenleteket:

$$(1) \quad p_1 = \frac{1}{2} p_2 + \frac{1}{2} p_0,$$

$$(2) \quad p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p_1.$$

Ennek megoldása  $p_1 = \frac{2}{3}$  és  $p_2 = \frac{5}{6}$ .  $p_1 = \frac{2}{3}$  például azt jelenti, hogy ha a dobott fejek száma eggyel nagyobb, mint az írások száma, akkor ebből az állapotból az  $A$  játékos  $\frac{2}{3}$  valószínűséggel nyer. Meg lehet mutatni, hogy a játék előbb-utóbb véget ér (pontosabban 1



valószínűséggel; lásd **8.4.** feladat), tehát a játékban nem lehet döntetlen. Így szimmetriások miatt  $p_{-1} = 1 - p_1 = \frac{1}{3}$  és  $p_{-2} = 1 - p_2 = \frac{1}{6}$ .

A játék szimmetriája miatt a lépésszámokra teljesül, hogy  $L_i = L_{-i}$ , ezért a „hagyományos módon” kapjuk az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} (1) \quad L_0 &= 1 + L_1, \\ (2) \quad L_1 &= 1 + \frac{1}{2}L_0 + \frac{1}{2}L_2, \\ (3) \quad L_2 &= 1 + \frac{1}{2}L_1. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása  $L_2 = 5$ ,  $L_1 = 8$ ,  $L_0 = 9$ , s ezért  $L_{-2} = 5$ ,  $L_{-1} = 8$ .

**Megjegyzés:** Vizsgáljuk meg a játék általános esetét!

A játéknak legyen akkor vége, ha a fejek és írások számának különbsége  $h$ . Ekkor általában is megmutatható (lásd **6.3.** feladat), hogy  $L_0 = h^2$ , vagyis átlagosan  $h^2$ -szer kell egy szabályos érmét feldobnunk ahhoz, hogy a fejek és írások eltérése (először)  $h$  legyen. Ugyanakkor a feladat egyfajta duálisa is bizonyítható (ezt most nem tesszük meg): eszerint ha egy szabályos érmét  $h^2$ -szer feldobunk, a fejek és írások számának átlagos eltérése arányos lesz  $h$ -val.

Érdeemes elgondolkodni azon, hogy ez az eredmény mit is jelent azzal kapcsolatban, amit úgy szoktunk nevezni, hogy „a véletlen számok kiegyenlítődési hajlama” (lásd **10.1.** feladat).

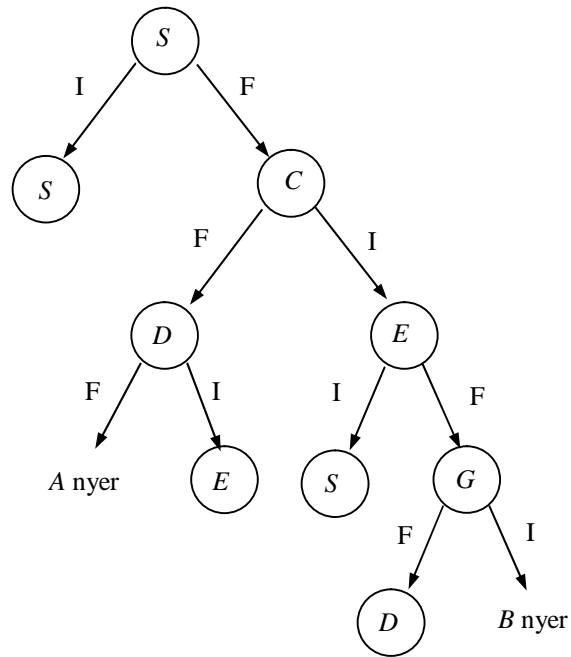
**3.7. feladat:** Két játékos felváltva dobál fel egy szabályos pénzérmét. Az a játékos győz, aki először dob fejet. Vizsgáljuk meg a játékot!

Észrevehető, hogy a **2.1.** problémával analóg feladatot kaptunk a  $p = k = 1$ ,  $n = 2$  paraméterekkel. Az ott adott megoldás alapján a kezdő játékos nyerési esélye  $\frac{n}{n+k} = \frac{2}{3}$ , a dobások várható száma pedig  $\frac{n}{p} = 2$ . A második játékos természetesen  $\frac{1}{3}$  valószínűséggel győz.

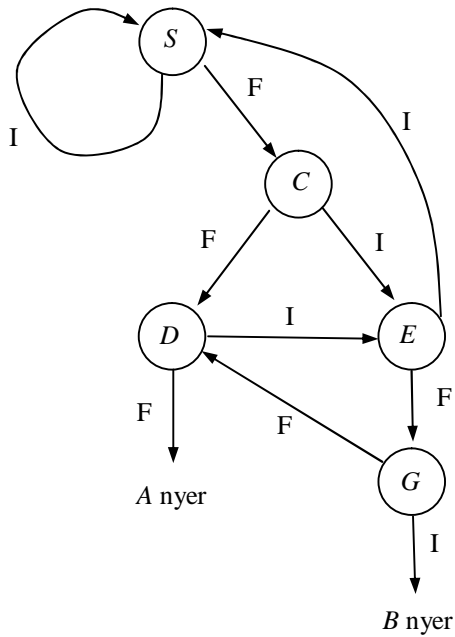
**3.8. feladat:** A **3.1.** feladatban az  $A$  játékos FFF sorozatával szemben nagyobb eséllyel nyert a  $B$  játékos FIF sorozata, a nyerési arány  $A : B = 2 : 3$  volt. Módosítsunk  $B$  sorozatán úgy, hogy nehezebb dolga legyen; például  $B$  akkor nyerjen, ha a FIFI sorozat jön ki eredményül.

- Mennyivel lett igazságosabb a játék?
- Határozzuk meg, átlagosan hány dobásig tart a játék!
- Határozzuk meg, átlagosan hány dobásból kapjuk meg külön-külön az FFF, illetve FIFI sorozatokat!

**Megoldás:** A játék folyamatábrája:



Ugyanezt a folyamatábrát megadjuk gráfelméleti körrel is:



a) Az egyes állapotok a következő dobássorozatokkal ekvivalensek:  $C = F$ ,  $D = FF$ ,  $E = FI$ ,  $G = FIF$ . Jelentse  $s, c, d, e, g$  rendre  $A$  győzelmének a valószínűségét az  $S, C, D, E, G$  állapotokból; ekkor az ábra alapján felírható egyenletrendszer a következő:

$$(1) \quad s = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}s,$$

$$(2) \quad c = \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e,$$

$$(3) \quad d = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e,$$

$$(4) \quad e = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}g,$$

$$(5) \quad g = \frac{1}{2}d.$$

Az egyenletrendszer megoldása  $(s, c, d, e, g) = \left(\frac{5}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$  Tehát a módosítás után sem kaptunk igazságos játékot, ez a játék már A-nak előnyös. A nyerési valószínűségek aránya  $A : B = 5 : 3$ .

**b)** A lépésszámokra felírható egyenletrendszer:

$$(1) \quad L_s = 1 + \frac{1}{2}L_c + \frac{1}{2}L_s,$$

$$(2) \quad L_c = 1 + \frac{1}{2}L_d + \frac{1}{2}L_e,$$

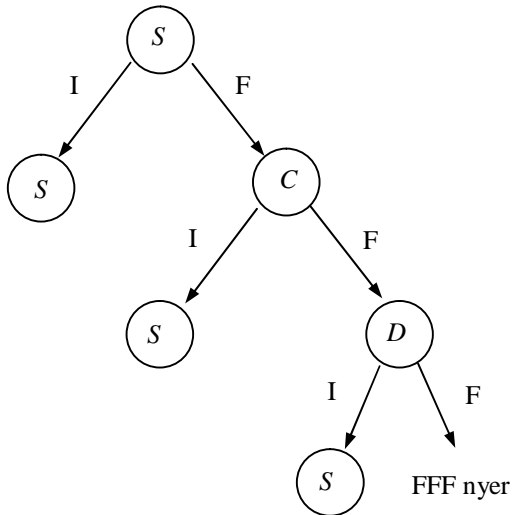
$$(3) \quad L_d = 1 + \frac{1}{2}L_e,$$

$$(4) \quad L_e = 1 + \frac{1}{2}L_s + \frac{1}{2}L_g,$$

$$(5) \quad L_g = 1 + \frac{1}{2}L_d.$$

Az egyenletrendszer megoldása  $(L_s, L_c, L_d, L_e, L_g) = \left(\frac{35}{4}, \frac{27}{4}, \frac{9}{2}, 7, \frac{13}{4}\right)$  Tehát a dobások átlagos száma  $L_s = \frac{35}{4} = 8,75$ .

**c)** Az FFF célsorozat esetén a folyamatábra és az egyenletrendszer:



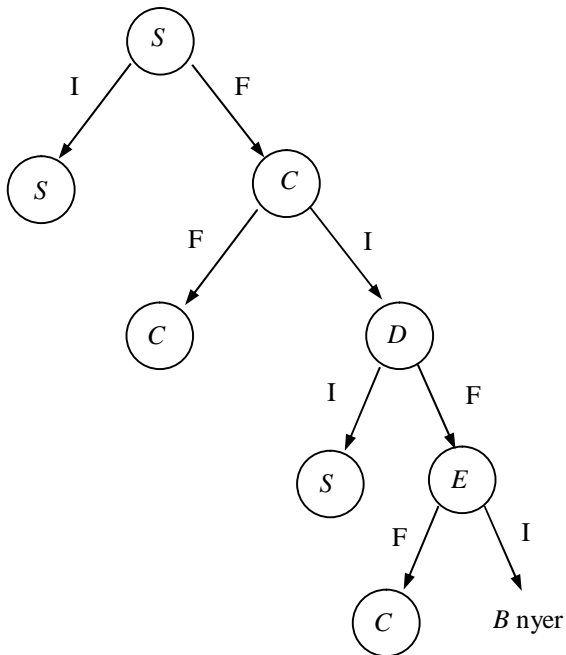
$$(1) \quad L_s = 1 + \frac{1}{2}L_c + \frac{1}{2}L_s,$$

$$(2) \quad L_c = 1 + \frac{1}{2}L_s + \frac{1}{2}L_d,$$

$$(3) \quad L_d = 1 + \frac{1}{2}L_s.$$

Az egyenletrendszer megoldása  $(L_s, L_c, L_d) = (14, 12, 8)$ .

Az FIFO célsorozat esetén a folyamatábra és az egyenletrendszer:



$$(1) \quad L_s = 1 + \frac{1}{2}L_c + \frac{1}{2}L_s,$$

$$(2) \quad L_c = 1 + \frac{1}{2}L_c + \frac{1}{2}L_d,$$

$$(3) \quad L_d = 1 + \frac{1}{2}L_s + \frac{1}{2}L_e,$$

$$(4) \quad L_e = 1 + \frac{1}{2}L_c.$$

Az egyenletrendszer megoldása  $(L_s, L_c, L_d, L_e) = (20, 18, 16, 10)$ .

Tehát külön-külön az  $A$  sorozatnak átlagosan 14, a  $B$ -nek 20 dobásra van szüksége; ha pedig a két sorozat együtt vesz részt a játékban, az átlagos dobásszám 8,75.

**3.9. (kitűzött) feladat (KöMaL B.3849.)** Egy szabályos érmét addig dobálunk, amíg legalább egyszer kapunk fejet is és írást is. Mennyi a dobások számának várható értéke?

**3.10. (kitűzött) feladat:** Egy érmét hajigálunk. Várhatóan hányszor kell feldobni, hogy **a)** FF, illetve **b)** FI jöjjön ki egymás után? (Ez két különböző feladat.)

**3.11. (kitűzött) feladat:** Egy érmét addig dobálunk, amíg három egymás utáni dobásban FIF vagy IIF nem adódik.

**a)** Mennyi a valószínűsége annak, hogy FIF adódik előbb?

**b)** Határozzuk meg, átlagosan hány dobásig tart a játék!

**c)** Határozzuk meg, átlagosan hány dobásból kapjuk meg külön-külön az FIF, illetve az IIF sorozatokat!

**3.12. (kitűzött) feladat:** Módosítsuk az előző sorozatokat úgy, hogy egy F dobással mindkettőt megtoldjuk. Tehát: egy érmét addig dobálunk, amíg három egymás utáni dobásban FIFF vagy IIFF nem adódik. Mennyiben változtak meg az egyes nyerési valószínűségek?

**a)** Mennyi a valószínűsége annak, hogy FIFF adódik előbb?

**b)** Határozzuk meg, átlagosan hány dobásig tart a játék!

**c)** Határozzuk meg, átlagosan hány dobásból áll elő külön-külön az FIFF, illetve az IIFF sorozat!

**3.13. (kitűzött) feladat:** Három játékos egy szabályos érmét többször feldob egymás után úgy, hogy mindig csak a legutolsó három dobás eredményét veszik figyelembe. Az  $A$  játékos akkor győz, ha az utolsó három dobás FIF volt;  $B$  akkor, ha az utolsó három dobás FII; végül  $C$  akkor, ha az utolsó három dobás FFI volt. Mekkora eséllyel nyernek az egyes játékosok? Átlagosan hány dobásig tart a játék?

### Érmedobálások számítógépes támogatással

Több, a feladathoz hasonló számítógépes játék is elképzelhető.

Nézzünk néhány példát, amikor a játékos ellenfele a számítógép (de a játékokat tanulók is játszhatják egymással):

**1.** Először a játékos választ egy három hosszúságú érmedobás-sorozatot, majd a gép választ véletlenszerűen egy három hosszúságú sorozatot.

**2.** Először a gép választ véletlenszerűen egy három hosszúságú érmedobás-sorozatot, majd a gép sorozata ismeretében a játékos választ egy három hosszúságú sorozatot.

**3.** Az előző feladatokat játszhatjuk eltérő hosszúságú sorozatokkal is.

A fenti feladatokban a kérdés mindig az, hogy hogyan érdemes sorozatot választani.

**4.** Először a játékos választ egy három hosszúságú érmedobás-sorozatot, majd a gép választ optimális stratégiával egy három hosszúságú sorozatot.

Ha a játék bizonyos tétre megy, akkor a kérdés az is lehet, hogy milyen stratégiával minimalizálható a veszteség; vagy esetleg nem egyenlő „beugróval” történik a játék.

**5.** A fenti játékokat játszhatja kettőnél több játékos is.

**6.** És természetesen az **1 - 5.** játékokban mindig tippelhet arra minden néző (mint kívülálló, egymással versengő játékos), hogy ki győz, és hogy hány lépésig tart a játék.

Az ilyen típusú játékok viszonylag könnyen programozhatók (talán az osztályban is van olyan gyerek, aki szívesen ír egy egyszerű játzó programot). Érdemes a könnyebb változatokat megmutatni a diákoknak, s hagyni őket játszani, gyakorolni, tapasztalatot szerezni. A nehezebb játékok (például **4.**) önmagukban is érdekes kérdéseket vetnek fel; ezekre a cikk későbbi részeiben megpróbálunk majd válaszolni.

#### 4. Statisztikus golyójátékok

Egy urnában kezdetben különböző színű golyók vannak. Ezek közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, és a követett stratégiától függően kiveszünk vagy beteszünk újabb golyókat az urnába. Ezt a lépést addig folytatjuk, míg a golyók darabszáma, színösszetétele vagy egyéb jellemzője el nem ér egy előre rögzített értéket. A „statisztikus golyójátékok” elnevezést olyan golyómodellek esetén használjuk, amikor az urnában lévő golyók összetétele előírt szabály szerint változik, a húzás tartalmától függően; de a golyók húzása véletlenszerűen történik. A játékokban a golyók eloszlásával kapcsolatos valószínűségi kérdéseket vizsgálunk, például az egyes célállapotok elérésének a valószínűségét, az ide vezető folyamat átlagos hosszát stb.

A 2. fejezetben (visszatevéses sorsolási modell) a golyók színmegoszlása a játék alatt változatlan volt, s így állandó valószínűséggel húztunk azonos színű golyókat. A most következő golyójátékokban - a különböző színű golyók számának változása miatt - ez a valószínűség nem állandó, a golyók aktuális számával lesz arányos. Ez alapján a statisztikus golyójátékokat az állandó valószínűségű golyójátékok általánosításának is tekinthetjük.

#### A golyójátékok osztályozása

A fejezet játékaiban a kihúzott golyók színétől függő szabály szerint változtatjuk az urnában lévő golyók színét vagy számát. A játékokat több szempontból osztályozhatjuk.

Osztályozási szempont lehet:

a) A *kezdeti színek száma*. Ez lehet 2, 3 vagy több (állapodjunk meg abban, hogy ezeket az eseteket a 2, 3, 4, 5, ... kódokkal szimbolizáljuk).

b) A *kihúzott golyók száma*. Ez lehet 1, 2 vagy több (kódok: 1, 2, 3, ...).

c) A *játék folyamán a golyók számának változása*. Ez lehet *állandó* (cserélünk vagy ugyanannyi golyót teszünk vissza, mint amennyit kivettünk), lehet *csökkenő* (kihúzzunk vagy kevesebbet teszünk vissza) és lehet *növekvő*. A változási módokhoz rendelt kódok: a csökkenő, állandó, növekvő esetben rendre  $-1$ ,  $0$ ,  $+1$ .

A [színek száma, húzott golyók száma, golyószám változása] számhármassal a játékok egy-egy osztályát jellemezhetjük. Például a 2.1. feladat  $[2, 1, 0]$  típusú, a 2.2. feladat  $[2, 1, 0]$  vagy  $[6, 1, 0]$  típusú volt. (A sorsolási modellben a dobókocka hat oldallapjának hat golyót feleltethetünk meg. Ez lehet akár 6 különböző színű golyó is, de mivel kitüntetett szerepe csak a 6-os lapnak van, a többi lapot jellemző golyót tekinthetjük egyforma színűnek.)

d) Más típusú osztályozást kapunk, ha az egyes színek változását jellemző stratégiákat vizsgáljuk.

A stratégia lehet a kiválasztott golyó színét támogató, ún. *konform stratégia*. Például ha a kiválasztott golyó piros, akkor egy további piros golyót helyezünk az urnába. Lehet a stratégia *semleges* (ha a kiválasztott golyó piros, akkor nem csinálunk semmit), és végül lehet *kontrastratégia*, mely a kiválasztott szín ellen hat (például ha a kiválasztott golyó piros, akkor kicseréljük egy kék golyóra).

Általában azt mondhatjuk, hogy módszertanilag igen hasznos a hasonló típusú golyójátékok tárgyalása. Sok feladat átfogalmazható a golyójátékok modelljére, mint erre

mindjárt látunk példákat, s az átfogalmazás-modellezés technikáját a későbbiekben is gyakran alkalmazzuk.

Ugyanakkor a golyójátékok igen alkalmasak számítógépes játékok alapjául is. Könnyen programozhatók, tetszőlegesen paraméterezhetők, a szimulációk és játékok igen sok variációja képzelhető el. (Erről kissé bővebben a **9.** fejezetben írunk.)

### Három klasszikus példa

Az alábbiakban - megoldásuk nélkül - három klasszikus feladatot említünk, melyekkel a fent bevezetett fogalmakra példákat mutatunk.

**1. példa:** Egy dobozban  $p$  darab piros színű és  $k$  darab kék golyó van. A dobozból kivesszünk két golyót. Ha ezek különböző színűek, akkor a piros golyót visszatesszük, ha egyforma színűek, akkor egy kék golyót teszünk vissza. Ezt az eljárást addig ismétljük, míg egyetlen golyó marad a dobozban. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a golyó piros?

**2. példa:** Egy táblára felírtunk 1996 darab 1-est, 1997 darab 2-est és 1998 darab 3-ast. Bármely két különböző számjegyet letörölhetjük, ha helyette a harmadik számjegyet egyszer felírjuk a táblára. Igaz-e, hogy ezt az eljárást ismételve elérhetjük, hogy **a)** csak egyfajta; **b)** csak egyetlen szám marad? Ha igen, melyik lehet ez a szám?

A feladatnak valószínűségszámítási értelmezést is adhatunk. Ekkor az eljárás folyamán két különböző, véletlenszerűen kiválasztott számjegyet letörölünk, s helyettük a harmadik számjegyet egyszer felírjuk a táblára. Mi a valószínűsége annak, hogy **a)** csak egyfajta; **b)** csak egyetlen szám marad?

**3. példa:** Egy szigeten 13 szürke, 15 barna és 17 zöld kaméleon él. Ha két különböző színű kaméleon találkozik, megijednek egymástól, mindketten a harmadik színre változtatják a bőrüket. Két azonos színű találkozásakor nem változtatják meg a színüket. Lehetséges-e, hogy egy idő múlva minden kaméleon ugyanolyan színűvé válik? (Mi ennek a valószínűsége, ha a kaméleonok találkozása véletlenszerű?)

Az első játék kódja  $[2, 2, -1]$ . A második játék felfogható egy olyan golyómodellnek, amelyben az 1-es, 2-es és 3-as számjegyek a piros, kék, sárga golyóknak feleltethetők meg. Ha nem irányított, hanem véletlenszerű folyamatot akarunk, akkor annyiban módosítjuk a visszatevési szabályt, hogy ha két egyforma golyót húzunk (számjegyet választunk), akkor mindkettőt visszatesszük. Így a játék kódja  $[3, 2, -1]$ , a golyószám pedig nem szigorúan monoton módon csökkenő. A harmadik játék kódja  $[3, 2, 0]$ ; itt az egyes kaméleonokat azonosíthatjuk hasonló színű golyókkal.

A végállapotok valószínűségét a **9.** fejezetben megadjuk; ezek meghatározásához nincs szükségünk a Markov-láncok módszerére. Ha azonban a **2. b)** vagy a **3.** példa esetleges végállapotának (csupa egyforma számjegy, illetve egyforma kaméleon) eléréséhez szükséges átlagos lépésszáma vagyunk kíváncsiak, már eredményesen alkalmazhatjuk a tanult eljárást.

A továbbiakban néhány egyszerű stratégiájú, kevés golyóból álló modell viselkedését vizsgáljuk meg.

### Konform- és kontrastratégiák



**4.1. feladat (konform piros stratégia):** Egy urnában 10 golyó van, kezdetben 7 kék és 3 piros. Minden lépésben véletlenszerűen kiválasztunk egy golyót. A játékszabály a következő: ha a kiválasztott golyó kék, pirosra cseréljük ki; ha piros, akkor változtatás nélkül visszatesszük. (Ebben a játékban tehát csak nőhet a piros golyók száma.) A játéknak akkor van vége, amikor minden golyó piros. Átlagosan hány lépésig tart egy játék?

**Megoldás:** Ebben a játékban a piros szín 1 valószínűséggel „győz”.

Jelentse  $L_i$  a hátralévő húzások átlagos számát, ha a 10 golyóból  $i$  darab kék van az urnában. A feladat  $L_7$  meghatározása. A játék folyamatábrájának felírása helyett rögtön vizsgáljuk meg az általános egyenletet.

Mivel  $i$  darab kék golyó esetén  $\frac{i}{10}$  eséllyel húzunk kék és  $\frac{10-i}{10}$  eséllyel piros golyót,

az  $L_i = \frac{i}{10}(1 + L_{i-1}) + \frac{10-i}{10}(1 + L_i)$  egyenletet kapjuk. (Az egyenlet első tagja úgy

értelmezhető, hogy  $\frac{i}{10}$  valószínűséggel kék golyót húzunk; mivel ezt kicseréljük pirosra, történik egy húzás, plusz még annyi, amennyi átlagosan az  $(i-1)$  kék golyó esetén várható, vagyis  $L_{i-1}$  számú. Hasonlóan a második tag a piros golyó húzásának folyamatát írja le.) Innen átalakításokkal  $L_i = L_{i-1} + \frac{10}{i}$  következik. Ezt az egyenletet felírva az  $i = 7, 6, \dots, 2, 1$  esetekben, az alábbi egyenletrendszer adódik:

$$L_7 = L_6 + \frac{10}{7},$$

$$L_6 = L_5 + \frac{10}{6},$$

...

$$L_2 = L_1 + \frac{10}{2},$$

$$L_1 = L_0 + \frac{10}{1}.$$

Csak az egyenletrendszer szimmetriája miatt használtuk  $L_0$ -t, nyilván  $L_0 = 0$ .

Most az egyenletrendszerben alulról felfelé haladva, a kisebb indexű tagokat sorban behelyettesítve, az  $L_7 = 10\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{7}\right)$  összefüggést kapjuk, innen  $L_7 \approx 26$ .

**Megjegyzések:**

1. A követett megoldási módszerrel hasonlóan látható be, hogy  $n$  golyó esetén, kezdeti  $k$  kék golyóval, a húzások átlagos száma  $L_k = n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}\right)$ ; speciálisan, ha minden golyó kék kezdetben, akkor a húzások átlagos száma  $L_n = n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$

2. Mellékmegoldásként megkaptuk az  $L_1 = 10$  már ismert eredményt, mely azt mutatja meg, hogy ha tíz golyóból egy kék, átlagosan tízszer kell visszatevéssel húznunk, míg sikerül

a kék golyót kihúzni. (Ugyanez az érték érmedobálásnál 2, kockadobásnál 6, visszatevéses sorsolásnál  $\frac{n}{p}$  volt (2.4. feladat).)

**4.2. feladat (kétirányú színpárbaj):** Egy urnában 6 golyó van, kezdetben 3 piros és 3 kék. Minden lépésben véletlenszerűen kiválasztunk egy golyót, és ellenkező színűre cseréljük ki. A játékot akkor nyeri Piros (P), ha minden golyó piros lesz; míg Kék (K) akkor, ha minden golyó kék lesz. Átlagosan hány lépésig tart egy játék?

**Megoldás:** A játék mindkét szín szempontjából kontrastratégiájú. Legvalószínűbb, hogy a golyók színeloszlása az egyensúlyi állapot körül ingadozik, ezért a játék végét várhatóan magas lépésszámmal lehet elérni.

Legyen az  $i$ . állapotban  $i$  darab piros golyó az urnában; jelentse  $L_i$  az  $i$ . állapotból indulva a húzások várható számát,  $p_i$  pedig  $P$  győzelmének a valószínűségét, szintén az  $i$ . állapotban. Ekkor tudjuk, hogy szimmetriaokok miatt  $p_3 = \frac{1}{2}$  (igazságos a játék) és  $p_i = 1 - p_{6-i}$  (nincs döntetlen; a játék előbb-utóbb véget ér). A többi  $p_i$  meghatározásához - a szokott módon - felírhatjuk, hogy:

$$p_2 = \frac{1}{3}p_1 + \frac{2}{3}p_3,$$

$$p_1 = \frac{5}{6}p_2,$$

$$\text{és most } p_3 = \frac{1}{2}.$$

Az egyenletrendszer megoldása  $p_1 = \frac{5}{13}$  és  $p_2 = \frac{6}{13}$ , vagyis a játék erősen kiegyensúlyozott akkor is, ha nem a szimmetrikus kezdőhelyzetből indulunk.

A lépésszámokra teljesül az  $L_i = L_{6-i}$  szimmetria, így a felírható egyenletrendszer:

$$L_3 = 1 + L_2,$$

$$L_2 = 1 + \frac{1}{3}L_1 + \frac{2}{3}L_3,$$

$$L_1 = 1 + \frac{5}{6}L_2.$$

Az egyenletrendszer megoldása  $L_1 = 31$ ,  $L_2 = 36$ ,  $L_3 = 37$ .

**4.3. feladat (egyirányú színpárbaj):** Egy urnában 6 golyó van, kezdetben 3 piros és 3 kék. Minden lépésben véletlenszerűen kiválasztunk egy golyót, és ellenkező színűre cseréljük ki. A játéknak akkor van vége, ha minden golyó piros lesz. Átlagosan hány lépésig tart egy játék? (Először próbáljuk számolás nélkül megbecsülni, hogy mennyivel nőnek a 4.2. feladat lépésszámai!)

**Megoldás:** Ha  $i$  darab piros és  $6 - i$  darab kék golyónk van, a lépésszámokra  $L_i = 1 + \frac{i}{6}L_{i-1} + \frac{6-i}{6}L_{i+1}$  teljesül. Az egyenlet átalakítva  $L_{i+1} = \frac{6}{6-i}L_i - \frac{i}{6-i}L_{i-1} - \frac{6}{6-i}$ , ezt írjuk fel rendre az  $i = 5, 4, 3, 2, 1$  esetekben:

$$L_6 = \frac{6}{1}L_5 - \frac{5}{1}L_4 - \frac{6}{1},$$

$$L_5 = \frac{6}{2}L_4 - \frac{4}{2}L_3 - \frac{6}{2},$$

$$L_4 = \frac{6}{3}L_3 - \frac{3}{3}L_2 - \frac{6}{3},$$

$$L_3 = \frac{6}{4}L_2 - \frac{2}{4}L_1 - \frac{6}{4},$$

$$L_2 = \frac{6}{5}L_1 - \frac{1}{5}L_0 - \frac{6}{5}.$$

Két peremfeltételünk van a szélsőhelyzetekből:  $L_6 = 0$ , illetve  $L_0 = 1 + L_1$ . Például a második feltételt felhasználva az egyenletekből - lentről felfelé haladva - minden változót kifejezhetünk  $L_1$ -gyel:

$$L_2 = L_1 - \frac{7}{5}, L_3 = L_1 - \frac{18}{5}, L_4 = L_1 - \frac{39}{5}, L_5 = L_1 - \frac{96}{5}, L_6 = L_1 - \frac{411}{5}.$$

$$\text{Mivel } L_6 = 0, \text{ a kapott értékek: } L_1 = L_1 = \frac{411}{5}, L_2 = \frac{404}{5}, L_3 = \frac{393}{5}, L_4 = \frac{372}{5}, L_5 = \frac{315}{5},$$

és korábban láttuk, hogy  $L_0 = 1 + L_1 = \frac{416}{5}$ .

Érdekes összehasonlítanunk az előző **4.2.** feladat  $L_1 = 31, L_2 = 36, L_3 = 37$  lépésszámait a most kapott  $L_1 = 82,2, L_2 = 80,8, L_3 = 78,6$  értékekkel.

**Megjegyzések:** Az egy- és kétirányú színpárba játékknak több általánosítása képzelhető el.

**1.** Megtehetjük, hogy az alapjáték paramétereit (kezdeti golyószám, célállapot) változtatjuk meg. Például legyen a kezdőállapot  $k$  darab kék és  $p$  darab piros golyó, Kék győzelméhez a kék golyók számának el kell érnie a  $k + 4$ -et, Piros győzelméhez pedig a piros golyók számának kell elérnie a  $p + 3$ -at.

**2.** Felvehetünk több színt, s az új színekre speciális szabályokat érvényesíthetünk. Például a piros és kék golyók mellett sárga golyókat is az urnába helyezünk, s ha sárga golyót húzunk, kicseréljük pirosra.

És hát természetesen több „játékos” is játszhat. Két lehetséges szabály piros, kék, sárga golyók esetén:

**3.** Ha sárga golyót húzunk, visszatesszük. (Ez a játék vegyesen konform és kontrastratégiájú. Láthatóan csak sárga nyerhet; kérdés az ehhez szükséges lépésszám.)

**4.** Piros golyót kékre, kéket sárgára, sárgát pirosra cserélünk.

A következő feladat a statisztikus golyójátékok egy gyakorlati alkalmazására mutat példát.

**4.4. feladat:** Egy 486 DLC 40 MHz-es AT számítógép az  $[1, 32]$  intervallumban egymillió véletlenszámot 11,59 másodperc alatt generált ki. Ugyanez a gép átlagosan mennyi idő alatt osztott ki négy játékos között egy 32 lapos kártyapaklit? (Az osztási algoritmus a következő: a gép először egy véletlenszámot választ az  $[1, 32]$  intervallumból; ha a számnak

megfelelő kártyalap még nem foglalt, kiosztja a soron következő játékosnak; ha a lapot már megkapta valamelyik játékos, akkor a gép új véletlenszámot generál és így tovább.)

**Megoldás:** Ez a feladat a golyójátékok egy alkalmazása; megpróbáljuk valamelyik játékkal modellezni az osztást.

A gép szempontjából a 32 kártyalap kétféle lehet: "jó" vagy "rossz". "Jó" a kártyalap akkor, ha a véletlen választáskor még nem osztottuk ki a soron következő játékosnak, ellenkező esetben "rossz". Ugyanakkor ha a gép egy "jó" kártyalapot kiválaszt és kioszt a soron következő játékosnak, utána már a kártyalapot "rossznak" kell jelölni, hiszen többé nem osztható ki.

A kártyalapok száma állandó, tehát a 32 lap közül véletlen választás egy 32 golyót tartalmazó urnából való húzásnak felel meg. Kezdetben minden lap "jó", legyenek a kezdeti golyók például kékek. Ha egy "jó" lapot húzunk, azt kiosztjuk, és "rossznak" jelöljük; ennek megfelel az, hogy ha egy kék golyót kihúzunk az urnából, helyette egy pirosat teszünk vissza (a golyószám állandó). Ha egy "rossz" lapot húzunk, azt továbbra is "rossznak" tekintjük; ennek megfelelően, ha egy piros golyót húzunk az urnából, változtatás nélkül visszatesszük.

Vegyük észre, hogy a kártyapakli osztásának a **4.1.** játék konform piros stratégia modellje felel meg. Ekkor a kérdés az, hogy ha kezdetben 32 kék golyó van az urnában, akkor átlagosan hány húzás után lesz minden golyó piros?

A **4.1.** feladatban követett megoldással  $L_{32} = 32 \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{32} \right) \approx 129,9$ , így az osztás átlagosan kb.  $1,5 \cdot 10^{-3}$  másodpercig tartott.

### Megjegyzések:

**1.** A kapott idő igen rövid; nincs szükség arra, hogy az esetleges programozó kiírja a hagyományos információs szöveget: "Várj egy kicsit, most éppen osztok." (A feladat is ebből a gyakorlati problémából származik.)

**2.** Az osztás nyilván gyorsabbá tehető, ha számláljuk a kiosztott lapokat. Az utolsó nyolc lap már egy kézbe kerül, tehát csak 24 lapot kell ekkor kiosztani.

**3.** A feladat szép példa a matematika gyakorlati alkalmazására. Érdemes ezt tudatosítani a diákjaink körében; valamint azt is hangsúlyozhatjuk, hogy általában egyáltalán nem könnyű egy gyakorlati feladat matematikai modelljét felállítani.

### Visszatevés nélküli sorsolások

Egy urnában kezdetben különböző színű golyókat helyezünk el. A játékosok felváltva húznak úgy, hogy a kihúzott golyót nem teszik vissza (tehát az urnában lévő golyók száma monoton csökken). Mindegyik játékosnak van nyerő színe (színkombinációja); s akkor győz valamelyikük, hogy ha ennek megfelelő színű golyót húz. A játékban döntetlen eredményt is kaphatunk, ha elfogytak a golyók és senki sem nyert.

Ezekben a játékokban tehát a **2.** fejezet sorsolási eljárását módosítjuk, s így egy csökkenő golyószámú modellt kapunk.

**4.5. feladat:** Vizsgáljuk meg az egyszerűbb alapjátékokat! Ebben két játékos, a kezdő  $A$  és a másodhúzó  $B$  játszik egymással.  $A$  nyer, ha piros golyót húz,  $B$  nyer, ha kéket; s a golyók kezdeti színmegoszlása

- a)  $(p, k) = (1, 1)$ ;
- b)  $(p, k) = (1, 2)$ ;
- c)  $(p, k) = (1, 3)$ ;
- d)  $(p, k) = (2, 3)$ ;

- e)**  $(p, k) = (2, 4)$ ;  
**f)**  $(p, k) = (3, 5)$ ;  
**g)**  $(p, k) = (2, 1)$ ;  
**h)**  $(p, k) = (2, 2)$ ;  
**i)**  $(p, k) = (3, 2)$ ;  
**j)**  $(p, k) = (3, 3)$ .

(Természetesen a tanórán a mennyiség helyett a minőségre törekedjünk: kevesebb feladatot tűzzünk ki, de lehetőleg az érdekesebbeket.)

**Megoldás:**

- a)**  $P(A \text{ nyer}) = \frac{1}{2}$  (ha elsőre piros golyót húz),  $P(B \text{ nyer}) = 0$ ,  $P(\text{döntetlen}) = P(D) = \frac{1}{2}$ .  
**b)**  $P(A \text{ nyer}) = \frac{1}{3}$ . (Elsőre pirosat kell húznia. Ha ugyanis kéket húz, akkor a következő

húzással vagy  $B$  nyer, vagy döntetlen lesz a játék.)  $P(B \text{ nyer}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$  (egymás után két kék húzás következik);  $P(D) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$  (kék - piros - kék ( $kpk$ ) a húzások sorrendje).

Ez a játék igazságos.

- c)**  $P(A \text{ nyer}) = \frac{1}{4}$  (elsőre pirosat kell húznia).  $P(B \text{ nyer}) = \frac{3}{4}$  (ha az első két húzás kék - piros ( $kp$ ) vagy kék - kék ( $kk$ ), akkor is nyer);  $P(D) = 0$ .

**d)**  $P(A \text{ nyer}) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$  (a húzások sorrendje  $p$  vagy  $kpp$ ).  $P(B \text{ nyer}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$  (a húzások sorrendje  $kk$  vagy  $kpkk$ ).  $P(D) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$  ( $kpkpk$ ).

**e)**  $P(A \text{ nyer}) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{5}$  ( $p$  vagy  $kpp$ ).  $P(D) = 0$ , így  $P(B \text{ nyer}) = \frac{3}{5}$ . (Persze ki is számolhatjuk a  $kk$ , illetve  $kpk$  sorozatok valószínűségét:  $\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$ .)

Általában is igaz, hogy ha a kék golyók száma legalább 2-vel több, mint a pirosaké, akkor a játékban nem lehet döntetlen.

- f)**  $P(A \text{ nyer}) = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{56}$  ( $p$ ,  $kpp$  vagy  $kpkpp$ );  $P(B \text{ nyer}) = \frac{29}{56}$ .  
**g)**  $P(A \text{ nyer}) = 1$ .

A következő feladatokban a piros golyók száma nem kevesebb a kék golyók számánál; a játékok nyilván nem lehetnek  $A$  számára előnytelenek.

**h)**  $P(A \text{ nyer}) = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$  ( $p$  vagy  $kpp$ ).  $P(D) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$  ( $kpk$ ), így  $P(B \text{ nyer}) = \frac{1}{6}$ .

- i)**  $P(A \text{ nyer}) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{10}$  ( $p$ ,  $kpp$  vagy  $kpk$ ; tulajdonképpen  $p$  vagy  $kp$ ).

$$\text{j) } P(A \text{ nyer}) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{10} \quad (p, kpp \text{ vagy } kpkk).$$

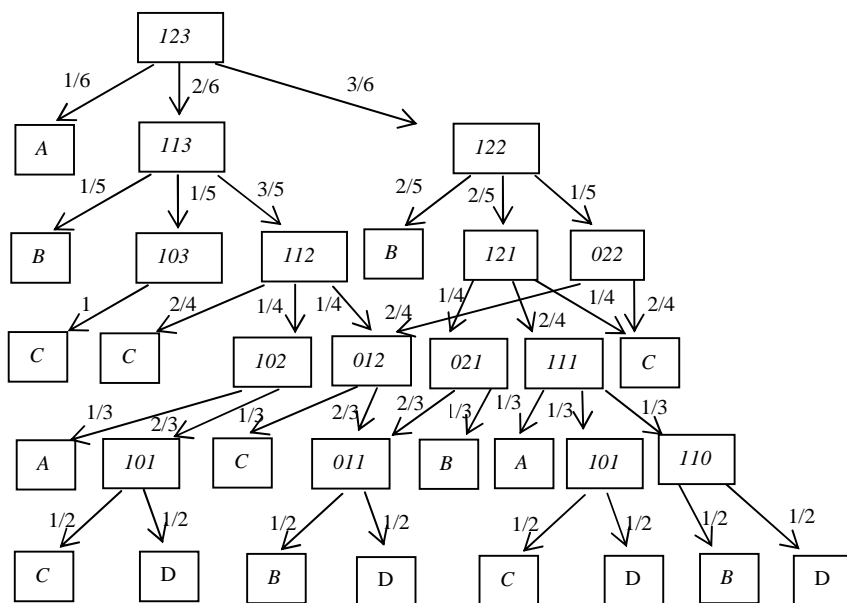
$$P(D) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20} \quad (kpkk), \text{ így } P(B \text{ nyer}) = \frac{1}{4}.$$

**4.6. (kitűzött) feladat:** Határozzuk meg az előző játékokban a húzások átlagos számát!

**Útmutatás:** Legegyszerűbb a definíciót alkalmaznunk. Például a **d)** (2, 3) játékban annak a valószínűsége, hogy a játék 1, 2, 3, 4, 5 lépésben ér véget (tehát a húzások  $p, kk, kpp, kpkk, kpkk$ ), rendre  $\frac{2}{5}, \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}, \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}, \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}, \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{10}$ .  
Innen az átlagos húzásszám  $\frac{2}{5} \cdot 1 + \frac{3}{10} \cdot 2 + \frac{1}{10} \cdot 3 + \frac{1}{10} \cdot 4 + \frac{1}{10} \cdot 5 = 2,2$ .

**4.7. feladat:** Egy urnában kezdetben 1 piros, 2 kék és 3 sárga golyó van. Három játékos,  $A, B$  és  $C$  felváltva húz visszatevés nélkül.  $A$  nyer, ha piros golyót húz;  $B$  nyer, ha kéket;  $C$ , ha sárgát. Határozzuk meg  $A, B, C$  nyerési esélyét!

**Megoldás:** A játék állapotdiagramja 6 mélységű (7 szintű) fagráf, melynek felrajzolásakor igyekeztünk egyszerűsítéseket végezni. Az egyes állapotokat a golyók aktuális számával jelöltük (kezdetben ez (123)); a döntetlen végállapot jele  $D$ .



Nem rajzoltuk ki például az egyértelmű utolsó szintet; vagy az (102) állapotból rögtön következtettünk vagy  $A$ , vagy  $C$  győzelmére.

$$\text{Az ábra alapján } P(A \text{ nyer}) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{60};$$

$$P(B \text{ nyer}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{21}{60};$$

$$P(C \text{ nyer}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} +$$

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{20}{60}; \text{ és a döntetlen valószínűsége } D =$$

$$2 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{60}.$$

(A folyamatára lényegében nem könnyítette meg a munkánkat, de a megoldás szerves része, így nem hagytuk el. Bizonyos értelemben feleslegesen dolgoztunk, de ez a feladatmegoldás folyamán gyakran előfordul.)

**4.8. (kitűzött) feladat:** Határozzuk meg az előző játékban a húzások átlagos számát!

**Megjegyzések:** A visszatevés nélküli sorsolási modelleket általánosíthatjuk. Változtathatjuk a golyók kezdeti megoszlását, többféle (többszínű) golyóval játszhatunk, és növelhetjük a játékosok számát is.

A csökkenő golyószám miatt nehezebb ekvivalens állapotokat találni, így a játék folyamatábrája könnyen megnövekedhet, a játék elemzése elnehezedhet. (A 4.7. feladatban kevés kezdeti golyóval játszottunk, ennek ellenére az állapotdiagram gráfja igen bonyolult lett.) Természetesen minél összetettebb a feladat, annál inkább előtérbe kerül a számítógép alkalmazása.

### Vegyes feladatok

**4.9. (kitűzött) feladat (KöMaL A.381.):** Egy  $n$  oldalú „dobókockát” addig dobálunk, amíg mind az  $n$  lehetséges eredményt legalább egyszer megkapjuk. Mennyi a dobások számának várható értéke?

**4.10. (kitűzött) feladat:** Egy fizikusok által a gázok diffúziójára használt modell a következő:

Egy urna üres, egy másikban 6 darab számozott golyó van. Egy kísérlet abból áll, hogy véletlenszerűen kiválasztunk egy számot 1-től 6-ig, és a neki megfelelő golyót áttesszük a másik urnába. A játéknak akkor van vége, ha a golyók eloszlása 3 - 3.

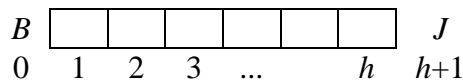
a) Átlagosan hány lépésig tart a kísérlet?

b) Oldjuk meg a fordított feladatot is: 3 -3 golyó esetén várhatóan hány lépés után fog kiürülni valamelyik urna?

**4.11. (kitűzött) feladat:** Egy dobozban négy különböző színű golyó van. Véletlenszerűen kiválasztunk kettőt, majd az első golyót olyan színűre festjük, mint a második. Várhatóan hány húzás kell ahhoz, hogy minden golyó egyszínű legyen?

## 5. Ferdefoci

Két játékos a következő, ferdefoci nevű játékot játssza (az elnevezés az [1] könyvből származik; az elnevezés magyarázatát az 5.5. feladatban láthatjuk). Adott  $h$  hosszúságú pálya egyik mezőjére egy korongot helyeznek el, majd szabályos érmével dobásokat végeznek. Ha a dobás fej, a korongot egy mezővel balra, írás esetén egy mezővel jobbra mozdítják el. A jobb oldali játékos (továbbiakban  $J$ ) akkor győz, ha a korong a játékmezőt bal oldalról hagyja el; a bal oldali játékos ( $B$ ) pedig akkor, ha jobbról. Ha a mezőket balról jobbra megszámozzuk, akkor úgy is tekinthetjük a játékot, mintha  $J$  győzelméhez a korongnak a 0. mezőre ( $B$  kapuja),  $B$  győzelméhez pedig a  $(h + 1)$ . mezőre ( $J$  kapuja) kell kerülnie.



**5.1. feladat:** Vizsgáljuk meg a ferdefoci alapjátékot  $h = 2$  hosszúságú pályán!

- Mi annak a valószínűsége, hogy a játék döntetlennel ér véget?
- Mekkora valószínűséggel győz  $J$ , ha a korong kezdetben az első, illetve a második mezőn van?
- Átlagosan meddig (hány dobásig) tart a játék? (A játéknak akkor van vége, ha a korong valamelyik oldalon elhagyja a pályát.)

**Megoldás:** Nevezzük a további játékokban is  $i$ . állapotnak azt a helyzetet, amikor a korong az  $i$ . mezőn van. Jelölje  $p_i$  annak a valószínűségét, mellyel  $J$  nyer az  $i$ . állapotból indulva;  $L_i$  pedig az átlagos lépésszámot. Az érmedobás véletlenszerűsége miatt a balra, illetve a jobbra lépés valószínűsége egyaránt  $\frac{1}{2}$ .

**a)** Legyen a korong kezdetben az első mezőn. A játék csak akkor lehet döntetlen, ha a dobások egymás után írás, fej, írás, fej stb. sorrendben következnek. Ennek valószínűsége, hogy a játék  $N$  dobás után nem ér véget,  $\left(\frac{1}{2}\right)^N$ ; ennek határértéke nulla, ha  $N$  tart a végtelenhez. Ha a korong a második mezőről indul, a helyzet - szimmetriaokok miatt - ugyanez. Vagyis a döntetlen valószínűsége nulla, ez a játék is 1 valószínűséggel véget ér.

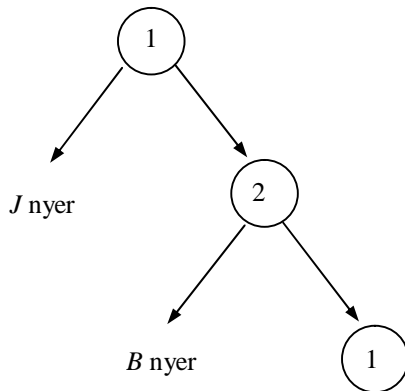
**b) Első megoldás (mértani sor):** Tudjuk, hogy  $p_1 = P(J \text{ nyer}) = P(J \text{ vagy az első, vagy a harmadik, vagy az ötödik, vagy a ... lépésben nyer (és közben } B \text{ nem nyer)})$ . Ez formailag a  $p_1 = P(J \text{ nyer}) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots$  egyenletet jelenti. Ez egy  $\left(\frac{1}{2}\right)^2$  hányadosú végtelen mértani sor, melynek összege  $\frac{2}{3}$ . Tehát  $p_1 = P(J \text{ nyer}) = \frac{2}{3}$ .

**Második megoldás („logikai rekurzió”):** Mivel a játékban nincs döntetlen, bármely állapotban  $P(J \text{ nyer}) + P(B \text{ nyer}) = 1$ . Ezért ha egy írás dobás után a korong a 2. mezőre kerül, a játék szerepcserével folytatódik, ahonnan már  $B$  nyer  $p_1$  és  $J$  nyer  $(1 - p_1)$  valószínűséggel.

Ez alapján a kezdőállapotról felírható egyenlet  $p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - p_1)$ , melynek  $p_1 = \frac{2}{3}$  a megoldása.



**Harmadik megoldás (Markov-láncok):** A probléma folyamatábrája (a mezők sorszámával jelöltük a megfelelő állapotokat):



A játék szempontjából az 1. kezdőállapot, valamint egy fej és egy írás dobás után kapott állapot ekvivalens. A felírható egyenletrendszer:

$$(1) \quad p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p_2;$$

$$(2) \quad p_2 = \frac{1}{2} p_1.$$

Az egyenletrendszer megoldása valóban  $p_1 = \frac{2}{3}$ .

**c) Első megoldás (a várható érték definíciója alapján):**

$$L_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 3 + \mathbf{K}$$

**Második megoldás (Markov-láncok):** A folyamatábra alapján a lépésszámokra felírható egyenletrendszer:

$$(1) \quad L_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(1 + L_2),$$

$$(2) \quad L_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(1 + L_1).$$

Az egyenletrendszer megoldása  $L_1 = L_2 = 2$ .

**Harmadik megoldás („logikai rekurzió”):** A várható lépésszám szempontjából az 1. és 2. állapotok szimmetrikus szerepük miatt ekvivalensek. Az  $L_1 = L_2$  szimmetria miatt közvetlenül felírható egyenlet:

$$L_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(1 + L_1), \text{ ennek megoldása } L_1 = 2.$$

**Megjegyzések:**

1. A ferdefoci játék tulajdonképpen egy egyenes mentén történő diszkrét (egységeket lépő) bolyongási modell; ennek **5.1.** a lehető legegyszerűbb feladata.

2. Az érmedobás szerepe gyakorlatilag az, hogy megadja a balra, illetve a jobbra lépés valószínűségét.

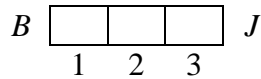
3. Természetesen  $p_1 > p_2$  a várakozásunknak megfelelően.

4. A **2.7.** feladat megjegyzése alapján  $L_1 = 2$  megjósolható volt. (Megmutattuk, hogy ha egy esemény bekövetkezésének valószínűsége  $p$ , akkor az ehhez szükséges átlagos lépésszám  $\frac{1}{p}$ . Itt pedig erről van szó: mindig  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel ér véget a folyamat.)

**5.2. feladat:** Vizsgáljuk meg a ferdefoci alapjáték valószínűségeit a  $h = 3$  hosszúságú pályán!

a) Mekkora valószínűséggel győz  $J$ , ha a korong kezdetben az első (második, harmadik) mezőn van?

b) Mekkora az átlagos lépésszám az egyes esetekben?



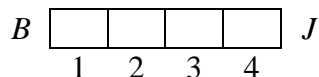
**Megoldás:** Ismét igaz, hogy nincs döntetlen (részletesebb indoklás: **8.5.** feladat), a játék előbb-utóbb véget ér. Az előző feladat jelöléseivel  $p_2 = \frac{1}{2}$ ,  $p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p_2 = \frac{3}{4}$ , s így  $p_3 = \frac{1}{4}$ .

A lépésszámokra  $L_1 = L_3$ ,  $L_2 = 1 + L_1$  és  $L_1 = 1 + \frac{1}{2} L_2 = 1 + \frac{1}{2}(1 + L_1)$ . Innen  $L_1 = L_3 = 3$ ,  $L_2 = 4$ .

**5.3. feladat:** Vizsgáljuk meg a ferdefoci alapjáték valószínűségeit a  $h = 4$  hosszúságú pályán!

a) Mekkora valószínűséggel győz  $J$ , ha a korong kezdetben az első (második, ..., negyedik) mezőn van?

b) Mekkora az átlagos lépésszám az egyes esetekben?



**Megoldás: a)** A játék ( $B$  és  $J$  szerepcseréjéből adódó) szimmetriája miatt  $p_1 = 1 - p_4$ ,  $p_2 = 1 - p_3$ . Így az egyenletrendszer egyszerűsödik, nincs szükségünk négy egyenletre:

$$p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p_2,$$

$$p_2 = \frac{1}{2} p_1 + \frac{1}{2}(1 - p_2).$$

Az egyenletrendszer megoldása  $p_1 = \frac{4}{5}$ ,  $p_2 = \frac{3}{5}$ ,  $p_3 = \frac{2}{5}$ ,  $p_4 = \frac{1}{5}$ ; ekkora valószínűséggel nyer  $J$  az egyes mezőkről indulva.

**b)** A lépésszámokra teljesül az  $L_2 = L_3$  és  $L_1 = L_4$  szimmetria (a várható lépésszámok szempontjából azonos szerepűek a 2-3, illetve 1-4 mezők). A felírható egyenletrendszer:

$$L_1 = 1 + \frac{1}{2}L_2,$$

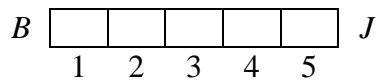
$$L_2 = 1 + \frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2}L_3.$$

Az egyenletrendszer megoldása  $L_1 = 4$ ,  $L_2 = 6$ ,  $L_3 = 6$ ,  $L_4 = 4$ .

**5.4. feladat:** Vizsgáljuk meg a ferdefoci alapjáték valószínűségeit a  $h = 5$  hosszúságú pályán!

**a)** Mekkora valószínűséggel győz  $J$ , ha a korong kezdetben az első (második, ..., ötödik) mezőn van?

**b)** Mekkora az átlagos lépésszám az egyes esetekben?



**Megoldás: a)** A játék szimmetriája miatt  $p_1 = 1 - p_5$ ,  $p_2 = 1 - p_4$  és  $p_3 = \frac{1}{2}$ . A felírható egyenletek:

$$p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_2,$$

$$p_2 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_3,$$

$$p_3 = \frac{1}{2}.$$

Az egyenletrendszer megoldása  $p_1 = \frac{5}{6}$ ,  $p_2 = \frac{4}{6}$ ,  $p_3 = \frac{3}{6}$ ,  $p_4 = \frac{2}{6}$ ,  $p_5 = \frac{1}{6}$ ; ekkora valószínűséggel nyer  $J$  az egyes mezőkről indulva.

**Megoldás: b)** Ha a lépésszámokat vizsgáljuk, az  $L_1 = L_5$ ,  $L_2 = L_4$  összefüggést vehetjük észre. A felírható egyenletrendszer:

$$L_1 = 1 + \frac{1}{2}L_2,$$

$$L_2 = 1 + \frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2}L_3,$$

$$L_3 = 1 + L_2.$$

Az egyenletrendszer megoldása  $L_1 = 5$ ,  $L_2 = 8$ ,  $L_3 = 9$ , s innen  $L_5 = 5$ ,  $L_4 = 8$ .

**Megjegyzés:**

A fenti feladatok eredményei alapján sejthető, hogy a  $h = 2k - 1$  hosszúságú pályán  $p_i = \frac{h+1-i}{h+1}$  és  $L_k = k^2$ . Ennek a másodrendű lineáris rekurziók segítségével történő

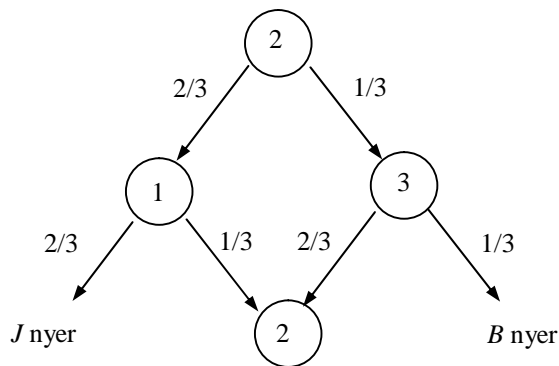
bizonyítása megtalálható a következő fejezetben; s ugyanitt az átlagos lépésszámokra az  $L_i = i(h + 1 - i)$  általános eredményt kaptuk.

**5.5. feladat:** A ferdefoci játék egy újabb változata, amikor a korong nem egyforma valószínűséggel lép a két irányba (ez az „igazi” ferdefoci). Legyen például a balra lépés valószínűsége  $p = \frac{2}{3}$ , a jobbra lépés valószínűsége  $q = \frac{1}{3}$ , a pálya hossza  $h = 3$ .

a) Mekkora valószínűséggel győz  $J$ , ha a korong kezdetben a második (első, harmadik) mezőn van?

b) Mekkora az átlagos lépésszám az egyes esetekben?

**Megoldás:** Rajzoljuk fel a szokásos jelölésekkel a játék folyamatábráját, például ha kezdetben a korong a 2. mezőn áll.



Az állapotdiagramhoz tartozó egyenletrendszer:

$$p_2 = \frac{2}{3} p_1 + \frac{1}{3} p_3,$$

$$p_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} p_2,$$

$$p_3 = \frac{2}{3} p_2.$$

Az egyenletrendszer megoldása  $p_1 = \frac{14}{15}$ ,  $p_2 = \frac{12}{15}$ ,  $p_3 = \frac{8}{15}$ .

Az átlagos lépésszámokra felírható egyenletrendszer:

$$L_1 = 1 + \frac{1}{3} \cdot L_2,$$

$$L_2 = 1 + \frac{2}{3} \cdot L_1 + \frac{1}{3} \cdot L_3,$$

$$L_3 = 1 + \frac{2}{3} L_2.$$

Ennek megoldása pedig  $L_1 = \frac{11}{5}$ ,  $L_2 = \frac{18}{5}$ ,  $L_3 = \frac{17}{5}$ .

**Megjegyzések:** Balra a korong kétszer akkora valószínűséggel lép, mint jobbra; emiatt még a 3. mezőről indulva is  $J$ -nek előnyös a játék. Az **5.2.** feladat 3, 4, 3 lépésszámai 2,2; 3,6; 3,4-re módosultak. Ha a játék kezdetekor a korongot a három mező egyikére véletlenszerűen helyezük el, akkor az **5.4.** játék átlagban hamarabb ér véget, mint az **5.2.**

**5.6. feladat:** Az előző játékot annyiban módosítjuk, hogy most a korong adott valószínűséggel helyben is maradhat. (Ilyen esetben tehát a lépésszám 1-gyel nő, de a korong nem mozdul el.) Legyen a balra lépés valószínűsége  $p = \frac{2}{5}$ , a jobbra lépés valószínűsége  $q = \frac{1}{5}$ , a helyben maradás valószínűsége  $r = 1 - p - q = \frac{2}{5}$ ; a pálya hossza  $h = 3$ .

a) Mekkora valószínűséggel győz  $J$ , ha a korong kezdetben a második (első, harmadik) mezőn van?

b) Mekkora az átlagos lépésszám az egyes esetekben?

**Megoldás:** a) A felírható egyenletrendszer

$$p_2 = \frac{2}{5}p_1 + \frac{1}{5}p_3 + \frac{2}{5}p_2,$$

$$p_1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}p_2 + \frac{2}{5}p_1,$$

$$p_3 = \frac{2}{5}p_2 + \frac{2}{5}p_3.$$

Ennek megoldása  $p_1 = \frac{14}{15}$ ,  $p_2 = \frac{12}{15}$ ,  $p_3 = \frac{8}{15}$ .

b) A lépésszámokra vonatkozó egyenletrendszer:

$$L_1 = 1 + \frac{1}{5} \cdot L_2 + \frac{2}{5}L_1,$$

$$L_2 = 1 + \frac{2}{5} \cdot L_1 + \frac{1}{5} \cdot L_3 + \frac{2}{5}L_2,$$

$$L_3 = 1 + \frac{2}{5}L_2 + \frac{2}{5}L_3.$$

Ennek megoldása  $L_1 = \frac{11}{3}$ ,  $L_2 = \frac{18}{3}$ ,  $L_3 = \frac{17}{3}$ .

**Megjegyzés:** A kapott értékekkel kapcsolatban észrevehetjük, hogy az egyes mezőkhöz tartozó nyerési valószínűségek nem változtak, a lépésszámok pedig  $\frac{5}{3}$ -szorosra nőttek.

Mindkét eredmény szemléletesen magyarázható:

A helyben maradás nem befolyásolja a nyelési valószínűségeket. Ha tehát az esetek  $\frac{2}{5}$  részében a korong helyben marad, akkor elég az esetek maradék  $\frac{3}{5}$  részét vizsgálni; ezen maradék esetek  $\frac{2}{3}$  részében balra,  $\frac{1}{3}$  részében pedig jobbra mozdul el a korong.

A lépésszámokkal kapcsolatban pedig azt állapíthatjuk meg, hogy mivel a korong átlagosan 5 lépésből 2-szer helyben marad, így a maradék 3 tényleges elmozduláshoz tartozó várható lépésszámokhoz átlagosan további 2 „helybenmaradási lépést” kell hozzáadnunk; így kapjuk az átlagos lépésszámok  $\frac{5}{3}$ -szorosát.

## 6. A ferdefoci játék általános vizsgálata

Az általános tárgyalás során felhasználjuk a lineáris rekurziók elméletének tételeit.

**6.1. feladat (általánosítás a pálya hosszára és a lépési valószínűségekre):** Vizsgáljuk meg a ferdefoci játékot tetszőleges  $h$  hosszúságú pályán! Mekkora valószínűséggel győz  $J$ , ha a korong kezdetben az első (második, ...) mezőn van? Érdemes rögtön a feladat általánosítását vizsgálni: tegyük fel, hogy a korong nem egyforma valószínűséggel lép balra, illetve jobbra. Legyen a balra lépés valószínűsége  $p$ , a jobbra lépés valószínűsége  $q = 1 - p$ .

**Megoldás:** Legyen  $p_i$  annak a valószínűsége, hogy az  $i$ . mezőn tartózkodó bolyongó pont balról hagyja el a pályát. (Azt is mondhatjuk, hogy ekkora valószínűséggel nyer  $J$ .)

A bolyongó pont vagy  $p$  valószínűséggel balra, vagy  $q$  valószínűséggel jobbra lép egy mezőt, és innen a későbbiekben  $p_{i-1}$ , illetve  $p_{i+1}$  valószínűséggel hagyja el balról a pályát. Ennek megfelelően a  $p_i = p \cdot p_{i-1} + q \cdot p_{i+1}$  valószínűségi egyenletet írhatjuk fel. Célszerű a  $0$ . és  $(h + 1)$ . fiktív mezőket felvenni, ekkor  $p_0 = 1$ ,  $p_{h+1} = 0$ .

Adott  $p$ ,  $q$  és  $h$  értékek esetén megoldhatjuk a  $h$  darab egyenletből álló  $p_i = p \cdot p_{i-1} + q \cdot p_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) egyenletrendszer. (Ha  $h$  értéke nagy, használhatunk számítógépet.)

Az általános eset vizsgálatakor a  $p_i = p \cdot p_{i-1} + q \cdot p_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) rekurzió explicit alakját keressük a  $p_0 = 1$ ,  $p_{h+1} = 0$  peremfeltételek mellett. (Vagy átalakítva:

$$p_{i+1} = \frac{1}{q} p_i - \frac{p}{q} p_{i-1}.)$$

A  $qx^2 - x + p = 0$  karakterisztikus egyenlet vizsgálatát két részletben végezzük el.

*Első eset:* Ha  $p = q = \frac{1}{2}$ , akkor az egyenlet gyökei egybeesnek,  $x_{1,2} = 1$ , ezért a  $(p)$

sorozat  $p_i = a + bi$  alakú. A  $p_0 = 1$  feltétel miatt  $a = 1$ , a  $p_{h+1} = 0$  feltétel miatt  $b = -\frac{1}{h+1}$ . A

$(p)$  sorozat explicit alakja  $p_i = 1 - \frac{i}{h+1} = \frac{h+1-i}{h+1}$ .

*Második eset:* Ha  $p \neq q$ , akkor legyen  $p < q$ . Ekkor a karakterisztikus egyenlet két gyöke  $x_1 = \frac{p}{q}$ ,  $x_2 = 1$ . Helyettesítsünk: ha  $c = \frac{p}{q}$ , akkor  $p_i = ac^i + b$  alakban írható. A  $p_0 = 1$  feltétel

miatt  $a + b = 1$ , a  $p_{h+1} = 0$  feltétel miatt  $ac^{h+1} + b = 0$ . Innen  $a = \frac{1}{1-c^{h+1}}$  és  $b = -\frac{c^{h+1}}{1-c^{h+1}}$ . A

$(p)$  sorozat explicit alakja tehát  $p_i = \frac{c^i - c^{h+1}}{1-c^{h+1}} = \frac{c^{h+1} - c^i}{c^{h+1} - 1}$ .

**Megjegyzések:**

1. A kapott  $p_i = \frac{h+1-i}{h+1}$  valószínűségek szép lineáris csökkenést mutatnak, az **5.1 -**

**5.3. feladatok** eredményeinek megfelelően.

2. A  $p_i = \frac{c^{h+1} - c^i}{c^{h+1} - 1}$  képlet egyszerű ellenőrzését 5.4. alapján végezhetjük. Itt  $c = \frac{p}{q} = 2$ ,

$h = 3$  volt; az  $i = 0, 1, 2, 3, 4$  értékeket rendre behelyettesítve  $p_0 = \frac{2^4 - 2^0}{2^4 - 1} = 1$ ,

$p_1 = \frac{2^4 - 2^1}{2^4 - 1} = \frac{14}{15}$ ,  $p_2 = \frac{2^4 - 2^2}{2^4 - 1} = \frac{12}{15}$ ,  $p_3 = \frac{2^4 - 2^3}{2^4 - 1} = \frac{8}{15}$ ,  $p_4 = \frac{2^4 - 2^4}{2^4 - 1} = 0$ . Az 5.4.

feladattal megegyező értékeket kaptunk.

**6.2. feladat:** Legyen a  $h$  hosszúságú pályán a balra lépés valószínűsége  $p (\neq \frac{1}{2})$  a jobbra lépés valószínűsége  $q = 1 - p$ . Melyik mezőre kell kezdetben helyezni a korongot, hogy a játék közelítőleg igazságos legyen?

**Megoldás:** Az előző feladat eredménye alapján az  $i$  értékét kell úgy meghatározni,

hogy  $p_i \approx \frac{1}{2}$  legyen. A  $p_i = \frac{c^{h+1} - c^i}{c^{h+1} - 1}$  egyenletből  $i \approx \frac{\ln\left(\frac{1 + c^{h+1}}{2}\right)}{\ln c}$ . (Az 5.5. játékban, ahol  $p = \frac{2}{3}$ ,  $q = \frac{1}{3}$  volt,  $i \approx 3,087$  érték adódik. Kár, hogy csak 3 hosszú a pálya. A játék így nem

tehető igazságossá; még a 3. mezőről indulva is  $p_3 = \frac{8}{15} > \frac{1}{2}$ , a játék  $J$ -nek előnyös.)

**6.3. feladat (a lépésszámok általános vizsgálata):** Legyen a  $h$  hosszúságú pályán a balra lépés valószínűsége  $p$ , a jobbra lépés valószínűsége  $q = 1 - p$ . Melyik mezőre kell kezdetben helyezni a korongot, hogy a játék a lehető legtovább tartson?

**Megoldás:** Jelölje  $L_i$  az átlagos lépésszámot, ha a korong az  $i$ . mezőn van. A feladat  $L_i$  maximumhelyének meghatározása.

A várható lépésszámra az  $L_i = p(1 + L_{i-1}) + q(1 + L_{i+1})$  egyenletet írhatjuk fel. (Az egyenlet első tagja hagyományosan úgy értelmezhető, hogy a pont  $p$  valószínűséggel az  $(i - 1)$ . mezőre kerül, tehát lép egyet, plusz még annyit, amennyi átlagosan az  $(i - 1)$ . mezőn állva várható, vagyis  $L_{i-1}$ -et. Hasonlóan a második tag a jobbra lépés folyamatát írja le.) Ha a pont a fiktív mezőkre kerül, a játéknak vége lesz, tehát  $L_0 = L_{h+1} = 0$ . Az egyenletet átalakítva az  $L_i = 1 + pL_{i-1} + qL_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) rekurzív összefüggést írhatjuk fel,  $L_0 = L_{h+1} = 0$  a peremfeltételek.

Az egyenlet átrendezésével kapott  $qL_{i+1} = L_i - pL_{i-1} - 1$  inhomogén másodrendű rekurzió megoldásához először meg kell oldanunk a különbségsorozat által kapható homogén másodrendű rekurziót. Ezután a peremfeltételeket illesztjük; ez a lépés valamivel bonyolultabb lesz, hiszen most nem a sorozat első két tagja az adott.

Definiáljuk az  $(L)$  sorozat  $(d)$  különbség-sorozatát:  $d_i = L_i - L_{i-1}$ , ( $i = 1, 2, \dots$ ). Ekkor a  $(d)$  sorozatra érvényes összefüggés  $qd_{i+2} = d_{i+1} - pd_i$ . Ha meg tudjuk adni  $(d)$  tagjait, akkor a

$$d_1 = L_1 - L_0,$$

$$d_2 = L_2 - L_1,$$

$$d_3 = L_3 - L_2,$$

...

$$d_i = L_i - L_{i-1},$$



$$\dots$$

$$d_{h+1} = L_{h+1} - L_h$$

egyenletrendszer összegzéséből következne  $L_{h+1} - L_0 = \sum_{i=1}^{h+1} d_i$ , és mivel  $L_0 = 0$ ,  $L_i =$

$$\sum_{j=1}^i d_j, \text{ például } L_{h+1} = \sum_{i=1}^{h+1} d_i.$$

A  $qx^2 - x + p = 0$  karakterisztikus egyenlet vizsgálatát ismét két részletben végezzük el.

*Első eset:* Ha  $p = q = \frac{1}{2}$ , akkor az egyenlet két gyöke  $x_{1,2} = 1$ , ezért a  $(d)$  sorozat  $d_i = a + bi$  alakú. Most a  $(d)$  sorozat peremfeltételeit nem ismerjük, a két állandó,  $a$  és  $b$  az  $(L)$  sorozat kezdeti feltételeinek felhasználásával határozható meg.

Először is,  $L_{h+1} = 0$ , és  $L_{h+1} = \sum_{i=1}^{h+1} d_i$  miatt  $(h+1)a + b \frac{(h+1)(h+2)}{2} = 0$ , vagyis

$$a + b \frac{h+2}{2} = 0.$$

Mivel  $L_0 = 0$ ,  $L_1 = d_1 = a + b$ ,  $L_2 = L_1 + d_2 = a + b + a + 2b = 2a + 3b$ . A másik egyenletet  $a$  és  $b$  meghatározásához  $(L)$  rekurzív alakjának felhasználásával kapjuk. Eszerint

$$L_2 = \frac{L_1 - pL_0 - 1}{q} = \frac{L_1 - 1}{\frac{1}{2}} = 2L_1 - 2, \text{ így } 2a + 3b = 2a + 2b - 2. \text{ Az}$$

$$a + b \frac{h+2}{2} = 0,$$

$$2a + 3b = 2a + 2b - 2$$

egyenletrendszer megoldása  $b = -2$ ,  $a = h + 2$ , tehát  $d_i = h + 2 - 2i$ , s mivel  $L_n = \sum_{i=1}^n d_i$ , így  $L_n$

$$= (h+2)n - 2 \frac{n(n+1)}{2} = -n^2 + n + nh = n(h+1-n).$$

A  $-n^2 + nh + n$  kifejezést teljes négyzetté alakítva, a maximumot  $n \approx \frac{h+1}{2}$  helyen kapjuk, ami a pálya közepe, s amit a szemléletünk is sugall. Ha  $h = 2k - 1$  alakú páratlan szám, akkor  $n = k$ , és  $L_k = k^2$  a maximum.

**Megjegyzés:** Érdemes hangsúlyozni, hogy ha  $h = 2k - 1$  alakú, és  $n = k$  (a pálya közepe), akkor a várható lépésszám  $L_k = k^2$ . Ez a nevezetes eredmény az egyenes mentén történő bolyongási modellben azt jelenti, hogy ha a pálya széléig  $k$  mező van, akkor először átlagosan  $k^2$  lépés után ér el ide a bolyongó pont. Hasonlót kaptunk a „fej vagy írás” érmedobálási modellben is: ahhoz, hogy a fejek és írások számának eltérése (először)  $k$  legyen, átlagosan  $k^2$  dobásra van szükség (lásd **3.6.** feladat). Megfordítva annyit mondhatunk, hogy  $k^2$  dobás esetén az eltérés arányos  $k$ -val.

Azon is elgondolkozhatunk, hogy ez az eredmény mit is jelent azzal kapcsolatban, amit úgy szoktunk nevezni, hogy „a véletlen számok kiegyenlítődési hajlama” (lásd **10.1.** feladat).

*Második eset:* Ha  $p \neq q$ , akkor legyen  $p < q$ . Ekkor a karakterisztikus egyenlet két gyöke  $x_1 = \frac{p}{q}$ ,  $x_2 = 1$ . Alkalmazzuk a  $c = \frac{p}{q}$  helyettesítést, ekkor  $d_i = ac^i + b$  alakban írható. Az

egyik feltétel ismét az  $L_{h+1} = \sum_{i=1}^{h+1} d_i$  összefüggésből adódik:  $L_{h+1} = ac \left( \frac{1-c^{h+1}}{1-c} \right) + b(h+1) = 0$ .

Továbbá mivel  $L_0 = 0$ ,  $L_1 = d_1 = ac + b$ ,  $L_2 = L_1 + d_2 = ac + b + ac^2 + b = ac(c+1) + 2b$ .

A másik egyenletet ( $L$ ) rekurzív alakjából kapjuk. Eszerint

$$L_2 = \frac{L_1 - pL_0 - 1}{q} = \frac{L_1 - 1}{q} = \frac{ac + b - 1}{q}, \text{ tehát } ac(c+1) + 2b = \frac{ac + b - 1}{q}. \text{ Az}$$

$$ac \left( \frac{1-c^{h+1}}{1-c} \right) + b(h+1) = 0,$$

$$qac(c+1) + 2bq = ac + b - 1$$

egyenletrendszer megoldása  $b = -\frac{1}{q-p}$ ,  $a = \frac{h+1}{p(1-c^{h+1})}$ . Mivel  $L_n = \sum_{i=1}^n d_i$ , ezért

$$L_n = nb + ac \frac{1-c^n}{1-c} = -\frac{n}{q-p} + \frac{c(h+1)}{p(1-c^{h+1})} \left( \frac{1-c^n}{1-c} \right) = -\frac{n}{q-p} + \frac{h+1}{q-p} \cdot \frac{1-c^n}{1-c^{h+1}}.$$

A kapott eredmény meglehetősen "csúnya", legegyszerűbb - adott  $h, p, q, c$  érték esetén - számítógép segítségével meghatározni a kifejezés szélsőértékét.

### Konkrét példák:

Például  $h = 4$  hosszúságú pályán,  $p = \frac{1}{3}$ ,  $q = 1 - p = \frac{2}{3}$  ( $c = \frac{1}{2}$ ) értékeket választva annak valószínűsége, hogy a pont az  $i$ . mezőről indulva balról hagyja el a pályát, rendre  $p_1 = \frac{15}{31}$ ,  $p_2 = \frac{7}{31}$ ,  $p_3 = \frac{3}{31}$ ,  $p_4 = \frac{1}{31}$ . Látható, hogy még az első mezőről indulva is, a játék

$B$ -nek kedvező. Az "igazságos hely"  $i \approx \frac{\ln \left( \frac{1+c^{h+1}}{2} \right)}{\ln c}$  képletébe behelyettesítve  $i \approx 0,96$ .

A lépésszámok:  $L_1 = \frac{147}{31}$ ,  $L_2 = \frac{174}{31}$ ,  $L_3 = \frac{141}{31}$ ,  $L_4 = \frac{78}{31}$ . A maximális lépésszámot  $i = 2$  esetén kapjuk (a képlettel  $i \approx 1,84$ ,  $L_i = 5,64$ ).

Az alábbi táblázat az  $L_x = L(x) = -\frac{x}{q-p} + \frac{h+1}{q-p} \cdot \frac{1-c^x}{1-c^{h+1}}$  függvény szélsőértékét tartalmazza különböző  $h$  értékek mellett. A paraméterek:  $p = \frac{1}{3}$ ,  $q = 1 - p = \frac{2}{3}$  (és persze  $c = \frac{1}{2}$ ).

Pálya hossza ( $h$ )	Szélsőérték hely ( $x$ )	Felvett szélsőérték ( $L(x)$ )

2	1,25	2,21
3	1,56	3,78
4	1,84	5,64
5	2,08	7,72
6	2,29	9,97
7	2,48	12,34
8	2,64	14,79
9	2,79	17,32
10	2,93	19,89
20	3,86	47,08
30	4,43	75,40
40	4,83	104,19
50	5,14	133,24
60	5,40	162,47
70	5,62	191,81
80	5,81	221,24
90	5,98	250,73
100	6,13	280,28

**Megjegyzés:** Érdekes, hogy az "igazságos hely" és a "maximális lépésszámú hely" általában nem egyezik meg.

A bolyongásos feladatnak több általánosítása lehetséges. Megengedhetjük speciális lépésként a helyben maradási lehetőséget; lehetséges, hogy a bolyongó pont nem egy egységgel mozdul el; felvehetünk gátakat, melyekről a pont visszaverődik; a bolyongás történhet egyenes helyett síkban, előírt alakzaton stb.

**6.4. feladat (helyben maradási valószínűség):** A ferdefoci játék egy újabb változata, amikor a korong  $r$  valószínűséggel helyben marad. Ekkor a lépésszám eggyel nő, de a korong nem változtatja helyét. Rögtön általánosan tárgyaljuk a feladatot: balra  $p$ , jobbra  $q$  legyen az elmozdulási valószínűség; ekkor  $p + q + r = 1$  teljesül. A kérdések ugyanazok:

a) Mekkora valószínűséggel győz  $J$ , ha a korong kezdetben az első (második, ...) mezőn van?

b) Mennyi a játék átlagos lépésszáma?

**Megoldás:** A tetszőlegesen sok egyenletből álló egyenletrendszerek megoldása helyett most is a rekurzív sorozatok elméletét hívhatjuk segítségül.

a) A  $p_i = pp_{i-1} + rp_i + qp_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) rekurziót kell megoldanunk a  $p_0 = 1$ ,  $p_{k+1} = 0$  peremfeltételek mellett. Mivel  $p + q + r = 1$ , a  $qx^2 - (p + q)x + p = 0$  karakterisztikus egyenletet vizsgáljuk két részletben.

*Első eset:*

Ha  $p = q$ , akkor  $x_{1,2} = 1$ , ezért a  $(p)$  sorozat  $p_i = a + bi$  alakú. A  $p_0 = 1$  feltétel miatt  $a = 1$ , a  $p_{k+1} = 0$  feltétel miatt  $b = -\frac{1}{h+1}$ . A  $(p)$  sorozat explicit alakja  $p_i = 1 - \frac{i}{h+1} = \frac{h+1-i}{h+1}$ .

Ez az eredmény megegyezik azzal, amit a korábbi **6.1.** - **6.2.** feladatokban,  $r = 0$  esetben kaptunk; vagyis az egyes nyerési esélyeket nem befolyásolja az, ha a korong helyben maradhat.

*Második eset:*

Ha  $p \neq q$ , akkor legyen például  $p < q$ . Ekkor a karakterisztikus egyenlet két gyöke  $x_1 = \frac{p}{q}$ ,  $x_2 = 1$ . Legyen  $c = \frac{p}{q}$ , ekkor  $p_i = ac^i + b$  alakban írható. A  $p_0 = 1$  feltétel miatt  $a + b = 1$ ,

a  $p_{k+1} = 0$  feltétel miatt  $ac^{h+1} + b = 0$ . Innen  $a = \frac{1}{1-c^{h+1}}$  és  $b = -\frac{c^{h+1}}{1-c^{h+1}}$ . A  $(p)$  sorozat

explicit alakja  $p_n = \frac{c^n - c^{h+1}}{1-c^{h+1}}$ .

Szintén ugyanazt az eredményt kaptuk, mint az  $r = 0$  esetben.

**Vagyis:** az  $r = 0$  eset együtt tárgyalható az  $r > 0$  esettel, az egyes nyerési valószínűségek csak a  $c = \frac{p}{q}$  aránytól függenek (és nem függenek például csak pusztán  $p$ -től).

Az eredmény szemléletesen is indokolható (lásd **5.6.** megjegyzés).

**b)** Az  $L_i = 1 + pL_{i-1} + rL_i + qL_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) rekurzív összefüggést kell megoldanunk az  $L_0 = 0$ ,  $L_{h+1} = 0$  peremfeltételek mellett.

Az egyenlet átrendezésével kapott  $qL_{i+1} = (p + q)L_i - pL_{i-1} - 1$  inhomogén másodrendű rekurzió megoldásához először meg kell oldanunk a különbségsorozat által kapható homogén másodrendű rekurziót.

Definiáljuk az  $(L)$  sorozat  $(d)$  különbség-sorozatát:  $d_i := L_i - L_{i-1}$ , ( $i = 1, 2, \dots$ ). Ekkor a  $(d)$  sorozatra az érvényes összefüggés  $qd_{i+2} = (p + q)d_{i+1} - pd_i$ . Ha meg tudnánk adni  $(d)$  tagjait, akkor a

$$d_1 = L_1 - L_0,$$

$$d_2 = L_2 - L_1,$$

$$d_3 = L_3 - L_2,$$

...

$$d_{h+1} = L_{h+1} - L_h$$

egyenletrendszer összegzéséből következne  $L_{h+1} - L_0 = \sum_{i=1}^{h+1} d_i$ , és mivel  $L_0 = 0$ ,

$$L_i = \sum_{j=1}^i d_j, \text{ például } L_{h+1} = \sum_{i=1}^{h+1} d_i.$$

A  $qx^2 - (p + q)x + p = 0$  karakterisztikus egyenlet vizsgálatát ismét két részletben végezhetjük el.

*Első eset:*

Ha  $p = q$ , akkor  $x_{1,2} = 1$ , ezért a  $(d)$  sorozat  $d_i = a + bi$  alakú. Most a  $(d)$  sorozat peremfeltételeit nem ismerjük, a két állandó,  $a$  és  $b$  az  $(L)$  sorozat kezdeti feltételeinek felhasználásával határozható meg.

Először is,  $L_{h+1} = 0$ , és  $L_{h+1} = \sum_{i=1}^{h+1} d_i$  miatt  $(h + 1)a + b \frac{(h + 1)(h + 2)}{2} = 0$ , vagyis

$$a + b \frac{h + 2}{2} = 0.$$

Mivel  $L_0 = 0$ , így  $L_1 = d_1 = a + b$ ,  $L_2 = L_1 + d_2 = a + b + a + 2b = 2a + 3b$ . A másik egyenletet  $a$  és  $b$  meghatározásához ( $L$ ) rekurzív alakjának felhasználásával kapjuk. Eszerint

$$L_2 = \frac{(p+q)L_1 - pL_0 - 1}{q} = \frac{2qL_1 - 1}{q} = 2L_1 - \frac{1}{q}, \text{ így } 2a + 3b = 2a + 2b - \frac{1}{q}. \text{ Az}$$

$$a + b \frac{h+2}{2} = 0,$$

$$2a + 3b = 2a + 2b - \frac{1}{q}$$

egyenletrendszer megoldása  $b = -\frac{1}{q}$ ,  $a = \frac{h+2}{2q}$ , tehát  $d_i = \frac{h+2}{2q} - \frac{i}{q} = \frac{h+2-2i}{2q}$ , s

$$\text{mivel } L_n = \sum_{i=1}^n d_i, \text{ így } L_n = \frac{(h+2)n}{2q} - 2 \frac{n(n+1)}{2 \cdot 2q} = \frac{1}{2q} (-n^2 + n + nh) = \frac{n(h+1-n)}{2q}.$$

*Második eset:*

Ha  $p \neq q$ , akkor legyen például  $p < q$ . Ekkor a karakterisztikus egyenlet két gyöke  $x_1 = \frac{p}{q}$ ,  $x_2 = 1$ . Legyen  $c = \frac{p}{q}$ , ekkor  $d_i = ac^i + b$  alakban írható. Az egyik feltétel ismét az

$$L_{h+1} = \sum_{i=1}^{h+1} d_i \text{ összefüggésből adódik: } L_{h+1} = ac \left( \frac{1-c^{h+1}}{1-c} \right) + b(h+1) = 0. \text{ Továbbá mivel } L_0 = 0,$$

így  $L_1 = d_1 = ac + b$ ,  $L_2 = L_1 + d_2 = ac + b + ac^2 + b = ac(c+1) + 2b$ . A másik egyenlet ( $L$ )

rekurzív alakjából adódik. Eszerint  $L_2 = \frac{(p+q)L_1 - pL_0 - 1}{q} = \frac{(p+q)(ac+b) - 1}{q}$ , tehát a másik

$$\text{összefüggés } ac(c+1) + 2b = \frac{(p+q)(ac+b) - 1}{q}. \text{ Az}$$

$$ac \left( \frac{1-c^{h+1}}{1-c} \right) + b(h+1) = 0,$$

$$qac(c+1) + 2bq = (p+q)(ac+b) - 1$$

egyenletrendszer megoldása  $b = -\frac{1}{q-p}$ ,  $a = \frac{h+1}{p(1-c^{h+1})}$ . Mivel  $L_n = \sum_{i=1}^n d_i$ , ezért

$$L_n = nb + ac \frac{1-c^n}{1-c} = -\frac{n}{q-p} + \frac{c(h+1)}{p(1-c^{h+1})} \left( \frac{1-c^n}{1-c} \right) = -\frac{n}{q-p} + \frac{h+1}{q-p} \cdot \frac{1-c^n}{1-c^{h+1}}.$$

**Megjegyzések:**

1. Ha  $p = q = \frac{1}{2}$ ,  $r = 0$ , akkor természetesen visszkapjuk a **6.3.** feladat eredményét, míg

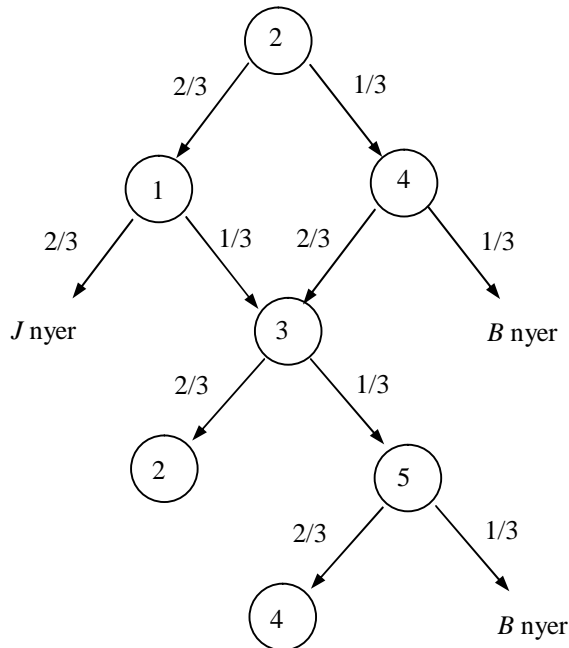
ha  $p = q < \frac{1}{2}$ , akkor az átlagos lépésszám  $\frac{1}{2q}$ -szeresére nő.

2. Formailag hasonló egyenletet kaptunk, mint a **6.3.** feladatban, de adott  $c$  és  $r$  érték mellett a  $q - p$  eltérés megváltozott.

**6.5. feladat (különböző lépéshossz):** A ferdefoci játék egy másik változata, amikor a korong nem egyforma nagyot lép jobbra, illetve balra. A következő játékban legyen a balra

lépés valószínűsége  $\frac{2}{3}$ , a jobbra lépés valószínűsége  $\frac{1}{3}$ ; viszont ha a korong jobbra lép, egy lépésben egyszerre két mezőt halad. Határozzuk meg az egyes nyerési valószínűségeket a  $h = 5$  hosszúságú pályán!

**Megoldás:** Rajzoljuk fel a szokásos jelölésekkel a játék folyamatábráját, például ha kezdetben a korong a 2. mezőn áll.



A változatosság kedvéért most  $q_i$  jelentse  $B$  nyerési esélyét az  $i$ . mezőről indulva. Ekkor az állapotdiagramhoz tartozó egyenletrendszer:

$$q_2 = \frac{2}{3}q_1 + \frac{1}{3}q_4,$$

$$q_1 = \frac{1}{3}q_3,$$

$$q_3 = \frac{2}{3}q_2 + \frac{1}{3}q_5,$$

$$q_4 = \frac{2}{3}q_3 + \frac{1}{3},$$

$$q_5 = \frac{2}{3}q_4 + \frac{1}{3}.$$

Valójában a  $q_i = \frac{2}{3}q_{i-1} + \frac{1}{3}q_{i+2}$  rekurzív összefüggést írtuk fel az  $i = 1, 2, \dots, 5$  értékekre (ekkor a fiktív 0. mező esetén  $q_0 = 0$ , a 6. és 7. mező esetében  $q_6 = q_7 = 1$ ). Az egyenletrendszer megoldása  $q_1 = \frac{21}{135}$ ,  $q_2 = \frac{43}{135}$ ,  $q_3 = \frac{63}{135}$ ,  $q_4 = \frac{87}{135}$ ,  $q_5 = \frac{103}{135}$ ; ekkora valószínűséggel nyer  $B$  az  $i$ . mezőről indulva. (Ugyanezek a valószínűségek, ha  $J$  győzelmét

vizsgáljuk:  $p_1 = \frac{114}{135}$ ,  $p_2 = \frac{92}{135}$ ,  $p_3 = \frac{72}{135}$ ,  $p_4 = \frac{48}{135}$ ,  $p_5 = \frac{32}{135}$ ;  $B$  és  $J$  győzelmi esélyei persze nem „szimmetrikusak”.)

**Megjegyzés:** A rekurzió általános megoldása  $q_i = \frac{(-2)^i + 192i - 1}{1215}$ . Ennek bizonyítása a korábbiakhoz hasonlóan történhet; csakúgy, mint az átlagos lépésszámok meghatározása.

**6.6. feladat (egyirányú ferdefoci - kitűzés):** A ferdefoci játék egy másik lehetséges változata, amikor a korong a pálya egyik széléről, például a jobb kapuról visszaverődik. (Ekkor természetesen mindig  $J$  győz.) Vizsgáljuk meg a játék átlagos lépésszámát!

**Útmutatás:** Az, hogy  $J$  kapuja helyén akadály van, azt jelenti, hogy a korong a  $h$ . mező után visszapattan, és a  $(h - 1)$ . mezőn folytatja útját. A lépésszámokra felírható rekurzív összefüggés nem változik meg, csak a  $h$ . mező után lévő akadály a peremfeltételt módosítja:  $L_h = 1 + L_{h-1}$ .

Ügyesebben is eljárhatunk a  $p = q = \frac{1}{2}$  speciális esetben. Tükrözzük a  $h$ . mezőre az 1., 2., ...,  $(h - 1)$ . mezőket, kapjuk a  $(h + 1)$ .,  $(h + 2)$ ., ...,  $(2h - 1)$ . mezőt. Tegyük fel, hogy a korong visszapattanás helyett továbblép a  $(h + 1)$ . mezőre, s a  $(2h - 1)$  hosszúságú pályát két oldalról hagyhatja el, mint a hagyományos ferdefociban! Látható, hogy ha most a  $(h - 1)$ -es és  $(h + 1)$ -es, a  $(h - 2)$ -es és  $(h + 2)$ -es stb. mezőpárokat ekvivalenseknek tekintjük, akkor a korong átlagosan ugyanannyi ideig fog ezen a  $(2h - 1)$  hosszúságú pályán tartózkodni, mint a  $h$  hosszúságú, egyirányú pályán.

Vagyis az akadállyal ellátott ferdefoci játék tárgyalása a  $p = q$  esetben visszavezethető az alapjáték vizsgálatára. (A feladat lényegesen nehezebb, ha  $p \neq q$ .)

**6.7. (kitűzött) feladat ([7], 16.43.)**  $X$ -nek  $x$ ,  $Y$ -nak  $y$  forintja van. Szabályos érmével játszanak: feldobják egymás után, és ha fejre esik,  $X$  kap  $Y$ -tól egy forintot; írás esetén viszont  $Y$  kap  $X$ -től egy forintot. A játék addig tart, amíg valamelyikük fizetése képtelenné nem válik.

- a) Mekkora a valószínűsége, hogy  $X$  megy tönkre?
- b) Átlagosan hány dobásra van szükség a játék befejezéséhez?

## 7. Bolyongások

Az 5-6. fejezet ferdefoci-játékaiban lineáris pálya mentén történő bolyongásokat vizsgáltunk; ebben a fejezetben a bolyongási pályák egyéb geometriai alakzatok lesznek.

Általában az egyes feladatokban, még a számolás megkezdése előtt érdemes megkérdeznünk a tanulóktól, hogy szerintük

- melyik esetben (honnan indulva) hagyja el leghamarabb a bolyongó pont a pályát;
- s az egyes mezőkről indulva mi az átlagos lépésszámok nagyságrendi viszonya?

A tippet próbáljuk egyenletek felírása nélkül, pusztán a „józan ész” segítségével megindokoltatni!

### Egyszerű síkbeli és térbeli bolyongások:

**7.1. feladat:** A síkbeli négyzetrács egyik mezőjében elhelyezkedő bolyongó pont mindegyik lépésében véletlenszerűen, egyenlő valószínűséggel lép a négy, élből szomszédos mező egyikére. A bolyongó pont kezdetben a 3x3-as táblázat egyik mezőjében van.

a) Átlagosan hány lépés múlva hagyja el a pont a táblázatot?

b) Mennyivel változik meg az átlagos lépésszám, ha a csúcsban érintkező négy mezőre is léphet a pont? (Tehát a szomszédsági definíciót változtattuk meg: egy mezőnek most nyolc szomszédja lehet.)

c) Mennyivel változik meg az átlagos lépésszám, ha irányfüggő valószínűséggel dolgozunk? Például balra kétszer akkora valószínűséggel lép a pont, mint a többi irányba; vagyis egyik irányba támogatott, „szélfúttá” bolyongásról van szó.

**Megoldás:** a) Ebben a játékban is 1 valószínűséggel elhagyja a pont a pályát. Az ábra szerint azonos számmal jelölt mezők ekvivalens szerepűek.

1	2	1
2	3	2
1	2	1

Jelöljük  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ -mal a táblázat elhagyásához szükséges lépések átlagos számát, ha a bolyongó pont rendre az 1., 2., illetve 3. típusú mezőkön van. A felírható egyenletrendszer:

$$L_1 = 1 + \frac{1}{2} L_2,$$

$$L_2 = 1 + \frac{1}{2} L_1 + \frac{1}{4} L_3,$$

$$L_3 = 1 + L_2.$$

Az egyenletrendszer megoldása  $L_1 = \frac{11}{4}$ ,  $L_2 = \frac{7}{2}$ ,  $L_3 = \frac{9}{2}$ ; a táblázat elhagyásához átlagosan ennyi lépésre van szükség.



**b)** A mezők ekvivalenciája nem változik meg, csak az átmeneti valószínűségek lesznek mások. Ismét jelöljük  $L_1, L_2, L_3$ -mal a táblázat elhagyásához szükséges lépések átlagos számát, ha a bolyongó pont rendre az 1., 2., illetve 3. típusú mezőkön van. Ekkor a felírható egyenletrendszer:

$$L_1 = 1 + \frac{1}{4}L_2 + \frac{1}{8}L_3,$$

$$L_2 = 1 + \frac{1}{4}L_1 + \frac{1}{4}L_2 + \frac{1}{8}L_3,$$

$$L_3 = 1 + \frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2}L_2.$$

Az egyenletrendszer megoldása  $L_1 = \frac{72}{35}$ ,  $L_2 = \frac{90}{35}$ ,  $L_3 = \frac{116}{35}$ ; a táblázat elhagyásához átlagosan ennyi lépésre van szükség.

**Megjegyzés:** Érdekeséggéppen:  $L_1, L_2$  és  $L_3$  is kevesebb, mint **a)**-ban; a több lehetséges mozgási irány miatt könnyebb lejutni a pályáról.

**c)** Az **a)** feladatbeli 4 irányú szomszédság-definícióval oldjuk meg a feladatot. Az ekvivalens állapotok és az egyenletek az  $\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}$ , valószínűségekkel a következők ( $L_1, L_2, \dots, L_6$  jelentése hasonló **a)**-hoz és **b)**-hez):

1	3	5
2	4	6
1	3	5

$$L_1 = 1 + \frac{1}{5}L_2 + \frac{1}{5}L_3,$$

$$L_2 = 1 + \frac{2}{5}L_1 + \frac{1}{5}L_4,$$

$$L_3 = 1 + \frac{2}{5}L_1 + \frac{1}{5}L_4 + \frac{1}{5}L_5,$$

$$L_4 = 1 + \frac{2}{5}L_2 + \frac{2}{5}L_3 + \frac{1}{5}L_6,$$

$$L_5 = 1 + \frac{2}{5}L_3 + \frac{1}{5}L_6,$$

$$L_6 = 1 + \frac{2}{5}L_4 + \frac{2}{5}L_5.$$

Az egyenletrendszer megoldása:  $L_1 \approx 2,22$ ,  $L_2 \approx 2,73$ ,  $L_3 \approx 3,36$ ,  $L_4 \approx 4,22$ ,  $L_5 \approx 3,13$ ,  $L_6 \approx 3,94$ . Láthatjuk, hogy a tábla bal széléhez közelebbi mezők esetén csökkent, a jobb oldaliaknál pedig megnőtt az átlagos lépésszám.

**7.2. feladat:** Egy bolyongó pont kezdetben a  $2 \times 2 \times 2$ -es kocka egyik egységkockájában van. Minden lépésében a hat lehetséges oldallap közül véletlenszerűen választ egyet, s a lapon keresztül átmegy a szomszéd egységkockába vagy kijut a kocka felszínére. Átlagosan hány lépés múlva kerül ki a pont a  $2 \times 2 \times 2$ -es kocka felszínére?

**Megoldás:** A térbeli szimmetriaviszonyok miatt a  $2 \times 2 \times 2$ -es kocka egységkockái ekvivalensek egymással. A szimmetriák miatt az egyenletet közvetlen „logikai rekurzióval” is felírhatjuk:  $L = 1 + \frac{1}{2}L$ , s a megoldás  $L = 2$ .

**Megjegyzés:** A feladat megoldása - formailag és számszerűen is - ugyanaz, mint a  $2 \times 2$ -es táblázatbeli bolyongás esetén. **Érdekes kérdés**, hogy vajon a 2- és 3-dimenziós feladattal analóg  $n$ -dimenziós esetben is ( $n > 3$ ) ugyanezt az eredményt kapjuk?

**7.3. feladat:** Hogy legyen egyéb összehasonlító adatunk is, oldjuk meg a **7.1.** feladattal analóg térbeli problémát, vagyis:

Egy bolyongó pont kezdetben a  $3 \times 3 \times 3$ -as kocka egyik egységkockájában van. Minden lépésében a hat lehetséges oldallap közül véletlenszerűen választ egyet, s a lapon keresztül átmegy a szomszéd egységkockába vagy a nagy kocka felszínére. Átlagosan hány lépés múlva jut ki a pont a  $3 \times 3 \times 3$ -as kocka felszínére?

**Megoldás:** 4 irányú szomszédságot vizsgálunk. Négy különböző helyzetben lehet a bolyongó pont: csúcs, élközép, lapközép és testközép. Az állapotokat ebben a sorrendben rendre 1, 2, 3, 4 számokkal jelölve

$$L_1 = 1 + \frac{1}{2}L_2,$$

$$L_2 = 1 + \frac{1}{3}L_1 + \frac{1}{3}L_3,$$

$$L_3 = 1 + \frac{2}{3}L_2 + \frac{1}{6}L_4,$$

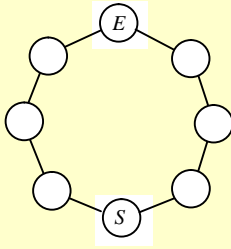
$$L_4 = 1 + L_3.$$

Az egyenletrendszer megoldása  $L_1 = \frac{44}{17}$ ,  $L_2 = \frac{54}{17}$ ,  $L_3 = \frac{67}{17}$ ,  $L_4 = \frac{84}{17}$ . Más eredményt kaptunk, mint a **7.1.** feladat  $3 \times 3$ -as síkbeli bolyongásakor.

### Bolyongások adott geometriai alakzatokon:

**7.4. feladat (kitűzés):** Egy szabályos nyolcszög alakú pálya két szemköztes csúcsában egy egér és egy sajtdarab van. Adott időközönként az egér átmegy egy szomszédos csúcsba a sokszög valamelyik oldala mentén. (A sajtot nem látja, útválasztása véletlenszerű.) Átlagosan hány lépés múlva találja meg a sajtot?

**Útmutatás:** Nevezzük  $i$ . állapotnak azt a helyzetet, amikor az egér-sajt távolság  $i$  egység (egységnyi hosszúnak tekintjük a szabályos nyolcszög egy élét); a kérdés ekkor  $L_4$ .



Vegyük észre, hogy a probléma ugyanaz, mint a ferdefoci alapfeladat, azzal a módosítással, hogy a sajt helyzetét jellemző  $S$  állapotot egyszerre tekintjük a 0. és a 8. állapotnak is. (Az analógiára érdemes a feladat megoldása rákérdezni.)

**Megjegyzés:** Az analógia átvitele szabályos  $2k$ -szögre nem okoz gondot, de szabályos  $(2k + 1)$ -szög esetén kissé megváltozik a helyzet. Ekkor a második peremfeltétel  $L_k = 1 + \frac{1}{2}L_{k-1} + \frac{1}{2}L_k$ , s az eredmény:  $L_n = n(2k + 1 - n)$ .

**7.5. feladat:** Egy szabályos nyolcszög alakú labirintus egyik csúcsában egy egér, másik csúcsában egy sajt darab van. Az egér nem látja a sajtot; minden lépésben a nyolcszög oldalai vagy átlói közül véletlenszerűen választ egyet, és az utat csúcstól csúcsig végigjárja (tehát például a második lépésben visszatérhet a kiindulási helyére).

- Mekkora annak a valószínűsége, hogy az egér nem találja meg a sajtot?
- Átlagosan hány lépés múlva találja meg az egér a sajtot?
- Átlagosan mennyi időre van szüksége az egérnek, míg az összes csúcsot sikerül átkutatnia?
- Mennyivel csökken a keresési idő, ha az egér intelligensebb, és visszafelé nem keres? (Tehát minden, a kezdetitől különböző lépésben hat irány közül választ.)

**Előzetes megjegyzés:** Ismét hangsúlyozzuk, hogy módszertani szempontból még a számolás megkezdése előtt érdemes megkérdeznünk a tanulóktól, hogy például

- mennyiben változik a helyzet (az előző feladathoz képest);
- mekkora átlagos lépésszámokra tippelnek (s milyen indokokkal);
- ismernek-e alkalmazható analógiákat stb.

**Megoldás:** A csúcsok szerepe szimmetrikus. Az egér bármely csúcsból  $\frac{1}{7}$  valószínűséggel találja meg a sajtot, illetve  $\frac{6}{7}$  valószínűséggel egy másik csúcsba jut.

**a)** Annak a valószínűsége, hogy az egér az  $N$ . lépésig nem találja meg a sajtot,  $\left(\frac{6}{7}\right)^N$ . Ez az érték a lépésszám növekedtével nullához tart, tehát az egér előbb-utóbb 1 valószínűséggel rátalál a sajtra.

**b)** Jelöljük  $L$ -lel a sajt megtalálásához szükséges átlagos lépésszámot. Az egér az alaphelyzetből vagy  $\frac{1}{7}$  valószínűséggel egy lépésben célt ér, vagy  $\frac{6}{7}$  valószínűséggel lép egyet és egy másik csúcsba kerül. Ez az

állapot a kiindulási helyzettel ekvivalens, innen továbbra is  $L$  a sajt megtalálásához szükséges átlagos lépésszám. Ennek alapján a felírható rekurzív összefüggés:  $L = \frac{1}{7} + \frac{6}{7}(1 + L)$ , s ennek megoldása  $L = 7$ .

A sajt megtalálásához szükséges átlagos "idő" tehát 7 lépés.

c) Színezzük be a csúcsokat: legyen például piros színű az a csúcs, ahol már járt az egér, és legyen kék, ahol még nem. Kezdetben egy csúcs piros, ahol az egér áll, a többi hét kék színű. Az első lépésével az egér mindenféleképpen "pirosra színez" egy csúcsot. A második lépés már kétféle lehet:  $\frac{1}{7}$  valószínűséggel piros

csúcsba vezető élt választ az egér,  $\frac{6}{7}$  valószínűséggel kék csúcsba vezetőt. (Ekkor 3 piros és 5 kék csúcs lesz.)

Általában ha a kék csúcsok száma  $i$ ,  $\frac{i}{7}$  valószínűséggel kék,  $\frac{7-i}{7}$  valószínűséggel piros csúcsot választ az egér. (Itt kihasználtuk, hogy az egér mindig piros csúcson áll.) Jelöljük  $L_i$ -vel azt az átlagos lépésszámot, ami az összes csúcs pirosra színezéséhez szükséges, ha még  $i$  darab kék van közöttük. A feladat  $L_7$  meghatározása.

Ha a kék csúcsok száma  $i$ ,  $\frac{i}{7}$  valószínűséggel kék csúcsot választ az egér. Ekkor történt egy lépés, és  $(i - 1)$  kék

csúcs maradt; az ezek „színezéséhez” szükséges lépésszám  $L_{i-1}$ . Ha  $\frac{7-i}{7}$  valószínűséggel piros csúcsot választ az egér, akkor lép egyet, és továbbra is átlagosan  $L_i$  lépésre van szüksége. Ez alapján az  $L_i = \frac{i}{7}(1 + L_{i-1}) + \frac{7-i}{7}(1 + L_i)$  véges rekurziót írhatjuk fel ( $i = 1, 2, \dots, 7$  és  $L_0 = 0$ ).

A képlet átalakítása után az  $L_i = L_{i-1} + \frac{7}{i}$  formulát kapjuk, ahonnan  $L_7 = \sum_{i=1}^7 \frac{7}{i} = 32,15$ ; ennyi a csúcsok bejárásához szükséges átlagos lépésszám.

d) Ha az egér intelligensebben keres, akkor az alaphelyzetből  $\frac{1}{7}$  valószínűséggel találja meg a sajtot, a későbbi

állapotokból viszont  $\frac{1}{6}$  valószínűséggel (visszafelé nem keres). A felírható egyenletrendszer:

$$L_s = 1 + \frac{6}{7}L_s,$$

$$L = 1 + \frac{5}{6}L.$$

Az egyenletrendszer megoldása  $L = 6$  és  $L_s = \frac{43}{7}$ ; majdnem egy lépéssel kevesebb, mint az unintelligens keresés lépésszáma.

**Megjegyzés:** Az egyes feladatokkal korábban már találkozhattunk a tárgyalt típuspéldák között. A **b)** feladatban a sajt megtalálásához szükséges átlagos lépésszám analógiája például a **2.6.** feladatban tárgyalt visszatevéses sorsolási modell; míg a **c)** feladatban az összes csúcs bejárásához szükséges lépésszám a **4.1.** konform stratégiájú golyójáték közvetlen alkalmazása.

**7.6. feladat:** Válaszoljuk meg az előző feladat **b) - d)** kérdéseit nyolcszög helyett szabályos  $n$ -szög alakú labirintusra!

**Megoldás:** A csúcsok szerepe szimmetrikus. Az egér bármely csúcsból  $\frac{1}{n-1}$  valószínűséggel találja meg a sajátot, illetve  $\frac{n-2}{n-1}$  valószínűséggel egy másik csúcsba jut.

b) Az átlagos lépésszámra  $L = \frac{1}{n-1} \cdot 1 + \frac{n-2}{n-1}(1+L)$ , ahonnan  $L = n-1$ .

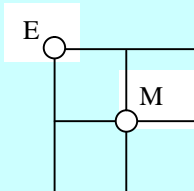
c) Ha az egér intelligensebben keres, akkor az alaphelyzetből  $\frac{1}{n-1}$  valószínűséggel találja meg a sajátot, a későbbi állapotokból viszont  $\frac{1}{n-2}$  valószínűséggel (visszafelé nem keres). A felírható egyenletrendszer:

$$L_s = 1 + \frac{n-2}{n-1}L,$$

$$L = 1 + \frac{n-3}{n-2}L.$$

Az egyenletrendszer megoldása  $L = n-2$  és  $L_s = \frac{n^2 - 3n + 3}{n-1}$ .

**7.7. feladat:** Egy 2x2-es négyzetrács alakú pálya egyik csúcsában egy egér, a középső rácsponton pedig egy macska van. Az egér és a macska nem látja egymást; egyenlő időközönként az élből szomszédos pontok közül véletlenszerűen kiválasztanak egyet, és az él mentén megteszik az utat (tehát például a második lépésben visszatérhetnek a kiindulási helyükre). Átlagosan hány lépés múlva találkoznak?

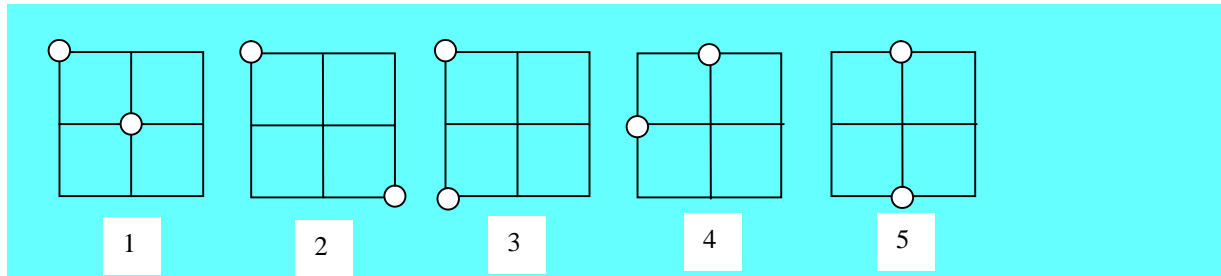


**Megoldás:** Ha az egyes rácspontokat megkülönböztetnénk, a macska is és az egér is 9 helyen lehetne, ez 81 különböző állapotot jelent. Ha kihagyjuk a találkozásokot, még mindig 72 helyzet marad. Tovább csökkenthetjük az állapotok számát, ha észrevesszük, hogy a macska-egér megkülönböztetés a feladat szempontjából nem

lényeges; így marad  $\binom{9}{2} = 36$  állapot. Még két észrevételt tehetünk. Az egyik, hogy a táblázat geometriai

szimmetriaviszonyai miatt (tükrözés, forgásszimmetria) is jelentősen lecsökken a lehetséges állapotok száma; a másik észrevétel pedig, hogy vannak olyan helyzetek, amelyek nem jöhetnek létre.

Jelöljük meg a rácspontokat koordinátákkal, legyen például a bal alsó pont az origó, ekkor a jobb felső pont koordinátái (2, 2). Észrevehetjük, hogy a koordináták összegének paritása lépésenként változik. Kezdetben az egér és a macska helykoordinátáinak összege is páros; az első lépés után mindkettőnek páratlan lesz, a második lépés után ismét páros stb. Vagyis nem állhat elő olyan állapot, amikor az egér és a macska helykoordinátái összegének paritása különböző. Ennek alapján összesen öt különböző állapot lehetséges:



Az 1., 2., 3. állapotokból bizonyos valószínűségekkel csak a 4., 5. állapotokba kerülhetünk (esetleg a macska elkapta az egeret); és fordítva, a 4., 5. állapotokból csak az 1., 2., 3. állapotokba juthatunk. A feladat  $L_i$ -et kérdezi. Az ezek alapján felírható egyenletrendszer:

$$L_1 = 1 + \frac{1}{2}L_4 + \frac{1}{4}L_5,$$

$$L_2 = 1 + \frac{1}{2}L_4 + \frac{1}{2}L_5,$$

$$L_3 = 1 + \frac{1}{2}L_4 + \frac{1}{4}L_5,$$

$$L_4 = 1 + \frac{2}{9}L_3 + \frac{1}{9}L_2 + \frac{4}{9}L_1,$$

$$L_5 = 1 + \frac{2}{9}L_3 + \frac{2}{9}L_2 + \frac{4}{9}L_1.$$

Az egyenletrendszer megoldása:  
 $L_1 = L_3 = \frac{726}{148} \approx 4,91, \quad L_2 = \frac{234}{37} \approx 6,32, \quad L_4 = \frac{184}{37} \approx 4,97, \quad L_5 = \frac{210}{37} \approx 5,68.$

**7.8. (kitűzött) feladat:** Készítsünk a 7.4 - 7.7. feladatokkal analóg térbeli problémákat!

## Ki nevet a végén? - problémakör

A fenti alcímben jelzett feladattípus az egyirányú bolyongások egy speciális fajtájára utal. Ezekben a játékokban az egyirányban haladó, diszkrét bolyongást végző pont adott nagyságú lépéseket adott valószínűséggel tesz meg, s arra a kérdésre keressük a választ, hogy a pont mekkora eséllyel lép valamely mezőre.

[12]-ből származik a következő feladat:

Mindenki ismeri a „Ki nevet a végén” játékot, ahol pontosan a célmezőre kell lépni a győzelemhez. Ha a cél pontosan a 100. mező és egy dobókockával játszunk, akkor eltekintve a kiütéstől vagy egyéb trükköktől, mekkora eséllyel fogunk pontosan a 100-as mezőre lépni a

végén:  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{2}{7}$  vagy  $\frac{1}{2}$ ?

Ezt a feladatot később kitűzzük (9. fejezet: Számítástechnikai támogatás, **9.24.** feladat), s egyszerű számítógépes szimulációt, illetve algoritmust adunk megoldásként. Most egyszerűbb feladatokat vizsgálunk meg.

**7.9. feladat:** Az egyszerű „Ki nevet a végén”-típusú játékban a bábuval a 0. mezőről indulunk, s minden lépésben véletlenszerűen 1-et vagy 2-t lépünk előre. (Mindig feldobunk egy érmét; ha a dobás írás, akkor 1-et, ha pedig fej, akkor 2-t lépünk.) Mekkora valószínűséggel lépünk rá a 100-as mezőre?

**Megoldás:** Jelentse  $p_i$  annak a valószínűségét, hogy a játékban az  $i$ -edik mezőre lépünk. Ez a valószínűség a fiktív 0. mezőre  $p_0 = 1$ , az 1. mezőre  $p_1 = \frac{1}{2}$ , a 2. mezőre  $p_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$  (hiszen a második mezőre vagy az első, vagy a nulladik mezőről léphetünk, mindkettőről  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel); a 3. mezőre  $p_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$  (a harmadik mezőre vagy a második, vagy az első mezőről léphetünk, mindkettőről  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel). Általában is felírhatjuk a  $p_n = \frac{1}{2} p_{n-1} + \frac{1}{2} p_{n-2}$  rekurziót, ha  $n \geq 2$ .

A karakterisztikus egyenlet  $2x^2 - x - 1 = 0$ , ennek két gyöke  $x_1 = 1$  és  $x_2 = -\frac{1}{2}$ . A  $(p)$  sorozat explicit alakja

$$p_n = A + B \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \text{ ahol az } A \text{ és } B \text{ konstansokat a kezdeti feltételekből határozhatjuk meg.}$$

Az  $n = 0$  helyettesítéssel  $A + B = 1$ , az  $n = 1$  helyettesítéssel  $A - \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$ . Az egyenletrendszer megoldása

$$(A, B) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \text{ vagyis } p_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\text{Ellenőrzésképpen: } p_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}, \quad p_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{8}.$$

A századik mezőre  $p_{100} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{100}$  valószínűséggel lépünk, ami igen jó közelítéssel  $p_{100} = \frac{2}{3}$ .

**7.10. feladat:** Az előző „Ki nevet a végén”-játékot annyiban módosítjuk, hogy most minden lépésben véletlenszerűen 1-et, 2-t vagy 3-at lépünk, mindegyiket  $\frac{1}{3}$  valószínűséggel. Mekkora valószínűséggel lépünk rá a 100-as mezőre?

**Megoldás:** Jelentse  $p_i$  annak a valószínűségét, hogy a játékban az  $i$ -edik mezőre lépünk. Néhány kezdeti érték:  $p_0 = 1$ ,  $p_1 = \frac{1}{3}$ ,  $p_2 = \frac{4}{9}$ ,  $p_3 = \frac{16}{27}$ . Általában is felírhatjuk a  $p_n = \frac{1}{3} p_{n-1} + \frac{1}{3} p_{n-2} + \frac{1}{3} p_{n-3}$  rekurziót, ha  $n \geq 3$ . (Minden mezőre az előtte lévő három mező valamelyikéről léphetünk, egyforma  $\frac{1}{3}$  valószínűséggel).

A rekurzív sorozat karakterisztikus egyenlete  $3x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ , ennek három gyöke  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{3}$  és

$x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{2}}{3}$ . (Az utóbbi kettő komplex gyök.) Innen a  $(p)$  sorozat explicit alakja

$p_n = A + B \cdot \left(\frac{-1 + i\sqrt{2}}{3}\right)^n + C \cdot \left(\frac{-1 - i\sqrt{2}}{3}\right)^n$ , ahol az  $A$ ,  $B$  és  $C$  konstansokat a kezdeti feltételekből

határozhatjuk meg.

Az  $n = 0$  helyettesítéssel  $A + B + C = 1$ , az  $n = 1$  helyettesítéssel  $A - \frac{B}{3} - \frac{C}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{3}(B - C) = \frac{1}{3}$ . A

második egyenletben a képzetes rész eltűnik, így  $B = C$  következik; ekkor tehát a két egyenlet  $A + 2B = 1$  és

$A - \frac{2B}{3} = \frac{1}{3}$  alakú. Ennek megoldása  $(A, B, C) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ , vagyis

$$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{-1 + i\sqrt{2}}{3}\right)^n + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{-1 - i\sqrt{2}}{3}\right)^n.$$

Ellenőrzésképpen:  $p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{-1 + i\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{-1 - i\sqrt{2}}{3}\right)^2 =$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1 - 2 - 2i\sqrt{2}}{9} + \frac{1 - 2 + 2i\sqrt{2}}{9}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{18} = \frac{4}{9}.$$

A századik mezőre  $p_{100} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{-1 + i\sqrt{2}}{3}\right)^{100} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{-1 - i\sqrt{2}}{3}\right)^{100}$  valószínűséggel lépünk, ami igen

jó közelítéssel  $p_{100} = \frac{1}{2} \cdot \left(A \left(\frac{-1 + i\sqrt{2}}{3}\right)^n + \left(\frac{-1 - i\sqrt{2}}{3}\right)^n\right)$  komplex számok abszolútértéke 0-hoz tart.)

**7.11. (kitűzött) feladat (KöMaL F.3042.):** Egy a Ki nevet a végén?-hez hasonló játékban egy bábuval legalább 100 lépést kell megtenni. Egyszerre véletlenszerűen 1, 2, 3 vagy 4 mezővel léphetünk tovább. Jelölje  $p_n$  annak a valószínűségét, hogy rálépünk az  $n$ -edik mezőre. (A bábu a nulladik mezőről indul.) Bizonyítsuk be, hogy  $0,399\ 999 < p_{100} < 0,400\ 001$ .

### Vegyes feladatok

**7.12. (kitűzött) feladat:** A bolyongó pont kezdetben a  $2 \times 3$ -as táblázat egyik mezőjében van.

**a)** Átlagosan hány lépés múlva hagyja el a pont a táblázatot?

**b)** Mennyivel változik meg a lépésszám, ha a táblázatot csak balról hagyhatja el a pont? (A másik három irányban a tábla szélén gát van; ezekhez érve a pont „visszapattan”.)



c) Mennyivel változik meg az átlagos lépésszám, ha a csúcsban érintkező négy mezőre is léphet a pont? (Tehát a szomszédsági definíciót változtattuk meg: egy mezőnek most nyolc szomszédja lehet.)

d) Mennyivel változik meg az átlagos lépésszám, ha balra kétszer akkora valószínűséggel lép a pont, mint a többi irányba? (Vagyis irányfüggő valószínűséggel dolgozunk: „szélfúttá” bolyongásról van szó.)

e) Vizsgáljuk meg a fenti egyszerű kétdimenziós problémákat  $2 \times 4$ -es,  $2 \times 5$ -ös stb. alakú táblákra is!

**7.13. (kitűzött) feladat:** Egy kocka élein bolyongó pók az egyik csúcsból indul, és a kocka szemközti csúcsában lévő légyhez igyekszik. Minden lépésben egy élt csúcstól-csúcsig jár végig, s minden csúcsban a lehetséges 3 irányból véletlenszerűen választja ki a továbbhaladási irányt (akár visszafelé is mehet az előző lépéséhez képest).

a) Átlagosan hány lépés múlva éri el a legyet?

b) Mihez kell több idő (lépés): ahhoz, hogy a légyhez érjen, vagy ahhoz, hogy visszatérjen a kiindulási helyére?

c) Átlagosan hány lépés kell a póknak, hogy a kocka összes csúcsát bejárja?

d) Mennyivel csökken a keresési (bejárási) idő, ha a pók intelligensebb, és visszafelé nem keres? (Tehát minden, a kezdetitől különböző lépésben már csak két irány közül választ.)

**7.14. (kitűzött) feladat:** Az előző feladat a) részét (pók keresi a legyet) annyiban módosítjuk, hogy most a légy is véletlenszerű mozgást végez, hasonlóan a pókhoz. Átlagosan hány lépés múlva találkoznak?

**7.15. (kitűzött) feladat:** Egy kocka hét csúcsában egy-egy bogár, a nyolcadik csúcsban pedig egy pókháló van. Adott jelre a bogarak azonos sebességű, véletlenszerű bolyongást végeznek a kocka élein. Minden lépésben egy élt csúcstól-csúcsig végigjárnak, s minden csúcsban a lehetséges 3 irányból véletlenszerűen választják ki a továbbhaladási irányt (akár visszafelé is mehetnek az előző lépésükhöz képest). Ha egy bogár a pókhálóba kerül, akkor onnan már nem tud elszabadulni. Átlagosan mennyi idő múlva kerül az összes bogár a pókhálóba?

**7.16. (kitűzött) feladat:** Egy bolyongó pont kezdetben a  $2 \times 2 \times n$ -es kocka egyik egységkockájában van. Minden lépésében a hat lehetséges oldallap közül véletlenszerűen választ egyet, s a lapon keresztül átmegy a szomszéd egységkockába, vagy kijut a kocka felszínére. Átlagosan hány lépés múlva kerül ki a pont a  $2 \times 2 \times n$ -es kocka felszínére, ha

a)  $n = 3$ ;

b)  $n = 4$ ;

c)  $n = 5$ ?

## 8. Vegyes feladatok

Ebben a fejezetben néhány általános jellegű észrevételt teszünk; megválaszolunk korábban felvetődött problémákat, s megismerkedünk Conway nevezetes algoritmusával. A tárgyalt feladatok egy része nehezebb fogalmakat vagy módszereket használ, így ezt a fejezetet kiegészítő anyagnak szánjuk.

**8.1. feladat:** Milyen kapcsolat áll fenn az eddig ismertetett, különböző típusú játékok között?

**Útmutatás:** A cikkben tárgyalt játékok nagy része szorosan kapcsolódik egymáshoz, ezeket a kapcsolódási pontokat alkalmanként jeleztük is. A kimerítő válasz helyett gondoljuk meg a következő - korábban már jelzett - kapcsolatokat, leszűkítve például a ferdefoci játéokra:

- a) ferdefoci és egydimenziós bolyongás;
- b) ferdefoci gáttal és bolyongás sokszögön;
- c)  $p = q = \frac{1}{2}$  paraméterű ferdefoci és érmedobálás;

Érdemes átgondolni:

- d) ferdefoci és sorsolások (például a visszatevéses sorsolás az állandó valószínűségű ferdefoci-játéknak felel meg);
- e) ferdefoci és statisztikus golyójátékok (például a színpárbaj felfogható egy változó valószínűségű ferdefoci-játéknak);
- f) ehhez kapcsolódóan a sorsolási modellek és statisztikus golyójátékok.

**8.2. feladat:** Milyen megoldási módszereket alkalmazhatunk akkor, ha sok (igen sok) állapotot kell vizsgálnunk?

**Útmutatás:**

1. Legkevesebb előismeretet igényel az egyenletrendszerek használata. Ha nagyszámú egyenletünk van, segítségül hívhatjuk a számítógépet. (Például gépi számítás eredménye a 6.3. feladat táblázata.)
2. Szerencsés esetben alkalmazhatjuk a „logikai rekurzió” módszerét. (Például 2.1. harmadik megoldása, vagy 5.1. b) második megoldása.) Erre egy további példa a következő 8.3. feladat megoldása is.
3. Előzetes felkészülést igényel a rekurziók alkalmazása. Sajnos, teljes körben nem alkalmazhatók, megoldásuk néha reménytelenül nehéz. Ha nem ismerjük például egyes színpárbaj-típusú rekurziók általános megoldását, akkor kisszámú golyóval vagyunk kénytelenek kitézni a játékot.
4. Egy eddig nem ismertetett lehetőség a mátrix-reprezentáció alkalmazása. Ekkor az átmeneti valószínűségeket folyamatábra helyett egy mátrixszal adjuk meg, s a mátrixműveletek segítségével kezeljük a problémát. Az  $[A]$  mátrix  $a_{i,j}$  eleme  $p_{i,j}$ , vagyis annak a valószínűsége, amellyel az  $i$ . állapotból a  $j$ . állapotba jutunk. Elképzelhető, hogy ezzel a témakörrel kibővíthetjük a későbbiekben ezt a cikket, az érdeklődőknek a [4] szakirodalom ajánlható.

Konkrét példaként a  $h = 3$  hosszú pálya  $\frac{1}{3}$  és  $\frac{2}{3}$  paraméterű ferdefoci játékának a mátrixa:

	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	1/3	0	2/3	0	0
2	0	1/3	0	2/3	0
3	0	0	1/3	0	2/3
4	0	0	0	0	1

**8.3. feladat:** A bolyongások egy alkalmazása lehet a következő általános probléma: átlagosan hány lépésben jutunk el adott gráf egyik csúcsából a másikba? (A bolyongás csúcstól-csúcsig történik, az éleket minden csúcsban véletlenszerűen választva.)

Ebben a feladatban most egyszerű láncokat vizsgálunk (egyetlen útból álló,  $n$  pontú,  $n - 1$  élű fagráfokat); s a „logikai rekurzió” módszerét alkalmazzuk.

**Megoldás: a)** Ha  $n = 3$ , akkor kérdés, hogy az 1. csúcsból a 3. csúcsba átlagosan hány lépésben jutunk el. (Vagyis hány lépés kell a gráf éleinek a bejárásához.) Jelöljük ezt a keresett lépésszámot  $L$ -l.

Az 1. lépésben 2-be kerülünk; innen vagy  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel 3-ba jutunk, vagy  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel 1-be

(ahonnan továbbra is  $L$  lépésre van szükség). Innen  $L = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + L)$ ; ahonnan  $L = 4$ .

**b)** Ha  $n = 5$ , akkor a 3. csúcsba átlagosan 4 lépés szükséges **a)** miatt. Innen további 4 lépésben vagy  $\frac{1}{2}$

valószínűséggel 3-ba jutunk, vagy  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel 1-be, ahonnan további  $L$  lépés szükséges. Vagyis  $L = 4 +$

$\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot (4 + L)$ ;  $L = 16$ .

**c)** Ha  $n = 4$ , új változót vezetünk be.  $H$  jelentse a táv teljesítéséhez szükséges átlagos lépésszámot, ha a 3. csúcsban vagyunk ( $L$  jelentése hagyományosan ugyanez, ha az első csúcsból indulunk). Ekkor egyrészt  $L = 4 +$

$H$  **a)** miatt, másrészt  $H = 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} L + \frac{1}{2} H \right)$ , innen  $H = 5$ ,  $L = 9$ .

És hasonlóan haladhatunk tovább. (Persze a kapott értékekre ráismerhetünk a ferdefoci és a lineáris bolyongás lépésszámaiból.)

**Megjegyzés:** Az általános gráfelméleti feladat egyes speciális esetei nem nehezek. Már korábban is láttunk példát gráfokon történő bolyongásokra (például szabályos  $n$ -szög vagy teljes gráf), további egyszerű eseteket önállóan is konstruálhatunk. (Könnyen tárgyalható például az  $n$ -ágú csillag.)

**8.4. feladat:** A Markov-láncokat akkor alkalmazhatjuk, ha bármely állapot bekövetkezésének valószínűsége csak az öt közvetlenül megelőző állapottól függ. Mit tehetünk akkor, ha egy állapot bekövetkezése például két korábbi állapottól függ?

**Útmutatás:** Módosítani kell az állapotteret. Az alábbiakban ezt egy konkrét példán végezzük el.

Tegyük fel, hogy egy országban a választásoknak két lehetséges kimenetele van: vagy az  $A$ , vagy a  $B$  párt győz. Az utolsó 30 választás eredményei a következők:

$A A B A A B B A B B A B B B A B A B B A B A A B A B B A B B$ .

Szeretnénk megjósolni a további választások kimenetelét. Mit tegyünk?

**Első közelítésben** tegyük fel, hogy csak a legutolsó választás eredménye befolyásolja a következő választás kimenetét. Ekkor a két állapottól ( $A$  és  $B$ ) álló Markov-lánc állapotvalószínűség-mátrixa:

	<b>A</b>	<b>B</b>
<b>A</b>	3/29	10/29
<b>B</b>	9/29	7/29

(Itt például a  $\frac{3}{29}$  érték úgy értendő, hogy a 29 vizsgált átmenetben 3-szor fordult elő, hogy az A párt ismételti tudott, így az  $A \rightarrow A$  átmenet valószínűsége  $\frac{3}{29}$ .)

**Pontosabb közelítést** kapunk, ha feltesszük, hogy az utolsó két év választási eredménye befolyásolja a kimenetelt. (Erre a helyzetre vonatkozott a feladat eredeti kérdése.) Ekkor négy állapotot veszünk fel: AA, AB, BA, BB, s értelemszerűen ezek táblázatát (vagy folyamatábráját) készítjük el:

	AA	AB	BA	BB
AA	0	3/28	0	0
AB	0	0	4/28	6/28
BA	2/28	7/28	0	0
BB	0	0	5/28	1/28

Az eljárás tovább folytatható. A modell közelítése egyre pontosabb lesz, de a számítások egyre bonyolultabbak.

**8.5. feladat:** Többször említettük, hogy a cikkben szereplő játékok 1 valószínűséggel véget érnek. Mi ennek a magyarázata?

**Útmutatás:** Ún. elnyelő Markov-láncokkal foglalkoztunk. A definíció azt jelenti, hogy a láncban vannak elnyelő állapotok, amelyekből nem lehet másik állapotba eljutni (vagyis vége a játéknak); és bármely más állapotból el lehet jutni valamely elnyelő állapotba. Egy tétel szerint elnyelő Markov-láncban a folyamat mindig 1 valószínűséggel lezárul.

A gondolatmenet lényegét egy konkrét példán mutatjuk meg; tekintsük például a  $h = 5$  hosszú pálya  $p = \frac{1}{3}$  és  $q = \frac{2}{3}$  paraméterű ferdefoci játékát.

B						J
0	1	2	3	4	5	6
		$p$		$q$		

Minden  $i$  állapotból (játémezőről) el lehet jutni a 0 vagy 6 elnyelő állapotokba. Az ehhez szükséges minimális lépésszámot jelöljük  $L_i$ -vel (most  $L_1 = L_5 = 1, L_2 = L_4 = 2, L_3 = 3$ ). Legyen továbbá  $p_i$  annak a valószínűsége, hogy az  $i$ . állapotból kiindulva a folyamat  $L_i$  lépés után nem zárult le; nyilván  $p_i < 1$ . (Konkrétan például  $p_2 < \frac{8}{9}$ ,

hiszen már két balra lépés is  $\frac{1}{9}$  valószínűséggel következik be.) Legyen  $L$  az  $L_i$ -k és  $P$  a  $p_i$ -k legnagyobbika.

Annak valószínűsége, hogy a folyamat nem zárul le,  $L$  lépés után kisebb  $P$ -nél,  $2L$  lépés után kisebb  $P^2$ -nél stb. Mivel  $P < 1$ , a valószínűségek valóban 0-hoz tartanak.

Becsülhetünk sokkal durvábban is. A játék például mindig véget ér, ha bármikor (legfeljebb) 5 egymás utáni balra lépés következik. Ennek valószínűsége  $\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{273}$ . Hogy semelyik  $5N$  számú lépésben sem történik ez meg, annak valószínűsége kisebb, mint  $\left(\frac{272}{273}\right)^N$ , ami 0-hoz tart.

## A Conway-algoritmus

Az alább vázolt algoritmus elegáns eljárást mutat arra, hogy hogyan tudjuk az érmédobálásos játékok (lásd 3. fejezet) átlagos lépésszámát és győzelmi valószínűségeit egyszerűen meghatározni. (Ezzel a módszerrel számoltuk ki például a **8.13.** és **8.14.** feladatok táblázatainak értékeit, vagy a **8.15.** feladatbeli eredményeket is.) A szellemes algoritmus Conway amerikai matematikustól származik. Most csak a lényegét emeljük ki a [9] szakirodalomból; akit mélyebben érdekelnek a bizonyításhoz kapcsolódó problémák, annak feltétlenül érdemes elolvasnia a cikket.

Conway bűvös algoritmusát egy játékon keresztül ismerhetjük meg, előtte azonban bevezetünk néhány fogalmat.

#### Átfedés:

Tekintsünk két célsorozatot, például  $A = \text{IFF}$ ,  $B = \text{FFI}$ .

(Emlékeztetőül: az  $A$  és  $B$  játékosok a játék elején kiválasztanak (tippelnek) egy-egy dobássorozatot, majd egy szabályos érmét dobálnak fel. A dobások eredményét sorban lejegyzik, s a játéknak akkor van vége, ha előáll valamelyik, a játékosok által választott dobássorozat. A játék nyertese az a játékos, akinek a tippje sikeres volt. A fej dobásokat  $F$ , az írás dobásokat  $I$  betűvel jelöljük; tehát most ebben a játékban az  $A$  játékos választott sorozata írás, fej, fej; a  $B$  játékosé fej, fej, írás.)

Észrevehetjük, hogy amikor az  $A$  sorozat nyer, akkor a  $B$  is épp a győzelem felé halad. Ennek az az oka, hogy a sorozatok között ún. átfedés van. (Átfedés: az egyik sorozat utolsó néhány eleme rendre megegyezik a másik sorozat első néhány elemével.)

A konkrét példát tekintve  $A$ -t  $B$  átfedi 1 hosszúságban, mert az  $A$  sorozat harmadik eleme megegyezik  $B$  első elemével (jelölés:  $A(3) = B(1) = F$ ). Ugyanakkor  $A$ -t  $B$  átfedi 2 hosszúságban is, mert  $A$  második és harmadik eleme megegyezik  $B$  első és második elemével (jelölés:  $A(2, 3) = B(1, 2) = \text{FF}$ ).

Az átfedés nagyságát definíció szerint 2-hatványok összegével mérjük: összeadjuk  $2^k$ -t minden olyan  $k$ -ra, amelyre van  $k$  hosszúságú átfedés. Az  $A$  és  $B$  sorozatokra így kiszámolt összeget átfedési számnak nevezzük, és  $A \circ B$ -vel jelöljük. Az előző konkrét esetben  $A \circ B = 2 + 2^2 = 6$ .

További példák:

$B \circ A = 2$  (mert csak az utolsó és első  $I$  átfedés:  $B(3) = A(1)$ ). Ebből a példából láthatjuk, hogy általában  $A \circ B \neq B \circ A$ .

$A \circ A = 2^3 = 8$  (csak egy átfedés van, maga a teljes sorozat).

$B \circ B = 2^3 = 8$  szintén.

Például a 3.1. feladat sorozatait tekintve:  $\text{FFF} \circ \text{FIF} = 2$ ;  $\text{FIF} \circ \text{FFF} = 2$ ;  $\text{FFF} \circ \text{FFF} = 2 + 2^2 + 2^3 = 14$ ;  $\text{FIF} \circ \text{FIF} = 2 + 2^3 = 10$ .

**Megjegyzés:** Az átfedés fogalmát - igény szerint - esetleg érdemes gyakorolni, tovább mélyíteni. Néhány lehetőség ( $X$  és  $Y$  célsorozatok):

- meghatározhatjuk  $X \circ Y$ -t bonyolultabb (hosszabb) sorozatok esetén;
- kitűzhetünk egyéb típusfeladatokat (például van-e olyan adott hosszúságú  $X$  és  $Y$ , amelyekre  $X \circ Y =$  valamely adott érték);
- megvizsgálhatjuk a művelet egyes tulajdonságait (például igaz-e, hogy a művelet kommutatív?);
- valamint elgondolkozhatunk azon is, hogy hogyan alakulhatott ki a fogalom: miért éppen ezt a tulajdonság a „fontos”; hogyan vehette ezt észre Conway stb.

#### A játék:

Egy kaszinóban érmédobásokra alapozott dupla vagy semmit lehet játszani. Ez azt jelenti, hogy minden érmédobás előtt a játékosok bizonyos téttel fogadhatnak a dobás eredményére. Ha ezt eltalálják, a tét dupláját fizeti nekik a bank; ha viszont nem jól tippelnek, a tétet elveszítik. (Máris előrebocsátjuk, hogy ez a játék “igazságos”: minden dobás után, minden játékos várható nyereménye 0.)

Egy társaság tagjai elhatározzák, hogy fejenként 1 forintot szánnak a játékra. Mindannyian a FIFI tipporozatot játsszák, s egymás után kapcsolódnak be a játékba úgy, hogy minden dobásnál egy új játékos lép be.

Tehát az első játékos ( $J1$ ) felteszi az 1 forintját, s fejet tippel. Ha az első dobás írás, már ki is esett; ha az első dobás fej, kap 2 forintot. Ezután  $J1$  (ha még játékban van) a második játékban írást tippel ( $FIFI(2) = I$ ). Bekapcsolódik a játékba a második játékos ( $J2$ ), aki fejet tippel, mert most kezdi FIFI-t. ( $FIFI(1) = F$ .) Ha a második dobás I,  $J1$  4 forintot kap,  $J2$  kiesik. Ha a második dobás F,  $J1$  kiesik,  $J2$  kap 2 forintot.

Ezután jön a harmadik dobás. Ha  $J1$  még játékban van, felteszi a 4 forintját, s F-et mond;  $J2$  - ha még játékban van - felteszi 2 forintját, s I-t mond; végül bekapcsolódik 1 forinttal a harmadik játékos ( $J3$ ), aki F-et tippel és így tovább.

Így folytatódik a játék egészen addig, amíg valamelyik játékosnak ki nem jön a teljes FIFI sorozat.

### Pénzügyi mérleg:

Tegyük fel, hogy az előző játékban a 12., 13., 14., 15. dobásra jött ki (először) a FIFI sorozat. Mennyi lesz ekkor a 15 játékos nyeresége?

Mindannyian befizettek 1 forintot, ez összesen 15 forint.  $J12$  nyeresége 16 forint, de  $J14$  is nyert 4 forintot, mert kétszer talált:  $FIFI(3, 4) = FIFI(1, 2)$ . A játékosok nettó nyeresége tehát  $20 - 15 = 5$  forint.

Észrevehetjük, hogy  $J12$  és  $J14$  esetében éppen a fentebb definiált átfedésről van szó. Vagyis azért nyertek  $4 + 16 = 20$  forintot, mert  $FIFI \circ FIFI = 2^2 + 2^4 = 20$ .

Mi történik akkor, ha egy hasonló játék az  $N$ . dobás után fejeződik be?

Ekkor is igaz, hogy az  $(N - 3)$ . játékos  $2^4$  és az  $(N - 1)$ . játékos  $2^2$  forintot nyer, tehát az össznyeresemény ismét  $FIFI \circ FIFI$ ; a nettó nyeresemény pedig  $FIFI \circ FIFI - N$  forint.

Sőt, a fenti gondolat általánosítható: tetszőleges  $A$  sorozat esetén az utolsó  $i$ . játékos akkor kap  $2^i$  forintot, ha  $A$ -nak önmagával  $i$  hosszú átfedése van ( $i = 1, 2, \dots$ ). A játékosok nettó össznyeresége tehát  $A \circ A - N$  forint, a játék lefolyásától függetlenül. (Csak az elért végállapot számít, az oda vezető út nem.)

Mivel az érmedobálásos dupla vagy semmi játék ezzel a lebonyolítással méltányos (igazságos), a nettó nyeresemény várható értéke 0. Emiatt ha  $L$  az  $A$  sorozat eléréséhez szükséges átlagos dobásszámot jelenti, akkor  $A \circ A - L = 0$ , s innen  $L = A \circ A$ .

Vagyis ahhoz, hogy az érmedobálásos játékban először megkapjuk az  $A$  sorozatot, átlagosan  $A \circ A$  dobásra van szükség.

**Megjegyzés:** Módszertani szempontból persze helyesebb, ha a fenti kérdéseket, illetve kijelentéseket feladatként tűzzük ki, s engedjük, hogy a válaszokra a tanítványaink jöjjenek rá.

### Amikor két sorozat versenyez:

A fogadás továbbra is az  $A$  tipporozattal történik, de a dobássorozatban az  $A$ -val versenyez egy  $B$  sorozat is, s a játék akkor ér véget, ha  $A$  vagy  $B$  jön ki. (Konkrét példa:  $A = FIFI$ ,  $B = IFFI$ .)

Ha például a  $B$  megjelenése vet véget a játéknak, akkor az  $A$ -ra tippelők között lehetnek, akik épp nyeresében vannak, s nekik a bank - könnyen látható - éppen  $B \circ A$  forintot fizet. (A konkrét példában  $B \circ A = 2^2$ , mert  $B(3, 4) = A(1, 2)$ .)



Mennyi a játékosok nettó össznyereménye? Ha a játék  $N$  dobásig tart, akkor a nettó össznyeremény vagy  $B \circ A - N$  (ha a  $B$  sorozat jött ki), vagy  $A \circ A - N$  (ha az  $A$  sorozat nyert).

Mennyi az átlagos nettó nyeremény ebben a játékban? Ha az  $A$  sorozat nyerési esélye  $p_A$ , a  $B$  sorozat nyerési esélye  $p_B$ ,  $L$  pedig az átlagos dobásszámot jelenti, akkor  $p_A \cdot A \circ A + p_B \cdot B \circ A - L$  az átlagos nyeremény. (Az összeadási és szorzási szabályt alkalmaztuk. Eszerint vagy  $p_A$  valószínűséggel nyer  $A$ , s ekkor a nyereség  $A \circ A$ ; vagy  $p_B$  valószínűséggel nyer  $B$ , ekkor a nyereség  $B \circ A$ ; s a kettő súlyozott összegéből le kell vonni az átlagosan befizetett  $L$  forintot.) A játék igazságossága miatt most is  $p_A \cdot A \circ A + p_B \cdot B \circ A - L = 0$ .

Hasonló egyenletet írhatunk fel akkor is, ha a játékosok  $B$ -re fogadnak:  $p_A \cdot A \circ B + p_B \cdot B \circ B - L = 0$ . Végül a játékban nincs döntetlen, így  $p_A + p_B = 1$  a harmadik egyenletünk. A három ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer:

- (1)  $p_A \cdot A \circ A + p_B \cdot B \circ A = L$ ;
- (2)  $p_A \cdot A \circ B + p_B \cdot B \circ B = L$ ;
- (3)  $p_A + p_B = 1$ .

Ennek megoldása:  $p_A = \frac{B \circ B - B \circ A}{A \circ A + B \circ B - A \circ B - B \circ A}$ ,  
 $L = \frac{A \circ A \cdot B \circ B - A \circ B \cdot B \circ A}{A \circ A + B \circ B - A \circ B - B \circ A}$ . A  $p_B$  valószínűséget megkaphatjuk  $1 - p_A$ -ból, vagy

felírhatjuk a  $p_A$ -ra szimmetrikus képletet:  $p_B = \frac{A \circ A - A \circ B}{A \circ A + B \circ B - A \circ B - B \circ A}$ .

### Összefoglalva:

Ezzel a módszerrel egyszerűen és gyorsan kiszámíthatjuk az egyes győzelmi valószínűségeket és az átlagos lépésszámokat. Sőt, az átfedési szám meghatározása könnyen algoritmizálható, így segítségül hívhatjuk a számítógépet. Nyolcadik osztályos diákjaim kiírták például az összes 4 hosszú fej-írás sorozat egymással szembeni nyerési esélyeit, és a hozzájuk tartozó átlagos lépésszámokat; a lejjebb közölt táblázat-részletek is tőlük származnak.

Általánosítási lehetőségként megemlíjtük, hogy a Conway-algoritmust alkalmazhatjuk akkor is, ha

- kettőnél több versengő sorozat játszik; valamint ha
- nem azonos hosszúak a versengő sorozatok. (Itt csak arra kell vigyázni, hogy egyik sorozat sem fordulhat elő teljes egészében semelyik másikban.)

### Konkrét példák:

**1.** Oldjuk meg Conway módszerével a **3.1.** és **3.2.** bevezető érmedobálós feladatokat! Ebben  $A = FFF$ ,  $B = FIF$ ; keressük az  $A$  és  $B$  győzelmi valószínűségeit és a játék befejezéséhez szükséges átlagos lépésszámot.

**Megoldás:**  $A \circ A = 2 + 4 + 8 = 14$ ;  $A \circ B = 2$ ;  $B \circ A = 2$ ;  $B \circ B = 2 + 8 = 10$ . Innen  

$$p_A = \frac{10-2}{14+10-2-2} = \frac{2}{5}, \quad L = \frac{14 \cdot 10 - 2 \cdot 2}{14+10-2-2} = \frac{136}{20} = 6,8.$$
 Természetesen ezek az értékek megegyeznek a 3.1. és 3.2. eredményeivel.

**2.** Legyenek most négy hosszúak a versengő sorozatok; oldjuk meg például a fenti fogadás két sorozatához kapcsolódó feladatot! Tehát:  $A = \text{FIFI}$ ,  $B = \text{IFFI}$ , s három kérdésre keressük a választ:

- a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy FIFI adódik előbb?
- b) Határozzuk meg, átlagosan hány dobásig tart a játék!
- c) Határozzuk meg, átlagosan hány dobásból áll elő külön-külön az FIFI, illetve az IFFI sorozat!

**Megoldás:**  $A \circ A = 4 + 16 = 20$ ;  $A \circ B = 2$ ;  $B \circ A = 4$ ;  $B \circ B = 2 + 16 = 18$ . Innen  

$$p_A = \frac{18-4}{20+18-2-4} = \frac{7}{16}, \quad L = \frac{20 \cdot 18 - 2 \cdot 4}{20+18-2-4} = \frac{352}{32} = 11.$$
  
 a)  $\frac{7}{16}$ ; b) 11; c)  $L(\text{FIFI}) = 20$ ;  $L(\text{IFFI}) = 18$ .

**8.6. feladat:** Ebben a játékban három sorozat verseng egymással:  $A = \text{FIFI}$ ,  $B = \text{IIFF}$ ,  $C = \text{IFII}$ .

- a) Mennyi az egyes sorozatok győzelmi valószínűsége?
- b) Határozzuk meg, átlagosan hány dobásig tart a játék!
- c) Határozzuk meg, átlagosan hány dobásból áll elő külön-külön az FIFI, IIFF, illetve IFII sorozat!

**Megoldás:** A három sorozat négy ismeretlen változójára négy egyenletet írhatunk fel, a korábbi egyszerűbb esetek analógiájára:

- (1)  $p_A \cdot A \circ A + p_B \cdot B \circ A + p_C \cdot C \circ A = L$ ;
- (2)  $p_A \cdot A \circ B + p_B \cdot B \circ B + p_C \cdot C \circ B = L$ ;
- (3)  $p_A \cdot A \circ C + p_B \cdot B \circ C + p_C \cdot C \circ C = L$ ;
- (3)  $p_A + p_B + p_C = 1$ .

$A \circ A = 4 + 16 = 20$ ,  $B \circ B = 16$ ,  $C \circ C = 2 + 16 = 18$ ; ezek egyúttal az egyes sorozatok átlagos bekövetkezéséhez szükséges lépésszámok.

$A \circ B = 2$ ,  $A \circ C = 2 + 8 = 10$ ,  $B \circ A = 2$ ,  $B \circ C = 0$ ,  $C \circ A = 0$ ,  $C \circ B = 2 + 4 = 6$ . Az egyenletrendszer számokkal:

- (1)  $20p_A + 2p_B + 0p_C = L$ ;
- (2)  $2p_A + 16p_B + 6p_C = L$ ;
- (3)  $10p_A + 0p_B + 18p_C = L$ ;
- (3)  $p_A + p_B + p_C = 1$ .

Az a) - b) eredmények:  $(p_A, p_B, p_C, L) = \left( \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8}, \frac{33}{4} \right)$ . A c) kérdésre a válasz:  $L(\text{FIFI}) = 20$ ,  $L(\text{IIFF}) = 16$ ,  $L(\text{IFII}) = 18$  a lépésszámok.



### Feladatok

**8.7. (kitűzött) feladat:** Két játékos egy szabályos érmét folyamatosan dobál. András akkor győz, ha a fejek száma 6-tal több, mint az írások száma; Béla pedig akkor, ha az írások száma lesz több 6-tal a fejek számánál. A játszma egy adott pillanatában a dobott fejek száma éppen 2-vel több, mint az írásoké.

- a) Mekkora ebben a pillanatban András nyerési esélye?
- b) Átlagosan hány dobásig tart még a játék?
- c) Mekkora András nyerési esélye akkor, ha a dobott fejek száma 1-gyel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel több az írások számánál?

**8.8. (kitűzött) feladat:**

- a) Átlagosan hány lépésben jutunk el az  $n$  pontú teljes gráf egyik csúcsából egy kijelölt másik csúcsba? (A bolyongás csúcstól-csúcsig történik, az éleket minden csúcsban véletlenszerűen választva.)
- b) Átlagosan hány lépésben járjuk be az  $n$  pontú teljes gráf minden csúcsát?

**8.9. (kitűzött) feladat:** Bizonyos értelemben a “legnehezebben” bejárható gráfok a “sárkány” alakúak (lásd [3]). Konkrétan tekintsünk egy teljes 4 pontú gráfot, és egy hozzá csatlakozó 8 pontú láncot. Határozzuk meg, hogy véletlenszerű bolyongást végezve a lánc végpontjából átlagosan hány lépésben érjük el

- a) valamelyik előre megadott csúcsot;
- b) az összes csúcsot!

**8.10. (kitűzött) feladat:** Elemezzük Conway algoritmusát alkalmazva a következő érmedobálós játékokat (győzelmi valószínűség, lépésszámok külön-külön és együtt):

- a)  $A = IFI, B = IFF$ ;
- b)  $A = IFI, B = IIF$ ;
- c)  $A = IFF, B = IIF$ ;
- d)  $A = IFI, B = IFF, C = IIF$ .

**8.11. (kitűzött) feladat:** Elemezzük Conway algoritmusát alkalmazva a következő érmedobálós játékokat (győzelmi valószínűség, lépésszámok külön-külön és együtt):

- a)  $A = FIFI, B = FIFF$ ;
- b)  $A = FIFI, B = FIIF$ ;
- c)  $A = FIFF, B = FIIF$ ;
- d)  $A = FIFI, B = FIFF, C = FIIF$ .

**8.12. (kitűzött) feladat:** Elemezzük Conway algoritmusát alkalmazva a következő érmedobálós játékokat (győzelmi valószínűség, lépésszámok külön-külön és együtt):

- a)  $A = IFI, B = FIFF$ ;
- b)  $A = IFI, B = FIFFI$ ;
- c)  $A = IFI, B = FIFFF$ ;
- d)  $A = IFI, B = FIFF, C = FFIF$ .

**8.13. (kitűzött) feladat:** Conway algoritmus (és egy kis számítógépes segítség) alkalmazásával állítsuk elő a kétszemélyes, 3 hosszú célsorozatú érmedobálós játékok valószínűségekre vonatkozó eredménytáblázatát!

**Eredmény:** Az egyes játékok esélyeit tartalmazó táblázat:

	FFF	FFI	FIF	FII	IFF	IFI	IIF	III
FFF	–	1:1	2:3	2:3	1:7	5:7	3:7	1:1
FFI	1:1	–	2:1	2:1	1:3	5:3	1:1	7:3
FIF	3:2	1:2	–	1:1	1:1	1:1	3:5	7:5
FII	3:2	1:2	1:1	–	1:1	1:1	3:1	7:1
IFF	7:1	3:1	1:1	1:1	–	1:1	1:2	3:2
IFI	7:5	3:5	1:1	1:1	1:1	–	1:2	3:2
IIF	7:3	1:1	5:3	1:3	2:1	2:1	–	1:1
III	1:1	3:7	5:7	1:7	2:3	2:3	1:1	–

(Például az  $FFF : FIF = 2 : 3$  arány úgy értendő, hogy FFF győzelmének a valószínűsége  $\frac{2}{5}$ .

**8.14. (kitűzött) feladat:** Conway algoritmus (és egy kis számítógépes segítség) alkalmazásával állítsuk elő a kétszemélyes, 3 hosszú célsorozatú érmedobálós játékok átlagos lépésszámainak az eredménytáblázatát!

**Eredmény:** Az egyes játékok lépésszámait tartalmazó táblázat:

	FFF	FFI	FIF	FII	IFF	IFI	IIF	III
FFF	14	7	6,8	5,6	7	5,83	5,6	7
FFI	7	8	6	5,3	6,5	5	5	5,6
FIF	6,8	6	10	5	6	7	5	5,83
FII	5,6	5,3	5	8	5	6	6,5	7
IFF	7	6,5	6	5	8	5	5,3	5,6
IFI	5,83	5	7	6	5	10	6	6,8
IIF	5,6	5	5	6,5	5,3	6	8	7
III	7	5,6	5,83	7	5,6	6,8	7	14

**8.15. (kitűzött) feladat:** Vizsgáljuk meg az IIII sorozat viselkedését a többi 4 hosszú célsorozat ellenében! (Például:  $FIII : IIII = 15 : 1$ .) Milyen érdekességet vehetünk észre és mi ennek az oka?

**8.16. (kitűzött) feladat (KöMaL P.380.):** Jelölje  $p_n$  annak a valószínűségét, hogy egy találmányra kiválasztott (nem feltétlenül értelmes)  $n$  betűs szövegben előfordul a „vagyok” szó. Bizonyítsuk be, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$ .

Kürschák 2005?

## 9. Számítógéppel támogatott problémamegoldás

Ebben a fejezetben - ígéretünkhöz híven - néhány egyszerű példát mutatunk arra, hogyan lehet a számítógépet segédeszközként felhasználni a problémamegoldás folyamatában.

Mint a cikk bevezetőjében is említettük, a következő munkafolyamatokról lesz szó:

**1. Gépi szimuláció.**

Itt sok-sok játék szimulálása, futtatása történik.

**2. Sejtések, becslések, tippek megfogalmazása.**

Érdekes és tanulságos a tippek összehasonlítása; ha szükséges, erre a részre arányaiban több időt is száncatunk. (Becslések összegyűjtése, rögzítése; versenyztetés, utólagos kiértékelés, tanulságok.) Akkor is érdemes becsltetni, ha esetleg a probléma olyan bonyolult, hogy matematikailag már nem tudjuk megoldani. Ekkor marad a számítógépes szimulációk sokasága; a futási eredmények átlaga jó közelítéssel a megoldást adja.

**3. A játék matematikai modellezése.**

**4. A játék matematikai elemzése; feladatmegoldás.**

**9.1. feladat:** Szimuláljunk néhány egyszerű diszkrét egydimenziós bolyongást!

A modell a következő: megadjuk a  $h$  hosszú lineáris pályán bolyongó pont kezdeti helyzetét (ez 1-től  $h$ -ig lehet valamelyik pozíció); majd ezután minden lépésben véletlenszerűen, 0,5 - 0,5 valószínűséggel elmozdítjuk valamelyik irányba a bolyongó pontot. A bolyongás egyfajta játéknak is tekinthető, melyben azt vizsgáljuk, hogy a pont melyik irányban hagyta el a pályát. A játéknak tehát akkor van vége, ha a pont aktuális pozíciója 0 vagy  $h + 1$  lesz.

**a)  $\langle 3; 2 \rangle$  játék:** Szimuláljuk a bolyongó pont mozgását a  $h = 3$  hosszú,  $k = 2$  kezdőhelyzetű játékban! (A továbbiakban ezt a kiindulási helyzetet a  $\langle 3; 2 \rangle$  szimbólummal jelöljük.) Átlagosan mennyi a játék befejezéséhez szükséges  $L$  lépésszám, és hányszor hagyta el a pont balról, illetve jobbról a játékteret?

**Eredmény:** 100 000 futtatás alapján  $L = 4,00$ ; Bal = 50 040, Jobb = 49 960. (Természetesen ez és a következő futtatások csak egyetlen konkrét értékek; más szimulációk során más-más eredményeket kapunk.)

**b) Szimuláljuk az  $\langle 5; 3 \rangle$  játékot!**

**Eredmény:** 100 000 futtatás alapján  $L = 8,97$ ; Bal = 49 987, Jobb = 50 013.

**c) A  $\langle 7; 4 \rangle$  játék 100 000 szimulációja alapján próbáljunk megfogalmazni egy sejtést, s ezt erősítsük meg a  $\langle 9; 5 \rangle$ ,  $\langle 11; 6 \rangle$  és  $\langle 13; 7 \rangle$  játékok vizsgálatával!**

**Eredmény:** A  $\langle 7; 4 \rangle$  játékban:  $L = 15,63$ ; Bal = 50 006, Jobb = 49 994. A Bal és Jobb relatív gyakorisága  $\approx 0,5$  a játékokban, ezt szemléletünk el is fogadja. A lépésszámok esetében észrevehetjük, hogy ha a középső

mezőn álló pontnak mindkét irányban  $k$  lépést kell tennie, hogy elhagyja a pályát, akkor ehhez jó közelítéssel  $\approx k^2$  lépésre van szükség.

A szimuláció eredménye a <9; 5>, <11; 6> és <13; 7> játékokban:

<9; 5>:  $L = 24,64$ ; Bal = 50 021, Jobb = 49 979,  
 <11; 6>:  $L = 35,07$ ; Bal = 49 977, Jobb = 50 023,  
 <13; 7>:  $L = 48,55$ ; Bal = 50 002, Jobb = 49 998.

**d)** Vizsgáljunk meg néhány játékot akkor is, ha a kiindulási helyzetben nem középen áll a bolyongó pont!

**Szimulációs eredmények** (100 000 futtatás alapján) 2, 3, 4, 5, 6, 10 hosszú pályákon:

2 hosszú pályán:

Pozíció	Lépésszám	Bal	Rel. gyak.	Jobb	Rel. gyak.
1	2,00	66 756	0,67	33 244	0,33
2	2,00	33 282	0,33	66 718	0,67

3 hosszú pályán:

Pozíció	Lépésszám	Bal	Rel. gyak.	Jobb	Rel. gyak.
1	2,99	75 037	0,75	24 963	0,25
2	4,00	49 981	0,50	50 019	0,50
3	2,99	24 966	0,25	75 034	0,75

4 hosszú pályán:

Pozíció	Lépésszám	Bal	Rel. gyak.	Jobb	Rel. gyak.
1	3,99	79 989	0,80	20 011	0,20
2	5,95	60 037	0,60	39 963	0,40
3	5,96	39 949	0,40	60 051	0,60
4	3,99	20 013	0,20	79 987	0,80

5 hosszú pályán:

Pozíció	Lépésszám	Bal	Rel. gyak.	Jobb	Rel. gyak.
1	4,99	83 335	0,83	16 665	0,17
2	7,74	66 699	0,67	33 301	0,33
3	8,97	50 007	0,50	49 993	0,50
4	7,74	33 347	0,33	66 653	0,67
5	4,99	16 650	0,17	83 350	0,83

6 hosszú pályán:

Pozíció	Lépésszám	Bal	Rel. gyak.	Jobb	Rel. gyak.
1	5,95	85 687	0,86	14 313	0,14
2	10,02	71 468	0,71	28 532	0,29
3	11,96	57 131	0,57	42 869	0,43
4	11,96	42 855	0,43	57 145	0,57
5	10,01	28 573	0,29	71 427	0,71
6	5,95	14 250	0,14	85 750	0,86

10 hosszú pályán:

Pozíció	Lépésszám	Bal	Rel. gyak.	Jobb	Rel. gyak.
1	9,97	90 893	0,91	9 107	0,09

2	17,70	81 827	0,82	18 173	0,18
3	24,03	72 715	0,73	27 285	0,27
4	27,64	63 636	0,64	36 364	0,36
5	30,10	54 543	0,55	45 457	0,45
6	30,09	45 457	0,45	54 543	0,55
7	27,65	36 364	0,36	63 636	0,64
8	24,02	27 270	0,27	72 730	0,73
9	17,71	18 201	0,18	81 799	0,82
10	9,96	9 089	0,09	90 911	0,91

e) A fenti eredmények alapján fogalmazzunk meg sejtéseket!

**Sejtések:** Úgy tűnik, hogy a  $h$  hosszúságú pályán a  $k$ . kezdőhelyről induló pont

1. ha balról  $p$  valószínűséggel hagyja el a játékteret, akkor  $(1 - p)$  valószínűséggel hagyja el jobbról;
2.  $\frac{k}{h+1}$  valószínűséggel hagyja el balról a játékteret;
3. átlagosan ugyanannyi lépést végez, mint a  $(h + 1 - k)$ . helyről induló pont;
4. átlagos lépésszáma  $k(h + 1 - k)$ .

(Ez utóbbi sejtést érdemes további példákkal megerősíteni. Egyébként mint véletlen egészen fantasztikus a 10 hosszú pálya 4 - 7., illetve 5 - 6. kezdőmezőkhöz tartozó lépésszámainak egyezése.)

**9.2. (kitűzött) feladat:** Bizonyítsuk be az előző feladatban kapott 1 - 4. (igaz) sejtéseket!

**Útmutatás:** Az 5. és 6. fejezetben található a hasonló ferdefoci-problémák bizonyításai.

### Golyómodell-szimulációk

Képzeld el, hogy egy 10 tagú társaság tagjai közül sorsolással választja ki a vezetőjét. A sorsolást úgy végzik el, hogy a tagok egymás után feldobnak egy dobókockát, és az lesz a vezető, aki először dob 6-ost.

Ezt a sorsolást egyfajta golyómodellként is felfoghatjuk. Például egy urnába beteszünk 5 kék és 1 piros (egyforma méretű) golyót, s közülük a jelöltek sorban kihúznak egyet-egyét úgy, hogy ha a golyó színe kék, akkor visszateszik. (Piros golyó húzása esetén vége a sorsolásnak.)

Ezekben a modellekben a golyók szerepe minimális, a két szín megoszlása csak azt befolyásolja, hogy a soron következő húzással mekkora valószínűséggel ér véget a sorsolás. (Ilyen problémák egyszerűbb eseteit vizsgáltunk a 2. fejezetben.)

Ebben a fejezetben további golyómodelleket vizsgálunk meg; ezek a játékok általában bonyolultabbak lesznek. A modell bármelyik paraméterén változtathatunk: a színek, a golyók vagy a kihúzott golyók számán; a húzási technikán (a kihúzott golyót nem szükségképpen tesszük vissza), illetve ennek stratégiáján (például ha egy kék és egy zöld golyót húzunk ki, visszateszünk egy pirosat); különböző végállapotok esetén érhet véget egy-egy játék és így tovább. Bár alkalmanként nem hagyjuk el a modellek matematikai vizsgálatát sem, a hangsúlyt elsősorban a játékok szimulációjára, illetve ezek eredményeinek vizsgálatából a megfogalmazható sejtésekre helyezzük.

**Megjegyzés:** Módszertani szempontból – most és a későbbiekben is – érdemes először azt megvizsgálni, hogy a konkrét feladat hogyan modellezhető;

ezután rátérni arra, hogy mit is várunk, hogyan „viselkedik” a modell; majd végül ez alapján hogyan célszerű „helyezkedni” a sorsolásban résztvevőknek. Nagyon érdekes például, hogy az első 6-os dobást általában a 3-4. helyre várják a diákok; de amikor a kérdést átfogalmazzuk, és azt kérdezzük, hogy hogyan érdemes helyezkedni, akkor a véleményük megváltozik, és inkább kezdeni szeretnének. Az (eltérő) tippek ütköztetésére is szánjunk időt; izgalmas összehasonlítani a különböző érveléseket.

### Sorsolási modellek

**9.3. feladat:** A fenti bevezető sorsolás (10 játékos, visszatevéses húzás  $\frac{1}{6}$  nyerési eséllyel) a legegyszerűbb feladatok közé tartozik, de néhány érdekes kérdést felvet.

**a)** Ha valaki elnök akar lenni, akkor hogyan érdemes „helyezkednie”? Igyekezzen hamar húzni, vagy inkább később? (A kérdés matematikai megfogalmazása:  $n$  játékos esetén melyik helyen legvalószínűbb az első piros húzás?)

**b)** Átlagosan hány húzásig tart a játék?

**c)** Hogyan változnak a fenti eredmények, ha megváltoztatjuk a golyók színmegoszlását?

**d)** És ha többféle golyóval végezzük a húzásokat? (Például 7 kék, 1 piros és 2 sárga golyóval játszunk; aki először húz sárga golyót, a társaság jegyzője lesz.)

**Megoldás:** A szimulációs program 100 000 futási eredménye alapján az átlagos dobásszám 6,01, az egyes nyerések száma pedig:

személy	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
nyerés	19 876	16 556	13 693	11 562	9636	7945	6616	5653	4682	3781
rel. gyak.	0,20	0,17	0,14	0,12	0,10	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04

Úgy tűnik, érdemes minél hamarabb húzni ( $\approx 20\%$  eséllyel az elsőnek húzóé lesz a piros golyó), az átlagos húzásszám pedig  $\approx 6$ .

A bizonyítást általános esetben végezzük el. Legyen a társaság  $n$  tagú, és  $p$  annak a valószínűsége, hogy a soron következő játékos piros golyót húz. Ekkor annak valószínűsége, hogy az  $i$ . húzásra húzunk először piros golyót,  $(1-p)^{i-1} \cdot p$ .

Az 1. játékos ez alapján  $P_1 = p + (1-p)^{10} \cdot p + (1-p)^{20} \cdot p + \dots$  valószínűséggel nyer;

a második  $P_2 = (1-p) \cdot p + (1-p)^{11} \cdot p + (1-p)^{21} \cdot p + \dots = (1-p) \cdot P_1$ -gyel;

a harmadik  $P_3 = (1-p)^2 \cdot p + (1-p)^{12} \cdot p + (1-p)^{22} \cdot p + \dots = (1-p)^2 \cdot P_1$ -gyel;

... az  $i$ . pedig  $P_i = (1-p)^{i-1} \cdot p + (1-p)^{i+9} \cdot p + (1-p)^{i+19} \cdot p + \dots = (1-p)^{i-1} \cdot P_1$ -gyel,

s ezek az értékek  $i$  növekedtével valóban csökkennek.

A végtelen sorok összege:  $P_1 = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)^{10}}$ ,  $P_2 = p \cdot \frac{1-p}{1-(1-p)^{10}}$ ,  $\dots$ ,

$P_{10} = p \cdot \frac{(1-p)^9}{1-(1-p)^{10}}$ . Konkrétan  $p = \frac{1}{6}$  értékekkel  $P_1 = 0,198\ 768\ 964$ ;  $P_2 = 0,165\ 640\ 803$ ;

$P_3 = 0,138\ 034\ 003$ ;  $P_4 = 0,115\ 028\ 336$  stb., elég jó egyezést kapunk a szimulációs eredményekkel.

A húzások átlagos számát többféleképpen is meghatározhatjuk. (Lásd például 2.6. feladat.)

Alkalmazhatjuk a várható érték definícióját:  $H = p \cdot 1 + (1-p) \cdot p \cdot 2 + (1-p)^2 \cdot p \cdot 3 + \dots + (1-p)^{n-1} \cdot p \cdot n + \dots$ , s ezt a végtelen összeget mértani sorok összegként állíthatjuk elő.

Egy másik lehetőség a „logikai rekurziós” gondolat:  $H = p \cdot 1 + (1-p)(1+H)$ . Ezt az egyenletet a következőképpen értelmezhetjük: Vagy  $p$  valószínűséggel összesen 1-et húzunk (egy pirosat), vagy  $(1-p)$  valószínűséggel húzunk 1-et (egy kéket), plusz még annyit, amennyi a további játék során szükséges. Mivel a

további játék ekvivalens a kezdetivel (a kék golyót visszatettük), ebből az állapotból is  $H$  a hátralévő húzások átlagos száma.

Az egyenletből  $H = 6$ .

Ezzel sikerült az **a)** - **c)** feladatokat megválaszolni, s a **d)** feladat is hasonlóan vizsgálható. (Például gondoljunk arra, hogy a piros golyó szempontjából a sárga és kék golyók egyenértékűek.)

**9.4. (kitűzött) feladat:** Láttuk, hogy a húzások átlagos száma 6. Magyarázzuk meg, ez miért nem jelenti azt, hogy leggyakrabban a 6. jelölt húzza a piros golyót!

**9.5. feladat:** Egy dobozban  $n$  (egyforma méretű) golyó van, közülük 1 piros, a többi kék. Véletlenszerűen, ezúttal visszatevés nélkül húzzuk ki a golyókat. Mi annak a valószínűsége, hogy az  $i$ . húzás piros? (Az előző feladatbeli modellt tehát annyiban változtattuk meg, hogy a kihúzott golyót most nem tesszük vissza. Így sorsolták ki Mikszáth: A fekete város c. regényének egyik filmfeldolgozásában Lócse város főbíráját.)

**Megoldás:** Hasonló feladatokat vizsgáltunk a 4. fejezetben, ez volt a visszatevés nélküli sorsolási modell. Egy tipikus diákokoskodás szerint a kihúzott golyók  $n$  hosszú sorozatának elején - a kék golyók kezdeti túlsúlyának megfelelően - inkább kék golyók szerepelnek, így talán érdekesebb későbbi időpontban húzni, ha célunk a piros golyó megszerzése. (Az említett filmben az utoljára húzó tanácstagnak maradt a piros.) Nézzük, mit mutat a gyakorlat!

100 000 szimulációs futtatás eredménye a következő:

Ha a golyók száma  $n = 6$  (1 piros, 5 kék), a piros golyó átlagos húzásszáma 3,50:

személy	1	2	3	4	5	6
nyerés	16 734	16 738	16 427	16 680	16 649	16 772
rel. gyak.	0,17	0,17	0,16	0,17	0,17	0,17

Ha a golyók száma  $n = 10$  (1 piros, 9 kék), a piros golyó átlagos húzásszáma 5,50:

személy	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
nyerés	10037	10058	9907	10036	9928	10029	9944	10009	10100	9952
rel. gyak.	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10

Az eredmény elég egyértelmű: sejthető, hogy mindegyik helyen ugyanakkora a piros golyó húzási valószínűsége. Az első helyen ez a valószínűség  $\frac{1}{n}$ , a második helyen  $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$ , ..., az  $i$ . helyen ( $1 < i \leq$

$n$ )  $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{n+1-i}{n+2-i} \cdot \frac{1}{n+1-i} = \frac{1}{n}$  valóban; az említett diákokoskodás tehát hibás.

**9.6. feladat:** Vizsgáljuk meg az előző feladatot, ha a golyók kezdeti eloszlása 3 piros és 7 kék! Készítsünk a kihúzott golyókból egy 10 hosszúságú sorozatot, és állapítsuk meg, hogy

- a) melyik helyen legvalószínűbb az első piros húzás;
- b) melyik helyen legvalószínűbb a piros húzás;
- c) melyik sorozat húzása a legvalószínűbb?



**Megoldás:** Az előző feladat megoldása alapján ismét azt sejtethetjük, hogy mindegyik helyen egyforma az első piros golyó húzási valószínűsége. A szimuláció eredménye:

Ha a golyók száma  $n = 10$  (3 piros, 7 kék), az első piros golyó átlagos húzásszáma 2,76:

személy	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
nyerés	29 882	23 057	17 612	12 746	8321	4975	2559	848	0	0
rel. gyak.	0,30	0,23	0,18	0,13	0,08	0,05	0,03	0,01	0	0

Váratlan eredményt kaptunk; mi lehet ennek az oka?

a) Annak valószínűsége, hogy az első húzás piros,  $p_1 = \frac{3}{10}$ ; hogy másodszorra húzunk először pirosat,  $p_2 =$

$\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9}$ ; hogy harmadikra,  $p_3 = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8}$ ; hogy  $i$ -re ( $1 < i \leq 8$ ):  $p_i = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdots \frac{9-i}{12-i} \cdot \frac{3}{11-i} = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdots \frac{9-i}{11-i}$ , s e szorzat  $i$  növekedtével valóban monoton csökken.

b) Tehát az *első* piros golyót nagyobb valószínűséggel húzzuk a sorozat elején, mint később. Következik-e ebből, hogy a sorozat elején nagyobb valószínűséggel húzunk piros golyót?

Hát nem következik. Annak valószínűsége, hogy a 2. húzás piros,  $P_2 = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{3}{10}$ . Hogy a 3. piros:

$P_3 = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{10}$  (itt rendre a  $kkp$ ,  $kpp$ ,  $pkp$ ,  $ppp$  eseteket

számoltuk).  $P_4 = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} \cdot 3 + \frac{7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} \cdot 3 = \frac{3}{10}$  (az esetek:  $kkkp$ ,  $(kkp)p$  3-szor,

$(kpp)p$  3-szor); innen már sejtethető, hogy bármelyik helyen  $\frac{3}{10}$  valószínűséggel húzunk piros golyót. Ennek

bizonyítására gondoljuk meg, hogy ha a sorozatban egy kiválasztott  $i$ . helyen piros golyó szerepel, akkor a maradék 9 helyen  $\binom{9}{2}$ -féleképpen fordulhat elő a két piros golyó, s szimmetriaokok miatt ez minden

kiválasztott  $i$  helyre igaz. Annak valószínűsége tehát, hogy az  $i$ . helyen piros golyó van,  $\frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}$ .

A gondolatmenet 3 és 7 helyett tetszőleges golyószámok esetén is alkalmazható.

c) A sorozatok egyformán valószínűek.

### Vegyes feladatok

**9.7. (kitűzött) feladat:** Oldjuk meg az előző feladatot, ha a golyók kezdeti megoszlása

a) 1 piros, 3 sárga, 6 kék;

b) 3 piros, 2 kék és 5 sárga!

**9.8. (kitűzött) feladat:** A 9.6. feladatban szimulációs eredményül azt kaptuk, hogy ha kezdetben a piros és kék golyók száma 3, illetve 6, akkor az első piros golyót átlagosan 2,76. húzásra kapjuk meg. Mennyire valószínű ez az eredmény? Mi a pontos matematikai érték?

**9.9. (kitűzött) feladat:** Az 9.6. feladat szimulációjaként diákjainktól kétféle algoritmust kaptunk. Mindkét algoritmus kezdetben a  $g[1..10]$  vektorban tárolja a golyók színét.

*Az egyik:* Az 1 - 10 közötti  $i$  véletlenszámú  $g[i]$  golyót a  $g[1]$ -gyel megcseréli; ezután a 2 - 10 közötti  $i$  véletlenszámú  $g[i]$  golyót a  $g[2]$ -vel megcseréli és így tovább. Az algoritmus eredményeképp  $g[]$ -ben a keresett sorozatot kapjuk.

*A másik:* Az 1 - 10 közötti  $i$  véletlenszámú  $g[i]$  golyót eltárolja  $h[1]$ -ben,  $i$ -t megjegyzi; ezután addig generál 1 - 10 közötti véletlenszámot, míg olyan golyót nem talál, amelyiket még nem jegyzett meg, s ezt tárolja el  $h[2]$ -ben és így tovább. Eredményül  $h[]$ -ban kapjuk a keresett sorozatot.

Azonos eredményt ad mindkét eljárás? Átlagosan hányszor generálunk véletlenszámot az egyik, illetve a másik eljárásban? (A második eljárás módszerét alkalmaztuk 4.4.-ben.)

### Dinamikus golyómodellek

A következő játékokban a kihúzott golyók színétől függő szabály szerint változtatjuk a golyók színét vagy számát. A játékok osztályozását több szempontból is elvégezhetjük, mint ezt a 4. fejezet elején láttuk. Ismétlésként: szempont lehet

- a kezdeti színek száma: 2, 3 vagy több (ezeket az eseteket a 2, 3, ... kódokkal szimbolizáljuk);
- a kihúzott golyók száma: 1, 2 vagy több (kódok: 1, 2, ...);
- a golyószám változási módja: csökkenő, állandó, növekvő (kódok: -1, 0, 1) stb.

A [színek száma, húzott golyók száma, golyószám változása] számhármassal a játékok egy-egy osztályát jellemezhetjük. Például a 9.3. feladat [2, 1, 0], a 9.5. feladat [2, 1, -1], a 9.7. pedig [3, 1, -1] típusú volt.

A játékokkal kapcsolatban több érdekes kérdés is felvethető. Például:

- a) Lehetséges-e, hogy csak egyfajta golyó maradjon a játék végén?
- b) Ha igen, ez milyen kezdőhelyzetekre érhető el?
- c) Lehetséges-e, hogy csak egyetlen golyó maradjon a játék végén? (A kérdésnek nyilván csak csökkenő golyószám esetén van értelme.)
- d) Mennyi az invariáns helyzet eléréséhez szükséges átlagos lépésszám?

A fejezetben vizsgált golyómodellek sokféleképp általánosíthatók. Csak egyetlen példa: a húzásokkal kapcsolatban geometriai korlátozást, egyfajta feltételt adhatunk, ha a golyókat lineáris pálya vagy kör mentén, esetleg egy táblázatban rendezzük el, s a szabály a geometriai szomszédságtól függ. (Ilyen golyómodellek azok a sejtautomaták is, amelyekben az egyes cellákat véletlenszerűen választjuk ki.)

### Három klasszikus feladat

Ezeket a feladatokat már korábban példaként említettük a 4. fejezet elején.

**9.10. feladat:** Egy dobozban  $p$  darab piros színű és  $k$  darab kék golyó van. A dobozból kivesszünk két golyót. Ha ezek különböző színűek, akkor a piros golyót visszatesszük, ha egyforma színűek, akkor egy kék golyót teszünk vissza. Ezt az eljárást addig ismételjük, míg egyetlen golyó marad a dobozban. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a golyó piros?

**Megoldás:** A játék kódja  $[2, 2, -1]$ . Különböző  $p$  és  $k$  értékekre futtatva a szimulációkat, észrevehetjük, hogy a végeredmény - rögzített  $p$  és  $k$  értékekre - mindig egyértelmű; nem függ az eredmény attól, hogy milyen golyókat, melyik sorrendben húzzuk, csak attól, hogy milyen  $p$  és  $k$  megoszlása. Az alábbi táblázatban  $p$  és  $k$  lehetséges változásait tüntettük fel:

húzás	$p, p$	$p, k$	$k, k$
$p$	-2	0	0
$k$	+1	-1	-1

Innen kiolvasható, hogy a piros golyók számának paritása állandó. A golyók száma húzásonként 1-gyel csökken, így az utolsó golyó piros, ha  $p$  páratlan, és kék, ha  $p$  páros.

**Megjegyzés:** Ez a feladat tehát nem is valószínűségi számítási, hanem kombinatorikai jellegű.

**9.11. feladat:** Egy táblára felírtunk 1996 darab 1-est, 1997 darab 2-est és 1998 darab 3-ast. Bármely két számjegyet letörölhetjük, ha helyette a harmadik számjegyet egyszer felírjuk a táblára. Igaz-e, hogy ezt az eljárást ismételve elérhetjük, hogy **a)** csak egyfajta; **b)** csak egyetlen szám marad? Ha igen, melyik lehet ez a szám?

**Megoldás:** A számjegyek számának lehetséges változásai:

törlés	1, 2	1, 3	2, 3
1	-1	-1	+1
2	-1	+1	-1
3	+1	-1	-1

**a)** Egy 2-es és 3-as törlése után az (1997, 1996, 1997) hármashból elérhető a csupa 2-es helyzet. Egy-egy lépésben mindegyik számjegy paritása megváltozik, a számjegyek közötti paritások különbözősége a játék folyamán végig megmarad. Másfajta végállapot tehát nem lehetséges, mert a 2-esek számának kezdeti paritása eltér a másik két szám paritásától, és a végállapotban az 1-esek és 3-asok számának paritása meg kell, hogy egyezzen.

**b)** Ciklikusan szimmetrikus csökkentés után elérhető a (0, 1, 2) helyzet, innen (1, 0, 1)-et, majd (0, 1, 0)-t kapjuk.

(Más megoldási lehetőségek: 1, 2 törlésével elérhető (0, 1, 3994), innen  $\rightarrow (1, 0, 3993) \rightarrow (0, 1, 3992) \rightarrow \dots \rightarrow (1, 0, 1) \rightarrow (0, 1, 0)$ .)

**Megjegyzések:** A játék felfogható egy olyan golyómodellnek, amelyben az 1-es, 2-es és 3-as számjegyek a piros, kék, sárga golyóknak feleltethetők meg. Ha nem irányított, hanem véletlenszerű folyamatot akarunk, akkor annyiban módosítjuk a visszatevési szabályt, hogy ha két egyforma golyót húzunk (számjegyet választunk), akkor mindkettőt visszatesszük. Így a játék kódja  $[3, 2, -1]$ , a golyószám (nem szigorúan monoton módon) csökkenő.

**9.12. (kitűzött) feladat:** Annak szükséges feltétele, hogy a végállapotban a három számjegy közül bármelyik megmaradhasson, az, hogy a három számjegy darabszámának azonos legyen a paritása. Ez a feltétel vajon elégséges is?

**9.13. feladat:** Egy szigeten 13 szürke, 15 barna és 17 zöld kaméleon él. Ha két különböző színű kaméleon találkozik, megijednek egymástól, mindketten a harmadik színre változtatják a bőrüket. Két azonos színű találkozásakor nem változtatják meg a színüket. Lehetséges-e, hogy egy idő múlva minden kaméleon ugyanolyan színűvé válik?

**Megoldás:** A játéknak megfelelő golyómodell kódja  $[3, 2, 0]$ . Az  $s, b, z$  színű kaméleonok számának lehetséges változásai:

törlés	$s, b$	$s, z$	$b, z$
$s$	-1	-1	+2
$b$	-1	+2	-1
$z$	+2	-1	-1

Észrevehetjük, hogy a játék folyamán  $(s - b)$ ,  $(s - z)$  és  $(b - z)$  3-as maradéka állandó. A végállapotban kétfajta kaméleonnak 3-mal osztva azonos maradékúnak (t.i. 0-nak) kellene lennie. Mivel kezdetben a számuk  $1, 0, 2 \pmod{3}$ , így nem lehetséges, hogy csak egyfajta kaméleon maradjon.

**Másik megoldási lehetőség:** Kódoljuk rendre az egyes fajtájú kaméleonokat 1, 2, 3 számokkal! Kezdetben a számok összege 94, s mivel az összeg lépésenként  $0, +3, -3$ -mal változhat, a 3-mal osztható végállapot nem állhat elő.

**9.14. (kitűzött) feladat:** Annak szükséges feltétele, hogy a végállapotban a három közül bármelyik színű kaméleon megmaradhasson, az, hogy a három szín darabszáma  $\pmod{3}$  azonos maradékot adjon. Ez a feltétel vajon elégséges is?

### Konform- és kontrastratégiák

**9.15. feladat:** Egy urnában tíz golyó van, kezdetben mind kék. Minden lépésben véletlenszerűen kiválasztunk egy golyót. A húzási szabály a következő: Ha a kiválasztott golyó kék, pirosra cseréljük ki, ha piros, akkor változtatás nélkül visszatesszük. A játéknak akkor van vége, amikor minden golyó piros. Átlagosan hány lépésig tart egy játék?

**Megoldás:** Ebben a  $[2, 1, 0]$  típusú játékban a piros golyók száma csak nőhet, a szabály a piros színt támogatja (piros konform stratégia). Többféle megoldási gondolatmenet lehetséges, amelyeket más golyómodellek vizsgálatakor is gyakran sikerrel alkalmazhatunk. Ezeket részletesen elemeztük a 4.1. feladat kapcsán, most csak az eredményt közöljük: 1000 szimuláció eredményeként 29,2-es átlagot kaptunk.

**Megjegyzés:** Észrevehetjük, hogy a 9.9. feladat második algoritmusáé éppen ennek a konform stratégiájú golyómodellnek feleltethető meg.

**9.16. feladat:** Határozzuk meg a 9.13. feladat kaméleon-problémájának  $s = 1, b = 3, z = 4$  kiindulási adatokhoz tartozó várható lépésszámát! (Emlékeztetőül: ha két egyforma színű kaméleon találkozik, nem történik semmi; különböző színűek a harmadik színre változtatják a színüket; a játéknak akkor van vége, ha minden kaméleon azonos színű; a várható lépésszám pedig a végállapot eléréséig a találkozások átlagos számát jelenti.)

**Megoldás:** Korábban megállapítottuk, hogy a végállapotban minden kaméleon barna színű lesz. A lépésszámok szempontjából tehát például az  $\{s, b, z\} = \{1, 3, 4\}$  és  $\{s, b, z\} = \{4, 3, 1\}$  állapotok ekvivalensek, ezeket nem érdemes megkülönböztetnünk egymástól. A játék folyamán - a színektől függetlenül - a következő állapotok lehetségesek:

$A = \{1, 3, 4\}$ ;  $B = \{0, 2, 6\}$ ,  $C = \{0, 3, 5\}$ ;  $D = \{2, 3, 3\}$ ,  $E = \{1, 2, 5\}$ ;  $F = \{2, 2, 4\}$ ,  
 $G = \{0, 1, 7\}$ ;  $H = \{4, 4, 0\}$ ,  $I = \{1, 1, 6\}$ . A modellt tekintve 8 golyó közül 2-t  $\binom{8}{2} = 28$ -féleképpen

választhatunk ki; az egyes állapotok közötti átmeneti valószínűségek tehát  $\frac{x}{28}$  alakúak lesznek. Jelöljük  $a, b,$

$\dots, i$ -vel a folyamat befejezéséig várható lépésszámot, ha a játék az  $A, B, \dots, I$  állapotokban van; ekkor például

az  $A$  állapothoz tartozó átlagos lépésszámot az  $a = 1 + \frac{3}{28}b + \frac{4}{28}c + \frac{12}{28}d + \frac{9}{28}a$  egyenlet adja meg. (Az

$A$  állapotból  $1 \cdot 3 = 3$ -féleképpen jutunk a  $B$  állapotba;  $1 \cdot 4 = 4$ -féleképpen  $C$ -be;  $3 \cdot 4 = 12$  esetben  $D$ -be; végül  $3$

$+ 6 = 9$  esetben  $A$ -ba. Az egyenlet értelmezése: az  $A$  állapotból lépünk 1-et, plusz  $\frac{3}{28}$  valószínűséggel átjutunk

a  $B$  állapotba, és innen átlagosan további  $b$  lépés szükséges stb.; a korábbi játékokhoz hasonló eljárással.)

Az állapotok közötti kapcsolatokat tehát az alábbi egyenletrendszerrel adhatjuk meg:

$$a = 1 + \frac{3}{28}b + \frac{4}{28}c + \frac{12}{28}d + \frac{9}{28}a, \quad \text{vagyis } 19a - 3b - 4c - 12d = 28;$$

$$b = 1 + \frac{12}{28}e + \frac{16}{28}b, \quad 12b - 12e = 28;$$

$$c = 1 + \frac{15}{28}f + \frac{13}{28}c, \quad 15c - 15f = 28;$$

$$d = 1 + \frac{12}{28}e + \frac{9}{28}f + \frac{7}{28}d, \quad 21d - 12e - 9f = 28;$$

$$e = 1 + \frac{10}{28}a + \frac{2}{28}g + \frac{5}{28}h + \frac{11}{28}e, \quad -10a + 17e - 2g - 5h = 28;$$

$$f = 1 + \frac{16}{28}a + \frac{4}{28}i + \frac{8}{28}f, \quad -16a + 20f - 4i = 28;$$

$$g = 1 + \frac{7}{28}b + \frac{21}{28}g, \quad -7b + 7g = 28;$$

$$h = 1 + \frac{16}{28}d + \frac{12}{28}h, \quad -16d + 16h = 28;$$

$$i = 1 + \frac{12}{28}c + \frac{1}{28} \cdot 0 + \frac{15}{28}i, \quad -12c + 13i = 28.$$

(Ez utóbbi egyenletben az  $\frac{1}{28} \cdot 0$  tag a végállapothoz tartozó 0 lépésszámot jelzi.)

Az egyenletrendszer elég bonyolult, a megoldást számítógéppel érdemes meghatározni.

**Eredmény:**

$(a; b; c; d; e; f; g; h; i) = (647,9; 653,1; 640,2; 646,8; 650,8; 638,3; 657,1; 648,5; 593,1)$ .

**9.17. feladat:** Egy dobozban 3 piros, 2 sárga és 4 kék golyó van. A statisztikus golyómodell szabályait megadhatjuk az alábbi mátrixszal:

	<b>p</b>	<b>s</b>	<b>k</b>
<b>p</b>	$p$	$p$	$k$
<b>s</b>	$p$	$s$	$k$
<b>k</b>	$k$	$k$	$p$

Itt a **p** sor és **s** oszlop  $p$  eleme azt a szabályt jelenti, hogy ha elsőnek egy piros, majd másodiknak egy sárga golyót húzunk, akkor egy piros golyót teszünk vissza a dobozba.

Elemezzük a játékot! Mekkora valószínűséggel marad egyetlen piros, sárga, illetve kék golyó a dobozban?

**Megoldás:** A táblázat szimmetrikus a főátlóra, vagyis a két kihúzott golyó sorrendjétől nem függ a visszatevési szabály. A játék csökkenő golyószámú,  $[3, 2, -1]$  típusú; a végállapotban egyetlen golyó marad, 8 lépés után. Az **s** sor elemei rendre  $p, s, k$ ; vagyis ha egy húzásban szerepel sárga golyó, akkor a sárga golyók darabszáma csökken.

Sárga golyó csak az  $(s, s)$  állapot után maradhatna; ez pedig csak akkor fordulhatna elő, ha az első 6 húzás egyikében sem lenne sárga golyó. Ez nem lehetséges, hiszen legkésőbb a 6. húzásban biztosan húzunk sárga golyót.

Előbb-utóbb tehát minden sárga golyó elfogy. A piros és kék golyók szempontjából pedig a játék az **5.7.** játékkal analóg; ha a sárga golyókat tartalmazó húzásokat figyelmen kívül hagyjuk, akkor a kék golyók számának paritása állandó, tehát a végállapotban csak piros golyó maradhat.

### Vegyes feladatok

**9.18. (kitűzött) feladat:** Egy dobozban 3 piros és 3 kék golyó van. Minden lépésben véletlenszerűen (visszatevéssel) kihúzunk egy golyót, s a színét feljegyezzük. A játéknak akkor van vége, ha a húzott piros és kék golyók számának különbsége eléri az 5-öt. Átlagosan hány húzásig tart a játék?

**Megjegyzés:** A piros és kék golyókat csak a fejezetcím kedvéért használtuk; a célnak ugyanígy megfelelt volna például egy szabályos érme is.

**9.19. (kitűzött) feladat:** Egy urnában 8 golyó van, kezdetben 4 piros és 4 kék. Minden lépésben véletlenszerűen kiválasztunk egy golyót, és ellenkező színűre cseréljük ki. A játéknak akkor van vége, ha minden golyó színe egyforma. Átlagosan hány lépésig tart ez a  $[2, 1, 0]$  típusú játék? (A játék mindkét színben kontrastratégiájú.)

(Eredmény: 149,3.)

**9.20. (kitűzött) feladat:** Az előző feladatot annyiban módosítjuk, hogy a játéknak akkor van vége, ha minden golyó piros. Átlagosan hány lépésig tart ez a  $[2, 1, 0]$  típusú játék?

(Eredmény: 305,4.)

**9.21. (kitűzött) feladat:** Egy dobozban négy különböző színű golyó van. Véletlenszerűen kiválasztunk kettőt, majd az első golyót olyan színűre festjük, mint amilyen a második. (A játék típusa [4, 2, 0].) Várhatóan hány húzás kell ahhoz, hogy minden golyó egyszínű legyen?

(Eredmény: 9.)

**9.22. (kitűzött) feladat:** Egy kémcsőbe egy amőbát helyezünk el. Az amőba szaporodási stratégiája a következő: minden perc végén

- vagy meghal;
- vagy kettéosztódik;
- vagy háromfelé osztódik;
- vagy ül tovább, mintha mi sem történt volna.

Mi annak a valószínűsége, hogy előbb-utóbb elpusztul az összes amőba, ha mind a négy állapotváltozás  $\frac{1}{4}$  valószínűséggel következik be?

(Eredmény:  $\sqrt{2} - 1 \approx 0,414$ .)

**9.23. (kitűzött) feladat:** Egy dobozban kezdetben 3 piros, 2 sárga és 4 kék golyó van. Elemezzük az alábbi **a) - d)** játékokat!

**a)**

**b)**

**c)**

**d)**

		<b>p</b>	<b>s</b>	<b>k</b>
<b>p</b>		<b>s</b>	<b>k</b>	<b>s</b>
<b>s</b>		<b>k</b>	<b>s</b>	<b>p</b>
<b>k</b>		<b>s</b>	<b>p</b>	<b>s</b>

		<b>p</b>	<b>s</b>	<b>k</b>
<b>p</b>		<b>s</b>	<b>k</b>	<b>s</b>
<b>s</b>		<b>k</b>	<b>ss</b>	<b>p</b>
<b>k</b>		<b>s</b>	<b>p</b>	<b>s</b>

(Itt *ss* és *pp* azt jelenti, hogy a dobozba két sárga, illetve két piros golyót teszünk vissza.)

**9.24. (kitűzött) feladat (egyirányú bolyongás):** [12]-ből származik a következő feladat:

Mindenki ismeri a „Ki nevet a végén” játékot, ahol pontosan a célmezőre kell lépni a győzelemhez. Ha a cél pontosan a 100. mező és egy dobókockával játszunk, akkor



eltekintve a kiütéstől vagy egyéb trükköktől, mekkora eséllyel fogunk pontosan a 100-as mezőre lépni a végén:  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{2}{7}$  vagy  $\frac{1}{2}$ ?

Jelentse  $p_i$  annak a valószínűségét, hogy a játékban az  $i$ -edik mezőre lépünk.

Írjunk egy programot, amellyel elvégezhetjük a játék nagyszámú szimulációját, s állapítsuk meg, hogy a három számérték közül melyik a helyes!

Igazoljuk, hogy  $p_i = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^{i-1}$ , ha  $i = 1, 2, \dots, 6$ .

Igazoljuk, hogy  $p_n = \frac{1}{6} p_{n-1} + \frac{1}{6} p_{n-2} + \frac{1}{6} p_{n-3} + \frac{1}{6} p_{n-4} + \frac{1}{6} p_{n-5} + \frac{1}{6} p_{n-6}$ .

Írjunk egy programot, amellyel kiszámoljuk  $p_{100}$  értékét a fenti rekurzív formula segítségével.

### A játékok számítógépes megvalósítása a tanítási órán

Véleményem szerint a játékra három szinten van lehetőség.

Az alapszint az lehet, amikor a témakört előkészítjük; vagyis mindenfajta elméleti tárgyalás nélkül, a diákok józan értékítéletére hagyatkozva például becsléseket végeztetünk velük. Egyik ilyen lehetőség a játékok szimulációja. A **9.3.** játékot véletlen  $k$ ,  $p$  paraméterekkel futtatva, a diákok tippelhetnek a győztes személyére és a húzások várható számára. Lehet egyéni vagy csapatversenyt is rendezni (például 13 + 1-es totó).

A **9.5.** játék szabályait is megváltoztathatjuk: lehetséges, hogy az  $A$  játékosnak  $x$  darab, a  $B$  játékosnak  $y$  darab piros (vagy kék) golyót kell a győzelméhez kihúznia; játszhatunk különböző színű golyókkal (ekkor egyes színek esetleg semlegesek); lehet több játékos stb.

Gyakoroltassuk a fordított irányú játékot is: amikor például a játékszabály (játékosok száma, a győzelem definíciója) ismertetése után megadjuk a piros golyók számát, s kérdés az, hogy az igazságos játékhoz hány kék golyót tegyünk az urnába; vagy adott az összes golyó száma, s a kérdés a piros és kék golyók aránya.

S persze számtalan lehetőség képzelhető el; érdemes meghallgatnunk a tanulók ötleteit is.

A játékok második szintje a matematikai alapozás után képzelhető el. Ekkor az egyszerűbb, kis paraméterű feladatok valószínűségei konkrétan kiszámíthatók; a számítógépes játék mintegy "ellenőrzi" a kapott eredményt. (Itt kiderülhet, mi is az a véletlen; valamint felvetődhetnek a gépi véletlenszámokkal kapcsolatos problémák is.)

A harmadik szint az lehet, amikor tetszőlegesen paraméterezett feladatot is meg tudunk oldani a számítógéppel; vagyis amikor a diákok a programozásba is bekapcsolódnak.

## 10. Érdekességek, paradoxonok



**10.1. feladat (a véletlen számok „kiegyenlítődési hajlama”):** A [6] könyvben olvashatunk egy újságcikkről: „Ha feldobunk egytrillió tízfillérest, rendkívül furcsa eredményt kapunk: néhány pénzdarab eltéréssel féltrillió fej lesz és féltrillió írás.” Átlagosan mennyi ez az újság által említett „néhány pénzdarabnyi eltérés”?

**Megoldás:** Hajlamosak vagyunk azt hinni, hogy nagyszámú (például  $10^{2k}$ ) dobás esetén a fejek és írások száma megközelítőleg egyenlő lesz. Ez nem így van.

Ez a probléma lényegében egy „fej vagy írás”-típusú érmedobálási vagy bolyongási feladat, ilyen volt például 3.6. és 6.3. Ezeknél a feladatoknál is jeleztük, hogy az egyensúlyi helyzettől való eltérés ez esetben a dobásszám gyökével arányos. Jó közelítéssel mondhatjuk, hogy egytrilliónyi ( $10^{18}$ ) dobás esetén a „néhány pénzdarabnyi eltérés” kb.  $10^9$  nagyságrendű, vagyis egymilliárdnyi értelmet jelent. (Annak ellenére, hogy a legvalószínűbb dobássorozat az, amelyikben a fejek és írások száma megegyezik!) Ez pedig azt jelenti, hogy csak a relatív eltérés tart nullához ( $10^{2k}$  dobás esetén ez közelítőleg  $10^{-k}$ ), az abszolút eltérés tetszőlegesen nagy lehet.

**Megjegyzés:** Emlékeztetőül: ha például  $2N$  dobás esetén  $F$  fejet dobunk, akkor a fejek számának az egyensúlyi helyzettől való abszolút eltérése  $|F - N|$ , a relatív eltérés pedig az abszolút eltérés és az összes dobás hányadosa:

$$\left| \frac{F - N}{2N} \right|.$$

Tekintsük a következő, gyakran elhangzó kijelentést: „Szabályos érme esetén a fejek számának relatív gyakorisága 0,5-hez tart.” A fenti példánk mutatja, hogy milyen nehézségekkel találkozunk a valószínűség fogalmának a definiálásakor; hiszen itt a „tart” szó egyáltalán nem a hagyományos, az analízisben már megszokott konvergencia-fogalmat jelenti.

### Kibe szerelmes a királylány?

**10.2. feladat:** Három herceg,  $A$ ,  $B$  és  $C$  egyaránt szerelmes Bergengócia királylányába. Elhatározzák, hogy egyetlen pisztolypárbajban eldöntik, melyikük legyen a kérő. Egyszerre körbeállnak és bármelyikük lőhet bármelyikükre. Tudják egymásról, hogy ha lő,  $A$  1,  $B$  0,8 és  $C$  0,5 valószínűséggel talál, ezért abban állapodnak meg, hogy először lő  $C$ , utána (ha életben van)  $B$ , végül  $A$ . Ha nincs vége a párbajnak, akkor még egy kört lönek azonos sorrendben.

Mikor a királylány meghallotta a feltételeket, a párbaj előtti este titokban kicserélte  $C$  első golyóját vaktöltényre.

**a)** Kibe szerelmes a királylány?

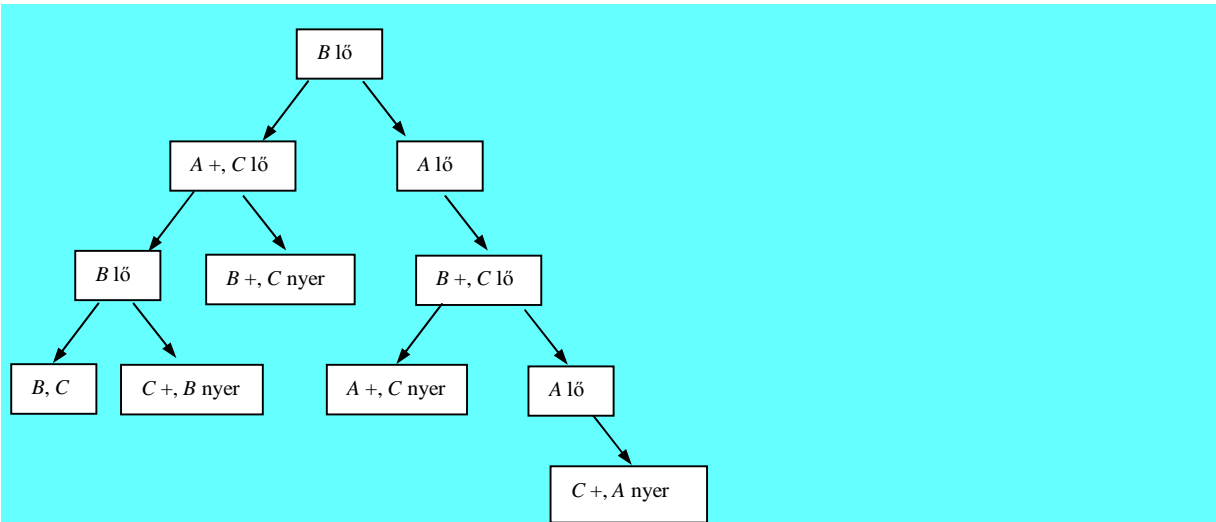
**b)** Hogyan változnak meg a párbaj valószínűségei, ha most a felek nemcsak kettő, hanem tetszőleges számú lövést adhatnak le?

(A királylány most is csak az első golyót cseréli ki vaktöltényre.)

**Megoldás:**

Jelöljük  $A$ ,  $B$ ,  $C$  győzelmi esélyét  $a$ ,  $b$ ,  $c$ -vel, a döntetlen valószínűségét  $D$ -vel.

1. eset: Nézzük azt az esetet, amikor megtörtént a csere, tehát  $C$  első golyója vaktöltény. Az első lövésből  $C$  nem talál,  $B$  következik. Ő nyilván  $A$ -ra lő (mert ha  $C$ -re löne, és őt véletlenül eltalálná, akkor  $A$  következik;  $A$  lelövi  $B$ -t és nyert). Ha  $B$  eltalálja  $A$ -t, akkor a játék "kétszemélyes" lesz  $B$  és  $C$  között; míg ha  $B$  nem találja el  $A$ -t, akkor  $A$  következik lövésre. Ő a két lehetséges ellenfele közül nyilván a veszélyesebb  $B$ -re lő, akit el is talál, így ismét "kétszemélyes játékot" kaptunk  $A$  és  $C$  között. A teljes játék folyamatábrája:



Mekkora valószínűséggel győznek az egyes párbajok?

$$P(A \text{ nyer}) = a = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10} \quad (\text{a folyamatot jelölhetjük például } \bar{C} \cdot \bar{B} \cdot A \cdot \bar{C} \cdot A \text{ módon is);}$$

$$P(B \text{ nyer}) = b = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{25} \quad (\text{a folyamat: } \bar{C} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot B).$$

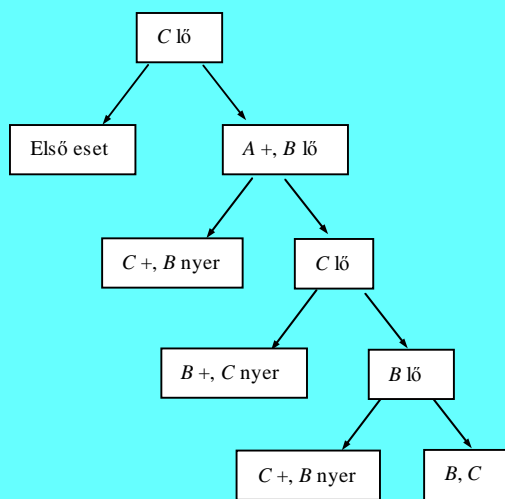
$B$  élve marad további  $\frac{2}{25}$  eséllyel, ez a  $B$ - $C$  döntetlen párbaj eredménye:  $\bar{C} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{B}$ .

$$P(C \text{ nyer}) = c = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (\text{a folyamat jelölése: } \bar{C} \cdot B \cdot C \text{ vagy } \bar{C} \cdot \bar{B} \cdot A \cdot C).$$

$C$  élve marad további  $\frac{2}{25}$  eséllyel, a döntetlen miatt.

2. eset: Vizsgáljuk most meg azt a helyzetet, amikor  $C$  első lövése nem vaktöltény!

Első lövéseivel  $C$  nyilván  $A$ -ra lő; ha nem találja el, előáll az első eset, míg ha talál, akkor  $B$  és  $C$  között egy kétszemélyes párbajt kapunk (amely meglehetősen előnyös  $B$ -nek, hiszen ő lő először, nagyobb valószínűséggel talál, és két lövési lehetősége van, míg  $C$ -nek csak egy). A folyamatábra:



$$P(A \text{ nyer}) = a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{20}, \quad b_2 = \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}, \quad c_2 = \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10},$$

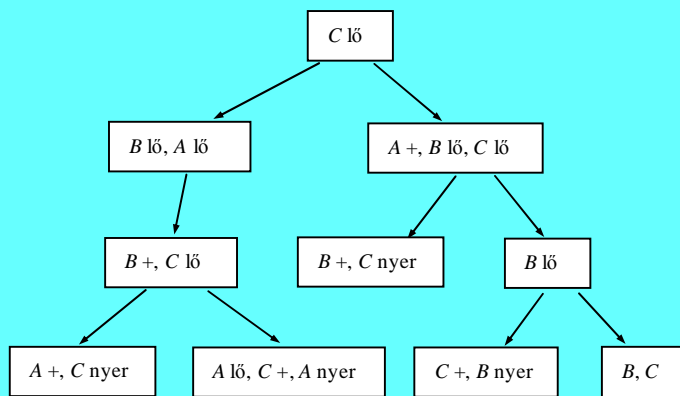
valamint  $B$  és  $C$  egyaránt élve marad a döntetlen lehetősége miatt  $d_2 = \frac{1}{2}d_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$  eséllyel.

Nos, kibe szerelmes a királylány?

Az eredmények alapján bármily meglepő, de úgy tűnik, hogy  $C$ -be, hiszen győzelmi esélye 20 %-kal megnőtt. De az is elképzelhető, hogy  $A$ -ba, hiszen neki a beavatkozás után kétszeresre nőtt a nyerési esélye.

Vizsgáljuk meg azt az esetet is, amikor  $B$  első golyóját cserélné ki a királylány! (Erre azért van szükség, mert elképzelhető, hogy ekkor  $A$  vagy  $C$  nyerési esélye jobban megnőne, mint az előző esetben.)

Ekkor a folyamatábra a következő:



Az egyes párbajozók nyerési esélyei:

$$P(A \text{ nyer}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ (a folyamat: } \bar{C} \cdot \bar{B} \cdot A \cdot \bar{C} \cdot A \text{);}$$

$$P(B \text{ nyer}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \text{ (a folyamat: } C \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot B \text{).}$$

$$P(\text{döntetlen } B, C \text{ között}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20} \text{ (a folyamat: } C \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{B} \text{).}$$

$$P(C \text{ nyer}) = c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (a folyamat jelölése: } \bar{C} \cdot \bar{B} \cdot A \cdot C \text{ vagy } C \cdot \bar{B} \cdot C \text{).}$$

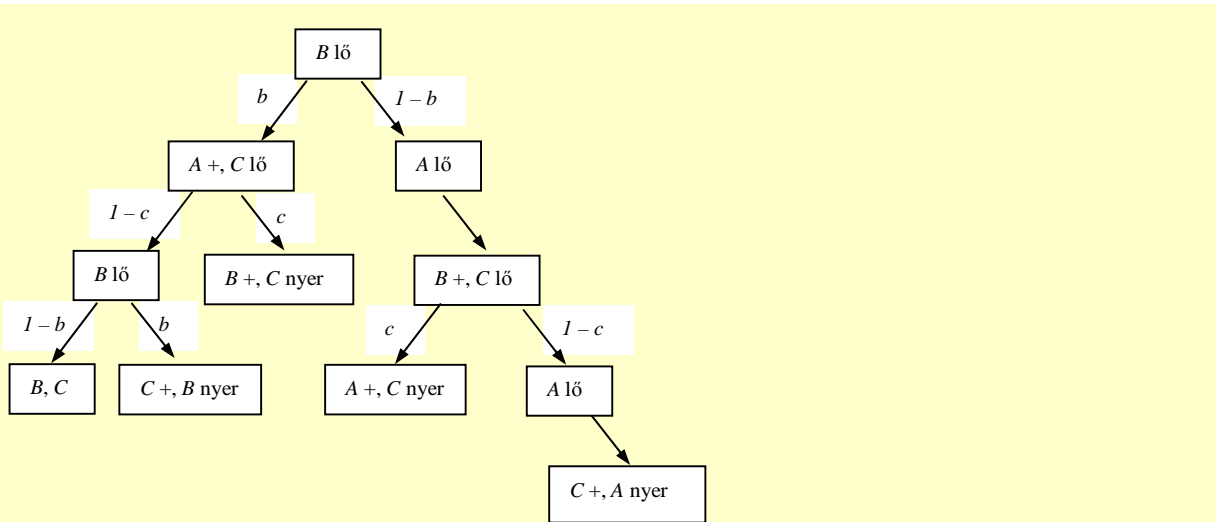
Foglaljuk táblázatba az eredményeket:

Az egyes játékosok ( $a = 1, b = 0,8, c = 0,5$ )	Győzelmi valószínűségek $C$ vaktöltényével	Győzelmi valószínűségek $B$ vaktöltényével	Győzelmi valószínűségek éles töltényekkel
$A$	10 %	25 %	5 %
$B$	32 %	20 %	60 %
$C$	50 %	50 %	30 %
döntetlen $B$ és $C$ között	8 %	5 %	5 %

A királynő tehát biztos, hogy  $C$ -be szerelmes. (Ha  $A$ -ba lenne szerelmes, akkor  $B$  töltényét cserélné ki.)

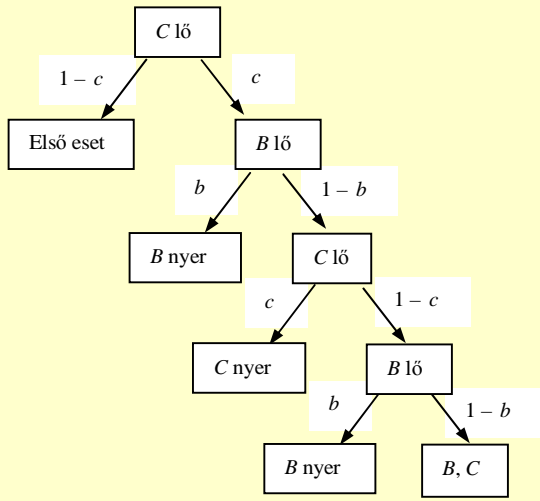
### Megjegyzések:

1. Az általános eset folyamatábrája  $a, b, c$  valószínűségekkel, ha  $C$  első golyója vaktöltény:



Ennek alapján, ha C első golyója vaktöltény, a nyeresi esélyek az alábbiak:  
 A nyer:  $a_1 = (1 - b)(1 - c)$ ;  
 B nyer:  $b_1 = b^2(1 - c)$ ;  
 C nyer:  $c_1 = c$ ;  
 D (döntetlen):  $d_1 = b(1 - b)(1 - c)$ .

Hogyan néz ki a folyamatábra akkor, ha az első golyó nem vaktöltény?



Ha C első lövésével A-t veszi célba, és golyója nem vaktöltény, akkor az alábbi győzelmi valószínűségeket kapjuk:  
 A nyer:  $(1 - c)a_1$ ;  
 B nyer:  $(1 - c)b_1 + bc + bc(1 - b)(1 - c)$ ;  
 C nyer:  $(1 - c)c_1 + c^2(1 - b)$ ;  
 D:  $(1 - c)d_1 + c(1 - c)(1 - b)^2$ .

Példaképpen nézzük meg, hogyan változnak a valószínűségek b és c csökkentésével:

Az egyes játékosok ( $a = 1; b = 0,5; c = 0,3$ )	A győzelmi valószínűségek vaktölténnyel	A győzelmi valószínűségek éles tölténnyel
A	35 %	24,5 %

<i>B</i>	17,5 %	32,5 %
<i>C</i>	30 %	25,5 %
döntetlen <i>B</i> és <i>C</i> között	17,5 %	17,5 %

Az egyes játékosok ( $a = 1; b = 0,8; c = 0,3$ )	A győzelmi valószínűségek vaktölténnyel	A győzelmi valószínűségek éles tölténnyel
<i>A</i>	14 %	9,8 %
<i>B</i>	44,8 %	58,7 %
<i>C</i>	30 %	22,8 %
döntetlen <i>B</i> és <i>C</i> között	11,2 %	8,7 %

2. A megoldás folyamán feltételeztük, hogy a királylány használni tudja a matematikai folyamatábrákat. Ha *C* is elég jó matematikus, akkor az egész csere-tranzakció felesleges, mert *C* első lövésével úgyszólván szándékosan a levegőbe lő.

3. Nem vizsgáltuk meg azt az esetet, ha a királylány *A* első golyóját cseréli ki. Ekkor ugyanis *A* első lövések kiderülne a turpisság.

### Az osztozkodás-paradoxon

**10.3. feladat (osztozkodás-paradoxon):** Két játékos egy szabályos érmével játszik. András akkor győz, ha - nem szükségképpen egymás után - öt fej jön ki, Béla pedig akkor, ha öt írás. A játszma négy fej, két írás állásnál véglegesen félbeszakad. Hogyan osztozzanak a játékosok az 1600 Ft-os tétén?

Az alábbiakban felsorolunk néhány gondolatmenetet, amelyek különböző megfontolásokon alapulnak.

**Első gondolatmenet:** Az összeget 4 : 2 arányban kell felosztaniuk, hiszen ennyi a dobott fejek és írások aránya.

**Második gondolatmenet:** Az összeget 3 : 1 arányban kell felosztaniuk, hiszen ennyi fej, illetve írás dobás hiányzik a játékosok győzelméhez.

**Harmadik gondolatmenet:** Még nincs vége a játéknak, *vagy* András nyer, *vagy* Béla. Az arány legyen 1 : 1, így igazságos.

**Negyedik gondolatmenet** (Niccolo Tartaglia (1499 - 1557) olasz matematikus): András 2 játékkal nyert többet, mint Béla, ezért meg kell kapnia az összes tét  $\frac{2}{5}$  részét, a maradékot pedig fele-fele arányban kell elosztani. Az arány 7 : 3.

**Ötödik gondolatmenet:** A 4 fej, 2 írás valószínűsége  $\frac{\binom{6}{2}}{2^6} = \frac{15}{64}$ . Ennyivel volt szerencsésebb András, ezért a javasolt osztozkodási arány 49 : 15.

**Hatodik gondolatmenet:** Csak az egyenlőnek számító "2 fej - 2 írás" álláshoz képest történt változást vizsgáljuk. András előnyösebb helyzetben van 2 fej dobással. A 2

többlétdobás kimenetele 4-féle lehet, a 2 fej dobás  $\frac{1}{4}$  valószínűségű. Ennek megfelelően a helyes osztozkodási arány 3 : 1.

**Megjegyzések:**

1. A fenti megoldások többségét diákjaim is javasolták, de egyik sem jó.
2. A helyes gondolatmenet kiválasztását érdemes feladatként kitűzni.

**Megoldás:** A feladat megoldásakor az a helyes kiindulási alap, ha azt vizsgáljuk meg, hogy a játékot tovább folytatva, a *játék befejezéséig mekkora valószínűséggel nyerne* András, illetve Béla. Ugyanis Béla csak akkor nyerhetne, ha a következő három dobás mindegyike írás lenne, ennek valószínűsége pedig  $\frac{1}{8}$ . Minden más

esetben András nyer, az igazságos osztozkodási arány tehát 7 : 1.

A hasonló típusú bonyolultabb feladatok (más kezdőhelyzet, más végállapot) a Markov-láncok segítségével tárgyalhatók; most erre nem volt szükségünk.

**3. Egy kis matematikátörténet:**

Már 1380-as és 1494-es kéziratokban is találkozunk a paradoxonnal (persze a korabeli megoldók még nem vették észre, hogy a feladat valószínűségszámítási jellegű, hiszen akkor ez a fogalom még nem is létezett). 1654-ben Pascal és Fermat egymástól függetlenül megoldotta a problémát, s ez akkoriban olyan komoly felfedezésnek számított, hogy sokan ma is ettől az időponttól számítják a valószínűségszámítás megszületését. Végül 1657-ben Huygens három játékos esetére is általánosította a problémát.

**10.4. (kitűzött) feladat:** A 10.3. alapfeladatban András 5 fej, Béla 5 írás esetén nyert (nem szükségképpen egymás utáni dobásokkal); s a játék András 4:2-es vezetésekor szakadt félbe. Vizsgáljunk meg egyéb félbeszakadt játékokat is: például ha András vezet

- a) 4:1;
- b) 3:2;
- c) 3:1 arányban.

Mekkora valószínűséggel nyer ekkor András?

**10.5. (kitűzött) feladat:** Egyéb általánosítási lehetőségek is elképzelhetők. Például: Andrásnak 6 fejet, Bélának 4 írást kell elérnie, s András 2:1-re vezet. Most mekkora valószínűséggel nyer András?

**10.6. (kitűzött) feladat:** Két játékos egy szabályos érmét folyamatosan dobál. András akkor győz, ha a fejek száma 5-tel több, mint az írások száma; Béla pedig akkor, ha az írások száma lesz több 5-tel a fejek számánál. Amikor a játszma véglegesen félbeszakad, a dobott fejek száma éppen 2-vel több, mint az írásoké. Hogyan osztozzanak a játékosok az 1600 Ft-os téten?

**10.7. (kitűzött) feladat:** Az osztozkodási alapfeladatot három játékosra általánosítjuk.

András akkor győz, ha - nem szükségképpen egymás után - öt fej jön ki; Béla akkor, ha öt írás; Csaba pedig akkor, ha három fej és három írás.

- a) Melyik játékosnak mekkora kezdetben a nyeresési esélye?

b) Átlagosan hány dobásig tart egy játék?

c) A játszma két fej, egy írás állásnál véglegesen félbeszakad. Hogyan osztozzanak a játékosok a mindannyiuk által befizetett 1600 Ft-os téten?

### Érmedobálási paradoxonok

Csak néhány példát sorolunk fel; további példák bőségesen találhatók [9]-ben.

**10.8. (kitűzött) feladat:** Három játékos,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  játékában három hosszú érmedobás-sorozatot vizsgálunk. Egy szabályos érmét folyamatosan dobálnak a játékosok úgy, hogy a játék szempontjából mindig csak az utolsó három dobás eredményét veszik figyelembe. (Egy lehetséges játék lenne például a következő:  $A$  nyer, ha az utolsó 3 dobás az FFF célsorozat,  $B$  nyer, ha III,  $C$  nyer, ha IFI.) A szabály ebben a játékban a következő:

Először az  $A$  játékos választ egy három hosszúságú sorozatot, ez lesz az ő célsorozata; ezután  $B$  választ egy célsorozatot úgy, hogy  $A$ -val szemben ez a lehető legjobb legyen számára; majd  $C$  választja azt, amelyik számára  $B$ -vel szemben a lehető legelőnyösebb. A játékosok által befizetett tét játékonként és fejenként 12 egység. Ez a játék  $A$  számára nagyon előnytelennek tűnik, ezért ha  $B$  vagy  $C$  nyer a játékban, akkor fájdalomdíjként a 36 egység nyeresémből 3 egységet átad  $A$ -nak.

Kinek legelőnyösebb így ez a játék? Hogyan kezdjen  $A$ ?

(Tapasztalunk valami érdekeset?)

**Útmutatás:** A 8.13. feladatban megadtuk a kétszemélyes, háromdobásos érmedobálási játékok esélyeit tartalmazó táblázatot, ezt most is közöljük:

	FFF	FFI	FIF	FII	IFF	IFI	IIF	III
FFF	–	1:1	2:3	2:3	1:7	5:7	3:7	1:1
FFI	1:1	–	2:1	2:1	1:3	5:3	1:1	7:3
FIF	3:2	1:2	–	1:1	1:1	1:1	3:5	7:5
FII	3:2	1:2	1:1	–	1:1	1:1	3:1	7:1
IFF	7:1	3:1	1:1	1:1	–	1:1	1:2	3:2
IFI	7:5	3:5	1:1	1:1	1:1	–	1:2	3:2
IIF	7:3	1:1	5:3	1:3	2:1	2:1	–	1:1
III	1:1	3:7	5:7	1:7	2:3	2:3	1:1	–

(Itt például az IFF sor FFF oszlopában lévő 7:1 arány azt jelenti, hogy az érmét folyamatosan dobálva annak valószínűsége, hogy előbb jön ki FFF, mint IFF,  $\frac{1}{8}$ , míg annak a valószínűsége, hogy hamarabb kapunk IFF-et,

$\frac{7}{8}$ .)

**10.9. feladat:** Ha a kétszemélyes „fej vagy írás” játékokban az  $A$  és  $B$  célsorozatok egymással szemben ugyanakkora valószínűséggel nyernek, a játékot „igazságosnak” nevezzük. Mutassuk meg, hogy az „igazságosság” nem tranzitív reláció!

**Megoldás:** Megfelelő például a 3.5. feladat három sorozata:  $A = FF$ ,  $B = II$ ,  $C = IF$ . Ugyanis a győzelmi arányok  $A : B = 1 : 1$ ,  $B : C = 1 : 1$ , de  $C : A = 3 : 1$ .

**10.10. (kitűzött) feladat:** Ha a kétszemélyes „fej vagy írás” játékokban az  $A$  és  $B$  célsorozatok egymás ellen játszanak, és  $A$  nagyobb valószínűséggel nyer, mint  $B$ , akkor az  $A$  sorozatot „jobb”-nak nevezzük. Mutassuk meg, hogy a „jobb” nem tranzitív reláció!

**Útmutatás:** Válasszuk ki a FFI, IFF, IIF, FII sorozatokat; s hasonlítsuk össze őket abból a szempontból, hogy melyiknek van nagyobb esélye arra, hogy korábban előforduljon. Legyen a sorrend FFI – IFF, IFF – IIF, IIF – FII, FII – FFI (lásd előző táblázat). Milyen érdekességet tapasztalunk?

**10.11. (kitűzött) feladat:** Próbáljuk az előző feladat eredményei alapján megbecsülni, hogy „fej vagy írás” játék esetén az FFI, IFF, IIF, FII sorozatokat (külön-külön) átlagosan hány dobás után kapjuk meg! Számoljuk is ki ezeket az értékeket.

**10.12. feladat:** Szabályos érmét sokszor ismételten feldobunk, míg vagy szomszédos FIFI, vagy szomszédos IFII sorozatokat kapunk. András akkor nyer, ha az FIFI sorozat jön ki hamarabb, míg Csaba akkor, ha az IFII sorozat.

a) Melyik játékosnak előnyös ez a játék?

b) Átlagosan hány dobást kell végeznünk, míg megkapjuk az egyik, illetve a másik sorozatot?

c) Nincs itt valamilyen ellentmondás?

**Megoldás: a)** Az első sorozat  $\frac{9}{14}$  valószínűséggel hamarabb fordul elő, a játék Andrásnak előnyös.

**b)** Az első sorozathoz átlagosan 20, a másodikhoz átlagosan 18 dobás szükséges.

**c)** Azt kaptuk, hogy az első esemény (FIFI) bekövetkezésének nagyobb a valószínűsége, mégis átlagban később következik be, mint IFII. Ennek az az oka, hogy ha IFII nyer, akkor általában ez gyorsan (és kis valószínűséggel) történik; míg ha FIFI nyer, az gyakrabban előfordul, de alkalmanként sok lépést igényelhet.

**10.13. (kitűzött) feladat:** Adottak IFF, IIF, FII, FFI. Két játékos játszik; először  $A$  választ egy sorozatot, majd egy ettől különbözőt  $B$ . „Mennyire” előnyös a korábban választó  $A$  számára ez a játék? Ha játékonként 100 Ft a tét, mennyi az átlagos nyeresége?

**Útmutatás: 10.10.** alapján a sorozatok „körbeverik” egymást, tehát hiába választhat elsőnek  $A$ , az ő sorozatánál mindig fog jobbat találni  $B$ . Tehát  $A$  átlagos nyeresége negatív lesz.

**10.14. (kitűzött) feladat:** A kétszemélyes „fej vagy írás” játékban a célsorozatok:  $A = IFF$ ,  $B = FFI$ . Az előállításukhoz szükséges átlagos lépésszám egyforma:  $L(A) = 8$ ,  $L(B) = 8$ ; mégis a győzelmi arány  $A : B = 3 : 1$ . Hogyan lehetséges ez?

**Útmutatás:** Lásd a 10.12. c) feladat megoldását.



**10.15. feladat:** A 8.6. feladatban (ami a 10.12. „kibővítése”) három játékos játszott egymás ellen. András akkor nyert, ha az FIFI sorozat jött ki hamarabb, Béla akkor, ha az IIFF sorozat, míg Csaba akkor, ha az IFII sorozat. Elemezzük a kapott eredményeket! Milyen érdekességeket vehetünk észre?

a) Ha az  $A = FIFI$ ,  $B = IIFF$ ,  $C = IFII$  sorozatok „önállóan” vesznek részt a játékban, akkor a bekövetkezésükhöz szükséges átlagos lépésszámokra az  $L(FIFI) = 20$ ,  $L(IIFF) = 16$ ,  $L(IFII) = 18$  értékeket kaptuk. Átlagban legkésőbb tehát az  $A$ , legkorábban pedig a  $B$  sorozat jön ki. De ebből *nem következik*, hogy a legelőnyösebb az  $A$  sorozat választása, hiszen a nyerési valószínűségekre kapott értékek  $(p_A, p_B, p_C) = \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8}\right)$ . (Hasonló a helyzet, mint a 10.12. és 10.14. feladatokban.)

Vagyis átlagban  $C$  veszít,  $A$  és  $B$  között pedig igazságosnak tekinthető a játék.

b) Ha a leggyengébb Csaba kiesik a versenyből (például elfogy a pénze), akkor  $A$  és  $B$  között folytatódik az elvileg igazságos játék. De itt váratlan dolog történik, ez a kétszemélyes játék már  $B$ -nek előnyös:  $A : B = 7 : 9$ .  $C$  kiesésével tehát *megváltoztak* az  $A$  és  $B$  közötti nyerési esélyek.

Az igazolás Conway algoritmusával a legegyszerűbb.  $A \circ A = 4 + 16 = 20$ ;  $A \circ B = 2$ ;

$$B \circ A = 2; B \circ B = 16; \text{innen } p_A = \frac{16 - 2}{20 + 16 - 2 - 2} = \frac{7}{16}.$$

c) Mekkora a  $B$  és  $C$  közötti játékban a győzelmi valószínűségek?

Conway módszerét alkalmazzuk.  $B \circ B = 16$ ;  $B \circ C = 0$ ;  $C \circ B = 2 + 4 = 6$ ;  $C \circ C = 2 + 16 = 18$ . Innen

$$p_B = \frac{C \circ C - C \circ B}{C \circ C + B \circ B - C \circ B - B \circ C} = \frac{3}{7}, \text{ a kétszemélyes játék már } C\text{-nek előnyös: } B : C = 3 : 4. \text{ Tehát}$$

váratlan eredményt kaptunk:  $A$  kiválásával *megváltoztak* a  $B$  és  $C$  közötti nyerési esélyek, a korábban leggyengébb  $C$  most erősebb lett  $B$ -nél.

d) Mekkora az  $A$  és  $C$  közötti játékban a győzelmi valószínűségek?

Eredmény:  $A : C = 9 : 5$  (10.12. feladat).

e) Ez az „igazság pillanata”: a kétszemélyes játékokban  $A$  legyőzi  $C$ -t,  $C$  legyőzi  $B$ -t, és  $B$  legyőzi  $A$ -t. Úgy is fogalmazhatunk, hogy az  $A, B, C$  sorozatok „körbeverik” egymást.

Korábban is láttuk már (a 10.10. feladatban), hogy a „jobb” vagy a „legyőzi” nem tranzitív reláció; az ott adott FFI, IFF, IIF, FII három hosszúságú célsorozatok körbeverték egymást. De most - a négy hosszúságú célsorozatok körében - a körbeverés példájához már elég volt három sorozatot megadnunk.