Fazakas Tünde

Ramsey tételéről: a tétel előkészítése és alkalmazása

(Készült a H533_003 továbbképzés záródolgozataként,
Schultz János, Mike János és Ábrahám Gábor előadásához)

Budapest, 2013. május 18.

I. Feladatok a Ramsey-tétel előkészítéséhez

1. Ketten játsszák a következő játékot: A-nak piros, B-nek kék színű ceruzája van. Egy szabályos ötszög csúcsait felváltva kötik össze, két pont között csak az egyik színű vonal haladhat, abból is legfeljebb egy. Az a játékos nyer, aki hamarabb tud olyan egyszínű háromszöget kialakítani, melynek csúcsai a szabályos ötszög csúcsai közül kerülnek ki. Kinek van nyerő stratégiája?

2. Meg lehet-e adni olyan ábrát az 1. feladathoz, amelyen döntetlen a végeredmény?

3. Bizonyítsuk be, hogy hat ember közül mindig ki lehet választani hármat úgy, hogy mindnyájan ismerjék egymást, vagy senki se ismerje a másik kettőt! (Az ismeretség kölcsönös.)

4. Igazoljuk, hogy minden hatpontú egyszerű gráf vagy komplementere tartalmaz háromszöget!

5. Egy hatpontú teljes gráf éleit két színnel színeztük: pirossal és kékkel. Hány egyszínű háromszög található a gráfban?

6. Igaz-e, hogy tetszőleges hétpontú egyszerű gráf vagy komplementer tartalmaz háromszöget?

7. Egy hétpontú teljes gráf éleit pirosra vagy kékre színeztük. Legalább hány egyszínű háromszög van a gráfban?

8. Mutassuk meg, hogy tetszőleges tízpontú egyszerű gráf tartalmaz háromszöget, vagy komplementere teljes négyszöget!

9. Lehet-e javítani az előző feladat eredményén?

10. Hány pontú egyszerű gráf esetén lehetünk biztosak abban, hogy a gráf vagy komplementere tartalmaz teljes négyszöget?

11. Igazoljuk, hogy tetszőleges n, k 1-nél nagyobb egészekhez létezik olyan $R(n, k)$ pozitív egész, hogy bármely legalább $R(n, k)$ csúcsú egyszerű gráfot tekintve a gráf tartalmaz n-klikket vagy komplementere k-klikket!

II. A Ramsey-tétel alkalmazása

12. Meg lehet-e adni három pozitív egész számot úgy, relatív prímek legyenek, de bármely kettő legnagyobb közös osztója 1-nél nagyobb?

13. Meg lehet-e adni öt pozitív egész számot úgy, hogy bármely hármat kiválasztva legyen közöttük relatív prím pár is, és legyen olyan pár is, melynek legnagyobb közös osztója 1-nél nagyobb?

14. Meg lehet-e adni hat pozitív egész számot úgy, hogy bármely hármat kiválasztva legyen közöttük relatív prím pár is, és legyen olyan pár is, melynek legnagyobb közös osztója 1-nél nagyobb?

15. Adott a síkban egy P pont. Meg lehet-e adni öt P-ből induló félegyenest úgy, hogy közülük tetszőleges hármat kiválasztva, legyen közöttük két olyan félegyenes, melyek 90°-nál nem nagyobb, és olyan kettő is, melyek 90°-nál nagyobb szöget zárnak be egymással? (Mindig a konvex szöget tekintjük.)

16. Adott a síkban egy P pont. Meg lehet-e adni hat P-ből induló félegyenest úgy, hogy közülük tetszőleges hármat kiválasztva, legyen közöttük két olyan félegyenes, melyek 90°-nál nem nagyobb, és olyan kettő is, melyek 90°-nál nagyobb szöget zárnak be egymással?

17. 17 tudós mindegyike levelezést folytat az összes többivel. Összesen háromféle témáról leveleznek, de bármelyik pár mindig csak ugyanarról az egy témáróll. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük lealább három olyan tudós, akik közül bármely kettő azonos témáról levelez egymással!

18. Igaz marad-e a 12. feladat állítása, ha csak 16 tudós van?

19. P_1, P_2, …, P_{10} a sík tíz olyan pontja, hogy közülük semelyik három nem esik egy egyenesbe, továbbá bármely két pont távolsága különböző. Igaz-e, hogy ki lehet választani a tíz közül két pontot (P_i-t és P_j-t) úgy, hogy valamely k-ra és l-re a $P_iP_jP_k$ illetve $P_iP_jP_l$ háromszög legrövidebb illetve leghosszabb oldala P_iP_j?

20. Bizonyítsuk be, hogy hat irracionális szám közül mindig ki lehet választani hármat úgy, hogy a kiválasztottak közül bármely kettő összege irracionális!

21. 99 irracionális szám közül szeretnénk kiválasztani n-et úgy, hogy az n közül bármelyik kettő összege irracionális legyen. Melyik az a legnagyobb n, amelyre ez bármely 99 irracionális szám esetén megtehető?

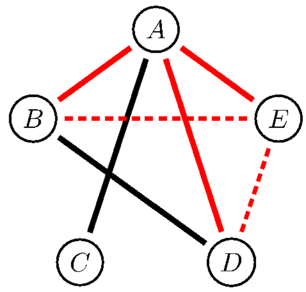
22. Igazoljuk, hogy tetszőlegesen megadott nyolc valós szám közül ki lehet választani négyet úgy, hogy ezek páronkénti összege mind racionális vagy irracionális legyen!

Megoldások (előkészítő feladatok)

1. Ketten játsszák a következő játékot: *Első*nek piros, *Második*nak kék színű ceruzája van. Egy szabályos ötszög csúcsait felváltva kötik össze, két pont között csak az egyik színű vonal haladhat, abból is legfeljebb egy. Az a játékos nyer, aki hamarabb tud olyan egyszínű háromszöget kialakítani, melynek csúcsai a szabályos ötszög csúcsai közül kerülnek ki.
Kinek van nyerő stratégiája?

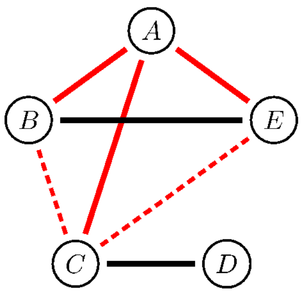
Megoldás
Elsőnek. Kezdő lépése az *AB* él behúzása.. *Második* kétféleképpen válaszolhat: vagy független élt húz, vagy csatlakozót.

Első eset: *Második* a csatlakozó *AC* él behúzásával válaszolt, akkor *Első AD*-vel felel. *Második* kénytelen *BD*-t behúzni, mire *Első AE*-t lép. Most *Második*nak egyszerre kellene *EB* és *ED* szakaszokat meghúzni, előbbi *AEB*, utóbbi *AED* piros háromszög létrehozását akadályozná meg. Csak egyiket rajzolhatja meg, így *Első* nyer (lásd az 1.a_ábrát).



1.a ábra

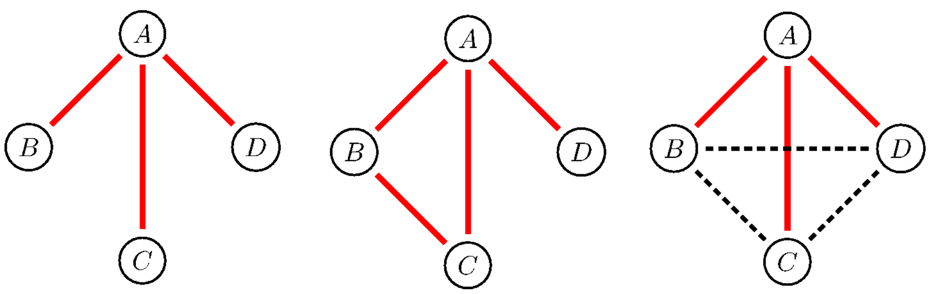
Második eset: *Második* a független *CD* éllel kezd, ekkor *Első AE*-vel válaszol. *Második* kénytelen *EB*-t behúzni, mire *Első AC*-t lép. Most *Második*nak egyszerre kellene *EC*-vel *AEC*, *BC*-vel *ABC* háromszög létrejöttét megakadályoznia, így veszít (lásd az 1b_ábrát).



1.b ábra

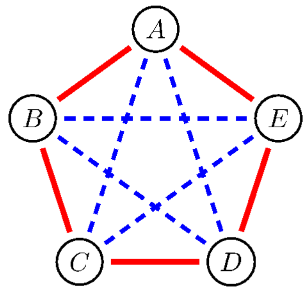
2. Meg lehet-e adni olyan ábrát az 1. feladathoz, amelyen döntetlen a végeredmény?

Megoldás
Igen, pontosan egyfélét. (Izomorf gráfok.)
Ha egy pont (*A*) piros foka legalább három lenne (*B*-vel, *C*-vel és *D*-vel van összekötve), akkor ha *BC*, *CD* vagy *DB* piros él, akkor piros nyert volna. Így mindhárom él csak kék lehet, de ekkor kék háromszöget kapunk. Tehát mindegyik pont foka csak kettő lehet a piros színek esetén (lásd a 2.a_ábrát).



2.a ábra

Hasonlóan kapjuk, hogy mindegyik csúcsból legfeljebb két kék él indulhat. Mivel összesen négy szakaszt húzunk a pontok mindegyikéből, ezért két pirosnak és két kéknek kell kiindulnia. Öt pontnál csak úgy tudjuk a piros gráf kettes fokszámát garantálni, ha egy kör a gráf. A kékre hasonlóan. Izomorfia erejéig meghatározott a színezés (lásd a 2.b ábrát).



2.b ábra

3. Bizonyítsuk be, hogy hat ember közül mindig ki lehet választani hármat úgy, hogy mindnyájan ismerjék egymást, vagy senki se ismerje a másik kettőt! (Az ismeretség kölcsönös.) (Kürschák verseny)

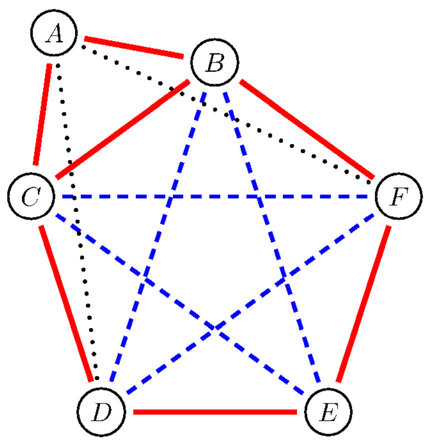
Megoldás
Válasszuk ki az egyik embert, *A*-t! A többi öt közül legalább hármat ismer, vagy legalább hármat nem ismer. Mondjuk ismeri *B*-t, *C*-t és *D*-t. (Nem ismeretség esetén a gondolatmenet hasonló.) Ha közülük valamelyik kettő ismeri egymást, akkor készen vagyunk, *A*-val a keresett hármas ismeretséget megtaláltuk. Így ők hárman nem ismerik egymást. Ekkor *B*, *C* és *D* három olyan ember, akik kölcsönösen nem ismerik egymást, készen vagyunk (lásd a 2.a ábrát).

4. Igazoljuk, hogy minden hatpontú egyszerű gráf vagy komplementere tartalmaz háromszöget!

Megoldás
Az előző feladatban alkalmazott gondolatmenettel kapjuk az állítást. Az emberek a gráf csúcsai, az élek az ismeretségnek felelnek meg.

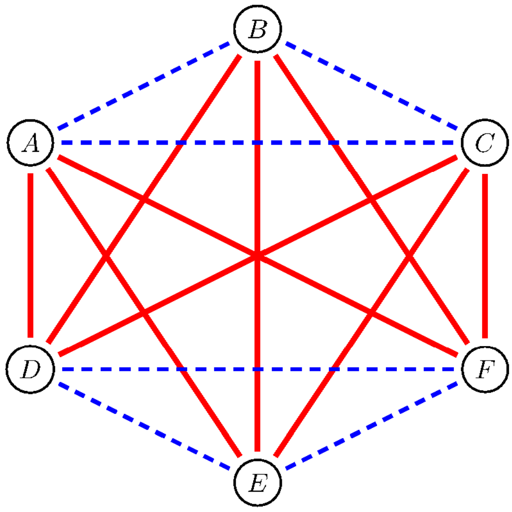
5. Egy hatpontú teljes gráf éleit két színnel színeztük: pirossal és kékkel. Hány egyszínű háromszög található a gráfban?

Megoldás
Legalább kettő. Az előző feladat értelmében legalább egy biztosan van. (A piros élek a gráfhoz, a kékek a komplementerhez tartoznak.) Tegyük fel, csak egy háromszög van! Legyen ez piros, csúcsai *A*, *B* és *C*. Hagyjuk el a gráfból az *A* csúcsot a belőle induló élekkel együtt! A 2. feladatban láttuk, hogy a maradék öt pont között csak akkor nincsen háromszög, ha mind a gráf, mind a komplementere egy öt pontú kör. (*BCDEF* a piros, illetve *BDFCE* a kék kör.) Nézzük *AD* és *AF* élek színét! Ha valamelyik piros, akkor van még egy piros háromszög, például *ABD*. Ha mindkettő kék, akkor *ADF* kék háromszög. Így mindig van legalább két egyszínű háromszög: lehet, hogy mindkettő azonos színű, de az is lehet, hogy egyik piros, másik kék (lásd az 5.a ábrát).



5.a ábra

Az már nem igaz, hogy mindig van legalább három háromszög. Megadunk egy színezést, melyben csak két egyszínű háromszög található. Teljes páros gráfként tekintjük az ábrát, 3-3 alsó és fölső ponttal. A gráfban csak páros hosszúságú kör van, így nem tartalmaz háromszöget. A komplementerben csak az egy osztályban fekvő pontok vannak összekötve, ez a két háromszög (lásd az 5.b ábrát).



5.b ábra

6. Igaz-e, hogy tetszőleges hétpontú egyszerű gráf vagy komplementere tartalmaz háromszöget?

Megoldás

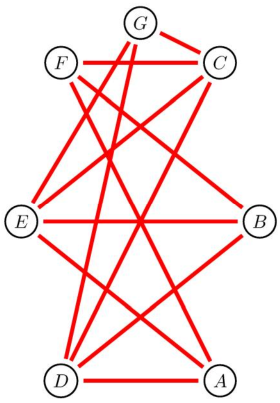
Természetesen igaz. Takarjuk le az egyik pontot a belőle induló élekkel együtt! A maradék hatpontú gráf tartalmaz háromszöget, a pontokat és éleket visszavéve a háromszög megmarad.

7. Egy hétpontú teljes gráf éleit pirosra vagy kékre színeztük. Legalább hány egyszínű háromszög van a gráfban?

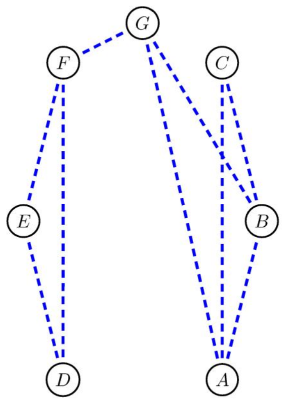
1. megoldás

Egy pontot letakarva a maradék hatpontú gráfban van legalább két háromszög. Az egyik háromszög egyik csúcsát vegyük ki a belőle induló élekkel együtt, s az eredetileg letakart csúcsot tegyük vissza! Ebben a gráfban is van legalább két háromszög, köztük újnak is kell lennie, hiszen egyet megszűntettünk. Következésképpen legalább három háromszöget találtunk. Mivel csak hét pontunk van, ezért legalább egy pont legalább két háromszögnek csúcsa. Most ezt a pontot vegyük ki a gráfból! Megszűntek azok a háromszögek, melyek tartalmazták ezt a csúcsot. A maradék hat pont meghatároz legalább két háromszöget, ezek és a tőlük különböző két ideiglenesen megszűnt legalább négy háromszöget jelent.

Többet már nem várhatunk. A mellékelt ábrán egy piros és három kék háromszög van (lásd a 7.a , 7.b ábrákat).



7.a ábra



7.b ábra

2. megoldás

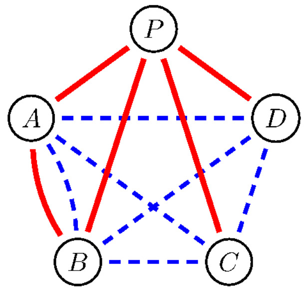
Ha egy pontot letörlünk, akkor a maradék hat legalább két háromszöget tartalmaz. Mind a hét ponttal megismételve az eljárást azt kapjuk, hogy legalább $7 \cdot 2 = 14$ háromszög van a gráfban. De mindegyik háromszöget többször számoltuk: négyszer, hiszen három csúcsukhoz négyféleképpen lehet a maradék négyből hármat kiválasztani. Ezért legalább $\frac{14}{4} = 3{,}5$, azaz legalább négy háromszög van a hétpontú gráfban.

8. Mutassuk meg, hogy tetszőleges tízpontú egyszerű gráf tartalmaz háromszöget, vagy komplementere teljes négyszöget!

Megoldás

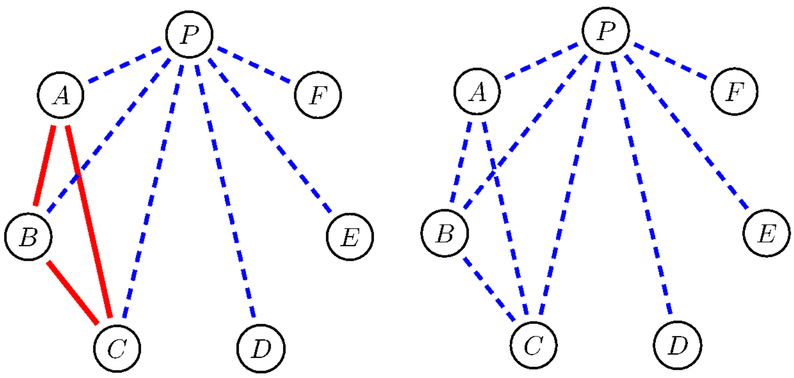
Minden pontból a gráfban és komplementerében összesen kilenc él indul. A gráf élei pirosak, a komplementeré kékek.

Ha valamely *P* pont piros foka legalább négy, akkor az *A*, *B*, *C* és *D* pontok legyenek *P* szomszédai! Ha *A*, *B*, *C* és *D* között nincs él, akkor a közöttük futó élek mind kékek, négyes kék klikkünk van. Ellenkező esetben *A*, *B*, *C* és *D* között legalább egy piros él fut (például *AB*), *P*, *A* és *B* piros háromszög. Így ezzel az esettel végeztünk (lásd a 8.a_ábrát).



8.a ábra

Ha *P* pont piros foka legfeljebb három, akkor kék foka legalább hat. Vegyük ezt a hat pontot! Hat pont között van piros vagy kék háromszög. Ha piros, készen vagyunk, ha kék, akkor a *P*-vel együtt kék teljes négyest adnak. Ezzel beláttuk az állítást (lásd a 8.b ábrát).



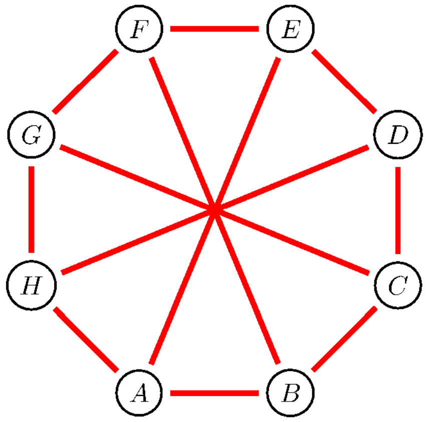
8.b ábra: ABC piros vagy kék háromszög

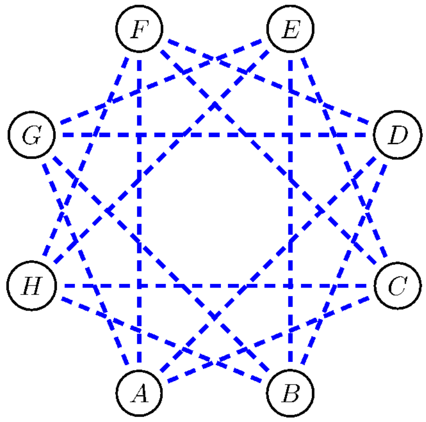
9. Lehet-e javítani az előző feladat eredményén?

Megoldás

Igen, az állítás kilenc pontra is igaz. Tegyük fel indirekten, hogy kilenc pontú gráfra már nem igaz az állítás! A fenti bizonyítás alapján, ha valamely pont foka legalább négy, vagy a komplementerben legalább hat, akkor készen vagyunk. Így ellenpéldát csak akkor várhatunk, ha mindegyik pont foka legfeljebb három, a komplementerben pedig legfeljebb öt. Mivel mindegyik pontból összesen nyolc él indul ki a két gráfban, így mind a kilenc pont foka a gráfban három, a komplementerben öt. De egyetlen gráfban sem lehet páratlan sok páratlan fokú pont, ezzel ellentmondáshoz jutottunk.

Nyolc pontra az állítás már nem igaz. Mutatunk egy ellenpéldát: a gráf csúcsai egy szabályos nyolcszög csúcsai, a gráf élei a nyolcszög oldalai és főátlói. A gráfban nyilván nincs háromszög. A komplementerben a nyolcszög szomszédos csúcsai között nincs él, így négyes klikk csak úgy lehetne az ábrán, ha minden második csúcsot vesszük. Ekkor a főátlók hiánya akadályozza a klikk létezését (lásd a 9 ábrát).





9. ábra

10. Hány pontú egyszerű gráf esetén lehetünk biztosak abban, hogy a gráf vagy komplementere tartalmaz teljes négyszöget?

Megoldás
Színezzük pirossal a gráf, kékkel a komplementer gráf éleit!
Vegyünk egy tetszőleges *P* pontot! Ha piros foka legalább kilenc, akkor a piros szomszédait vesszük. Tetszőleges kilencpontú gráfra teljesül (lásd előző feladat), hogy a gráf tartalmaz piros háromszöget vagy a komplementere teljes kék négyszöget. A kék négyszög esetén készen vagyunk. Ha piros háromszög van benne, akkor a P ponttal együtt kapjuk a teljes piros négyszöget, ez az eset is kész.
Ha a *P* pont kék foka legalább kilenc, akkor a fenti gondolatmenet ismétlésével (közben piros helyett kéket, kék helyett pirosat mondunk) kapjuk, hogy a komplementer vagy a gráf tartalmaz teljes négyes klikket.
Ha a gráfnak legalább 18 pontja van, akkor *P* csúcsnak az egyik színből legalább 9 szomszédja van. Azaz 18 pontú egyszerű gráf vagy komplementere biztosan tartalmaz négyes klikket.
Azt ezzel nem láttuk be, hogy az állítás 17 pontra nem igaz, ezzel a kérdéssel a továbbiakban nem foglalkozunk.

11. Igazoljuk, hogy tetszőleges n, k 1-nél nagyobb egészekhez létezik olyan $R(n, k)$ pozitív egész, hogy bármely legalább $R(n, k)$ csúcsú egyszerű gráfot tekintve a gráf tartalmaz n-klikket vagy komplementere k-klikket!
(Ramsey tétele két színre)

Megoldás
$(n + k)$-ra vonatkozó teljes indukcióval.
$n + k = 4$ esetén két pont elég: a gráfban vagy komplementerében van él.
$n = 2$, $k = 3$ esetén három csúcs elég: a gráfban van él, vagy a komplementerben háromszög.
$n = 3$, $k = 2$ esetén három csúcs elég: a gráfban van háromszög, vagy a komplementerben él.

Tegyük fel, hogy $(n + k) = m$-re az állítás igaz.
Bizonyítunk $(m + 1)$-re. $n = 2$, illetve $k = 2$ esetén az állítás nyilvánvaló.
Vegyünk egy n, k párt! P a gráf egy tetszőleges csúcsa.
(i) Ha P foka legalább $R(n -1, k)$, akkor a gráf tartalmaz $(n - 1)$-es klikket, vagy komplementere k-s klikket. Utóbbi esetben készen vagyunk, előbbi esetben P-t és a megfelelő éleket hozzávéve n-klikket kaptunk.
(ii) Ha P foka a komplementerben legalább $R(k - 1, n)$, akkor a komplementer tartalmaz $(k - 1)$-klikket, vagy a gráf n-klikket. Utóbbi eset kész, előbbi változatnál a $(k - 1)$ pontot P-vel kiegészítve k-klikkhez jutunk.
Így azon esetben, ha a gráfnak P-n kívül legalább $R(n -1, k) + R(k - 1, n) - 1$ pontja van, a skatulya-elv értelmében (i) vagy (ii) feltétel teljesül, az indukciót befejeztük.
$R(n, k) = R(n -1, k) + R(k - 1, n)$ választással a feladat állítását beláttuk.

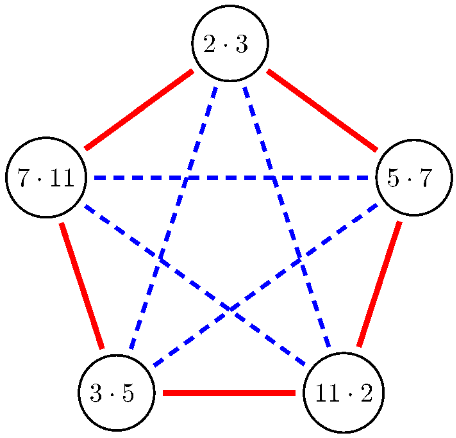
Megoldások (alkalmazások)

12. Meg lehet-e adni három pozitív egész számot úgy, relatív prímek legyenek, de bármely kettő legnagyobb közös osztója 1-nél nagyobb?

Megoldás
Igen, meg lehet adni. Például 2·3, 3·5, 5·2.

13. Meg lehet-e adni öt pozitív egész számot úgy, hogy bármely hármat kiválasztva legyen közöttük relatív prím pár is, és legyen olyan pár is, melynek legnagyobb közös osztója 1-nél nagyobb?

Megoldás
Igen, meg lehet adni. Az ábrán egy szabályos ötszög csúcsaiba írtuk a számokat, a relatív prímeket pirossal, a nem relatív prímeket kékkel kötöttük össze (lásd a 13. ábrát).



13. ábra

14. Meg lehet-e adni hat pozitív egész számot úgy, hogy bármely hármat kiválasztva legyen közöttük relatív prím pár is, és legyen olyan pár is, melynek legnagyobb közös osztója 1-nél nagyobb?

Megoldás
Nem lehet. A számok legyenek egy gráf csúcsai, két pontot akkor kötünk össze pirossal, ha a megfelelő két szám relatív prím, különben kékkel. A Ramsey-tétel értelmében van piros vagy kék háromszög. A háromszög csúcsainak megfelelő számok kiválasztása esetén nem lesz vagy két egymáshoz relatív prím, vagy két olyan szám, melynek legnagyobb közös osztója egynél nagyobb.

15. Adott a síkban egy *P* pont. Meg lehet-e adni öt *P*-ből induló félegyenest úgy, hogy közülük tetszőleges hármat kiválasztva, legyen közöttük két olyan félegyenes, melyek 90°-nál nem nagyobb, és olyan kettő is, melyek 90°-nál nagyobb szöget zárnak be egymással? (Mindig a konvex szöget tekintjük.)

Megoldás
Igen, meg lehet adni. Adott körüljárás szerint mérjünk fel 72°-os szögeket! A szomszédos félegyenesek hegyesszöget, a többi tompaszöget zár be egymással. Ha az öt félegyenesből hármat kiválasztunk, mindig lesz két szomszédos és két nem szomszédos is.

16. Adott a síkban egy *P* pont. Meg lehet-e adni hat *P*-ből induló félegyenest úgy, hogy közülük tetszőleges hármat kiválasztva, legyen közöttük két olyan félegyenes, melyek 90°-nál nem nagyobb, és olyan kettő is, melyek 90°-nál nagyobb szöget zárnak be egymással?

Megoldás
Nem lehet megadni. A félegyeneseket tekintsük egy gráf csúcsainak. A gráf éle piros, ha a félegyenesek szöge 90°-nál nem nagyobb; kék, ha nagyobb. Ramsey tétele szerint találunk egyszínű háromszöget. A megfelelő félegyeneseket kiválasztva csak az egyik féle szöget találjuk meg.

17. 17 tudós mindegyike levelezést folytat az összes többivel. Összesen háromféle témáról leveleznek, de bármelyik pár mindig csak ugyanarról az egy témárólI. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük lealább három olyan tudós, akik közül bármely kettő azonos témáról levelez egymással!
(IMO)

Megoldás
Tekintsük *A* tudóst! 16 másikkal levelezik, a skatulya-elv szerint legalább 6-tal ugyanarról a témáról, ***a***-ról. Ha közülük valamelyik kettő szintén ***a***-ról levelezik, akkor *A*-t hozzávéve megtaláltuk a hármas társaságot, készen vagyunk. Így feltehetjük, hogy hatan egymás között csak ***b*** és ***c*** témáról leveleznek. Ekkor az 5. feladat értelmében találunk közöttük hármat, akik egymással ugyanarról a témáról leveleznek. A bizonyítást befejeztük.

18. Igaz marad-e a 12. feladat állítása, ha csak 16 tudós van?

Megoldás (Hraskó András)
16 tudós tud úgy levelezni egymással három nyelven, hogy nincs köztük három, aki azonos nyelven levelezik. Feleltessük meg e 16 tudóst a négydimenziós bináris vektoroknak, azaz négy hosszúságú 0-1 sorozatoknak. Két ilyen vektor bináris különbsége (ami ugyanaz, mint az összege) is egy négy hosszúságú 0-1 sorozat, ami a 0000 sorozattól különbözik.
Két tudós levelezzen egymással az *A*, a *B*, illetve a *C* nyelven, ha sorozataik különbsége az alábbi *A*, *B*, ill. *C* csoportban van:

A:	0001,	0010,	0100,	1000,	1111;
B:	0011,	1100,	1001,	1110,	1011;
C:	1010,	0101,	0110,	0111,	1101.

A csoportokat úgy alakítottuk ki, hogy egy csoportban levő két vektor különbsége ne legyen ugyanabban a csoportban. Így épp azt értük el, hogy semelyik három tudós se levelezzen egymással egy rögzített nyelven.

19. P_1, P_2, …, P_{10} a sík tíz olyan pontja, hogy közülük semelyik három nem esik egy egyenesbe, továbbá bármely két pont távolsága különböző. Igaz-e, hogy ki lehet választani a tíz közül két pontot (P_i-t és P_j-t) úgy, hogy valamely k-ra és l-re a $P_iP_jP_k$ illetve $P_iP_jP_l$ háromszög legrövidebb illetve leghosszabb oldala P_iP_j?
(Kvant)

Megoldás
Tekintsük az adott pontokat egy gráf csúcsainak, két pont között akkor vezet él, ha van olyan háromszög, melynek a két pont által meghatározott szakasz a legrövidebb oldala! Tíz pont esetén Ramsey tétele garantálja, hogy gráf vagy komplementere tartalmaz háromszöget, legyen ez a háromszög mondjuk a $P_1P_2P_3$.

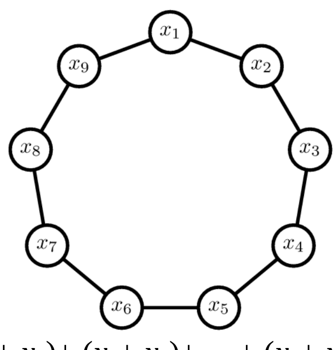
Először megmutatjuk, hogy a háromszög nem lehet a komplementer gráfban. Ugyanis ha a komplementer gráfban lenne, akkor a $P_1P_2P_3$ háromszög legrövidebb oldalát tekintve azt kapjuk, hogy ennek az oldalnak megfelelő él az eredeti gráfban van, ami ellentmondás.
Így ez a háromszög csak a gráfban lehet. A háromszög leghosszabb oldalát vesszük. Ez a szakasz valamely háromszög legrövidebb, míg $P_1P_2P_3$ háromszög leghosszabb oldala.

20. Bizonyítsuk be, hogy hat irracionális szám közül mindig ki lehet választani hármat úgy, hogy a kiválasztottak közül bármely kettő összege irracionális!

Megoldás
Tekintsük a számokat egy gráf csúcsainak! Két pontot akkor kötünk össze, ha a megfelelő számok összege racionális. Belátjuk, hogy a gráfban nincsen háromszög. Tegyük fel az ellenkezőjét! A háromszögben szereplő csúcsoknak megfelelő irracioális számok legyenek x, y és z. Az indirekt feltétel alapján $(x + y)$, $(x + z)$, $(z + y)$ is racionális, így összegük fele, $(x + y + z)$ is az. Ebből az összegből a racionális $(x + y)$ számot levonva azt kapjuk, hogy z is racionális. Ellentmondáshoz jutottunk, tehát a gráf nem tartalmaz háromszöget. Ekkor a Ramsey-tétel értelmében a gráf komplementere tartalmaz háromszöget. A háromszög csúcsainak megfelelő számok páronkénti összege így irracionális, ezzel beláttuk az állítást.

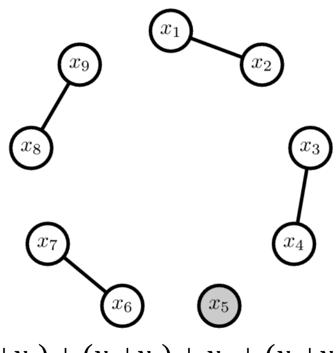
21. 99 irracionális szám közül szeretnénk kiválasztani n-et úgy, hogy az n közül bármelyik kettő összege irracionális legyen. Melyik az a legnagyobb n, amelyre ez bármely 99 irracionális szám esetén megtehető?

Megoldás
A számoknak megfeleltetjük egy gráf csúcsait. Ha két szám összege racionális, akkor a gráfban a megfelelő pontokat éllel kötjük össze.
Tegyük fel hogy a gráfban van páratlan hosszúságú kör! A kört alkotó számok összege racionális, hiszen (lásd a 14. a). ábrát) a kör egyes élein a két szám összege racionális, és ezen racionális számokat a kör minden élére összeadva racionális számot kapunk, ami a kört alkotó számok összegének duplája.



$(x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) + \ldots + (x_9 + x_1) = 2(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_9)$

14.a) ábra



$(x_1+x_2) + (x_3+x_4) + x_5 + (x_6+x_7) + (x_8+x_9) = (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_9)$

14.b) ábra

A kört alkotó számok összegét úgy is megkaphatjuk, hogy a kör minden második élét tekintjük (lásd a 14. b). ábrát), az annak két végén található számokat összeadjuk, és az így kapott értékeket is összeadjuk, és hozzátesszük még a kör egyetlen kimaradó csúcsát is. Ez az utoljára egyedül maradó szám így racionális lenne, ami ellentmondás, azaz a gráfban nincs páratlan hosszúságú kör.

Tehát páros gráfot kaptunk. A pontok egyik osztályában az összes pont felénél nem kevesebb van. Ezeknek megfelelő számokat kiválasztva a páronkénti összegek mind irracionálisak.

Többet nyilván nem tudunk garantálni. Vegyük a $k+\sqrt{2}$ és az $l-\sqrt{2}$ alakú számokat! (k és l pozitív egész.) Csak a $\sqrt{2}$-t azonos előjellel tartalmazóak összege irracionális. $k = l$ esetén a számok fele, $k = l \pm 1$ esetén a számok felének fölső egészrésze választható ki, az adott esetben 50.

22. Igazoljuk, hogy tetszőlegesen megadott nyolc valós szám közül ki lehet választani négyet úgy, hogy ezek páronkénti összege mind racionális vagy irracionális legyen!
(Fazekas matektábor)

Megoldás
Ha a nyolc szám közül legalább négy racionális, akkor ezeket kiválasztva az összegek racionálisak, készen vagyunk. Ha legfeljebb három, de legalább egy racionális szám van, akkor legalább öt szám irracionális. Mint láttuk, közülük kiválasztható legalább három úgy, hogy bármely kettő összege irracionális. Hozzájuk véve egy racionális számot, a négy kiválasztott szám között fellépő összegek mind irracionálisak, hiszen egy racionális és egy irracionális szám összege nem lehet racionális. Végül ha mind a nyolc szám irracionális, akkor ahogy már beláttuk, kiválasztható négy, a feltételeknek megfelelő szám.