.

# I. Sorozatok

**Def.** A pozitív egész számok halmazán értelmezett számértékű függvényeket sorozatoknak nevezzük.

**Megjegyzés:** 1. Egyes tárgyalási módokban kényelmességi szempontból nem $\mathbf{N}^+ \to \mathbf{R}$ függvényekről, hanem $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$ függvényekről beszélnek, azaz a sorozatok az $a_0$ elemmel kezdődnek.

2. Megkérdőjelezhető, hogy érdemes-e a sorozatot függvényként értelmezni, hiszen a sorozatokról mindenkiben él egy intuitív kép [„számok egymásutánja”], ami nem feltétlenül lesz precízebb a fenti definíciótól. Ez persze ízlés kérdése.

3. A sorozat nem halmaz, ugyanaz a szám többször is előfordulhat benne, és lényeges, hogy hányszor és hányadik helyen.

Sorozatokra a továbbiakban az $(a_n)$ jelölést fogjuk használni. (Természetesen lehet $(b_n)$, $(c_n)$ stb. is.)

## I.1. Sorozatok megadása

1. Történhet a sorozat ún. általános tagjának megadásával. Például: a sorozat $n$-edik tagja legyen $a_n = \dfrac{3n}{(n+2)^2}$.

Nem mindig tudjuk azonban ilyen egyszerű formulával megadni a sorozatot. Ha például a sorozatunk $n$-edik tagja a $\pi$ tizedestört-alakjából a tizedesvessző utáni első $n$ számjegyből képzett szám, akkor ez ugyan egy jól meghatározott sorozat, azonban elég körülményes kiszámítani pl. a 10000. tagját.

**Megjegyzés:** A sorozatok megadásánál ugyanabba a problémába ütközünk, mint a halmazok megadásánál. Ha például a sorozatunkat a következőképpen definiáljuk: legyen $a_n = 1$, ha $n$ tökéletes szám [önmagánál kisebb osztóinak összege önmagával egyenlő], és legyen $a_n = 0$, ha $n$ nem tökéletes szám, akkor el tudjuk dönteni [véges sok idő elteltével] a sorozat bármelyik eleméről, hogy 0 vagy 1, de például nem tudjuk megmondani, hogy van-e olyan páratlan sorszámú eleme a sorozatnak, amelyre $a_n = 1$. Az, hogy ezt a fenti sorozatot sorozatnak tekintjük-e vagy sem, megegyezés illetve szemlélet kérdése. Mi a továbbiakban elfogadjuk, mint sorozatot.

2. Történhet ún. rekurzív módon, amikor a sorozat elején szereplő néhány tag számértékét megadjuk, majd a további elemeket a korábban szerepelt tagok segítségével határozzuk meg.

.

pl. $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4;\ a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 4a_{n-3}$, ha $n > 3$

3. Megadhatunk egy sorozatot úgy is, hogy egy $\mathbf{N}^+$-nál bővebb halmazon értelmezett, adott *f* függvény $\mathbf{N}^+$-ra való leszűkítését vesszük.

pl. az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^3 + 3$ függvény az $a_n = f(n) = n^3 + 3$

## I.2. Korlátos és monoton sorozatok

**Def:** Az ($a_n$) sorozat felülről korlátos, ha létezik olyan *K* szám, hogy minden *n*-re $a_n \leq K$ [ekkor *K* a sorozat egy felső korlátja]; alulról korlátos, ha létezik olyan *k* szám, hogy minden *n*-re $k \leq a_n$ [ekkor *k* a sorozat egy alsó korlátja]. Az ($a_n$) sorozat korlátos, ha alulról és felülről korlátos.

**Megjegyzés:** A fenti definícióval ekvivalens definíció a korlátosságra: az ($a_n$) sorozat korlátos, ha létezik olyan $N > 0$ szám, hogy minden *n*-re $|a_n| \leq N$. Egyszerűen belátható, hogy $N = \max\ (|K|, |k|)$ megfelelő, ha a fenti definíció teljesül, illetve $l_1 = -N$ és $l_2 = N$ alsó illetve felső korlátok.

**Példák:**

1. Az $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ sorozat korlátos, mert $1 \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2$ minden *n*-re fennáll.

2. Az $a_n = n + 7$ sorozat alulról korlátos, mert például $7 \leq a_n = n + 7$ minden *n*-re, de felülről nem korlátos, mert ha *K* rögzített szám, akkor $K < n$, ha $n > K - 7$.

3. Az $a_n = (-1)^n \cdot n$ sorozat sem alulról, sem felülről nem korlátos.

A fenti egyszerű példák mutatják, hogy korlátos illetve csak alulról vagy csak felülről korlátos sorozatok is léteznek, sőt előfordul olyan sorozat is, amely semelyik oldalról nem korlátos.

A sorozatok korlátosságával kapcsolatban meg kell említenünk a legnagyobb alsó korlátot [infimum], illetve a legkisebb felső korlátot [supremum].

**Def.** Az ($a_n$) sorozat infimuma [legnagyobb alsó korlátja] az a *k* szám, amelyre teljesül:

1. *k* alsó korlát, azaz minden *n*-re $k \leq a_n$

.

2. $k$-nál nagyobb szám nem alsó korlát, azaz ha $k' > k$, akkor van a sorozatnak $k'$-nél kisebb eleme. [Ezzel egyenértékű megfogalmazás: ha $k'$ alsó korlát, akkor $k' \le k$.]
   Jelölés: $k = \inf a_n$

**Def.** Az ($a_n$) sorozat supremuma [legkisebb felső korlátja] az a $K$ szám, amelyre teljesül:

1. $K$ alsó korlát, azaz minden $n$-re $K \ge a_n$
2. $K$-nál kisebb szám nem felső korlát, azaz ha $K' < K$, akkor van a sorozatnak $K'$-nél nagyobb eleme. [Ezzel egyenértékű megfogalmazás: ha $K'$ felső korlát, akkor $K' \ge K$.]
   Jelölés: $K = \sup a_n$

**Tétel:** Ha az ($a_n$) sorozat felülről korlátos, akkor létezik legkisebb felső korlátja.

**Tétel:** Ha az ($a_n$) sorozat alulról korlátos, akkor létezik legnagyobb alsó korlátja.

A tétel kapcsán szót kell ejtenünk a Cantor-axiómáról. A valós számok rendezett testként való axiomatikus felépítése során kerül elő az arkhimédészi axiómával együtt.

**Cantor-axióma.** Egymásba skatulyázott, zárt intervallumok végtelen sorozatának van közös pontja, azaz ha minden $n$-re $I_n$ zárt intervallum és $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots$, akkor $\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i$ nem üres.

Más felépítésben természetesen szerepelhetnek más axiómák. Például azt is feltehetjük axiómaként, hogy minden korlátos halmaznak [sorozatnak] létezik a supremuma illetve az infimuma.

**Def.** Az ($a_n$) sorozat monoton növekvő, ha bármely $n \in \mathbf{N}^+$-ra $a_n \le a_{n+1}$.

**Def.** Az ($a_n$) sorozat monoton csökkenő, ha bármely $n \in \mathbf{N}^+$-ra $a_n \ge a_{n+1}$.

Ha az egyenlőtlenségekben szigorú egyenlőtlenség áll [az egyenlőséget nem engedjük meg], akkor *szigorúan monoton növekvő* illetve *szigorúan monoton csökkenő* sorozatról beszélünk. Az előző tulajdonságok valamelyikével rendelkező sorozatokat monoton sorozatoknak nevezzük.

**Megjegyzés:** Újabban használatos elnevezés, hogy a monoton növekedő sorozatokat monoton

.

nemcsökkenő, a monoton csökkenő sorozatokat monoton nemnövekvő sorozatoknak nevezik; ezzel együtt a monoton növekedő illetve monoton csökkenő elnevezés pedig a szigorúan monoton növekedő illetve szigorúan monoton csökkenő sorozatokra van fenntartva. Ez az elnevezés a sorozat monotonitási tulajdonságait jobban mutatja, de a hagyományos elnevezések jobban elterjedtek, ezért itt a továbbiakban a definícióban mondott elnevezéseket használjuk.

**Példák:**

1. Az $a_n = \frac{1}{n}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő, mert $n+1 > n$ miatt $a_n > a_{n+1}$ teljesül.

2. Az $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ sorozat szigorúan monoton növekvő, mert $1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$ a fent említett $n+1 > n$ egyenlőtlenség miatt.

3. Az $a_n = (-1)^n$ sorozat nyilvánvalóan sem monoton növekvő, sem monoton csökkenő.

4. Előfordulhat, hogy egy sorozat csak valamely tagjától lesz monoton. Például az $a_n = n^2 - 4n + 4$ sorozat első néhány eleme: $a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1,\ a_4 = 4, \ldots$ Az $f(x) = x^2 - 4x + 4$ függvény tulajdonságainak ismeretében tudjuk, hogy az ($a_n$) sorozat a második tagjától kezdve szigorúan monoton nő. Az ilyen típusú sorozatokat is monoton sorozatoknak nevezzük.

## I.3. Sorozatok és műveletek

A későbbiekben a sorozatok között különböző műveleteket fogunk végezni, ezért definiáljuk őket.

**Def.** Az ($a_n$) és ($b_n$) sorozatok összegén azt a ($c_n$) sorozatot értjük, amelyre $c_n = a_n + b_n$. Jelölése: $(c_n) = (a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$.

**Def.** Az ($a_n$) és ($b_n$) sorozatok különbségén azt a ($c_n$) sorozatot értjük, amelyre $c_n = a_n - b_n$. Jelölése: $(c_n) = (a_n) - (b_n) = (a_n - b_n)$.

**Def.** Az ($a_n$) és ($b_n$) sorozatok szorzatán azt a ($c_n$) sorozatot értjük, amelyre $c_n = a_n \cdot b_n$. Jelölése: $(c_n) = (a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$.

.

**Def.** Az $(a_n)$ és $(b_n)$ sorozatok hányadosán, ha minden $n$-re $b_n \neq 0$, azt a $(c_n)$ sorozatot értjük, amelyre $c_n = \frac{a_n}{b_n}$. Jelölése: $(c_n) = \frac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$

**Def.** Az $(a_n)$ sorozatnak a $\lambda \in \mathbf{R}$ valós számmal való szorzata az a $(c_n)$ sorozat, amelyre $c_n = \lambda a_n$. Jelölése: $(c_n) = \lambda(a_n) = (\lambda a_n)$.

**Def.** Az $(a_n)$ sorozatnak, melynek minden eleme nemnegatív, a $\lambda$-adik hatványa ($\lambda \in \mathbf{R}$) az a $(c_n)$ sorozat, amelyre $c_n = a_n^\lambda$. Jelölése: $(c_n) = (a_n)^\lambda = (a_n^\lambda)$.

**Megjegyzés:** A számok $\lambda$-adik hatványát tetszőleges $\lambda$-ra az eddigiekben nem értelmeztük. Ez a sorozatok tulajdonságait felhasználva lehetséges. Mivel itt ezzel a kérdéskörrel nem foglalkozunk részletesen, a sorozatok hatványozásánál már tetszőleges hatványkitevőt veszünk figyelembe. Így természetesen az $(a_n)$ sorozat elemeire megszorítást kell tennünk, mert a $\lambda$-adik hatványt tetszőleges $\lambda$-ra csak pozitív hatványalap esetén értelmezzük.

**Példák:**

1. Az $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$ sorozatok összege a $c_n = 1$ sorozat.
2. Az $a_n = 1 - n$, $b_n = 1 + n$ sorozatok különbsége a $c_n = -2n$ sorozat.
3. Az $a_n = 1 - n$, $b_n = 1 + n$ sorozatok szorzata a $c_n = 1 - n^2$ sorozat.
4. Az $a_n = 4n$ sorozat $\frac{1}{2}$-szerese a $c_n = 2n$ sorozat.

## I.4. Nevezetes sorozatok

### I.4.1. Számtani sorozat

**Def.** Számtani sorozatnak nevezzük az $(a_n)$ sorozatot, ha bármely tagja és az azt megelőző tagja különbsége állandó. Ezt az állandót $d$-vel jelöljük, és a számtani sorozat differenciájának nevezzük.

A számtani sorozat definíciója alapján a rekurzív képzési szabály: $a_n = a_{n-1} + d$. Az első tag segítségével is megadhatjuk az $n$-edik elemet, a rekurziót kikerülve: $a_n = a_0 + (n-1)d$. [Ez a tulajdonság pl. teljes indukcióval bizonyítható.]

.

A rekurzió segítségével a számtani sorozat alábbi egyszerű tulajdonságai rögtön látszanak:

a) ha $d > 0$, akkor $(a_n)$ szigorúan monoton növekvő, alulról korlátos, felülről nem korlátos

b) ha $d < 0$, akkor $(a_n)$ szigorúan monoton csökkenő, felülről korlátos, alulról nem korlátos

c) ha d = 0, akkor is beszélhetünk számtani sorozatról. Ez egyszerre monoton növekvő és csökkenő is, hisz a sorozat minden tagja ugyanaz.

A számtani sorozatnak nagy jelentősége van a sorozatokkal való megismerkedésben, hisz egyike a legegyszerűbb sorozatoknak, sőt az első számsorozat, amivel a tanulók megismerkednek [$a_n = n$], szintén ebbe a kategóriába tartozik. A számtani sorozat kezelhetősége igen jó, egyszerűek a vele kapcsolatos tételek és számítások, így alkalmas a bevezetésre és az első ismerkedésre a sorozatok tulajdonságaival.

### I.4.2. A számtani sorozat első *n* tagjának összege

A bizonyításra illetve az összeg felírására adott legegyszerűbb módszer Gauss nevéhez fűződik. Jelöljük az első *n* tag összegét $S_n$-nel. Írjuk le az összeg tagjait, majd írjuk le fordított sorrendben:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$$

Mivel a számtani sorozat tagjaira $a_k + a_{n-k+1} = (a_1 + (k-1)d) + (a_n - (k-1)d) = a_1 + a_n$, ezért a fenti két kifejezést függőlegesen tagonként összeadva a $2S_n = n \cdot (a_1 + a_n)$ kifejezést kapjuk, ahonnan $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$. Az első *n* tag összegét $a_1$-gyel és *d*-vel is kifejezhetjük ($a_n = a_1 + (n-1)d$ - t helyettesítve a fenti képletbe): $S_n = \dfrac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$.

**Megjegyzés:** Az $S_n$-re vonatkozó formula teljes indukcióval is bizonyítható. A bizonyításnak ez a módja azonban kevésbé mutat rá a dolog lényegére.

A számtani sorozat első *n* tagja összegének képlete egyszerű gyakorlati alkalmazások bemutatására ad lehetőséget.

.

**Példa:**

Egy útszakasz javításához homokbányából teherautóval homokot szállítanak. Az első kocsi homokot a bányától 8000 m-re rakják le, és minden további homokkupacot 25 m-re az előzőtől létesítenek. A 35. fordulónál milyen messzire megy az autó, és a 35 forduló megtétele közben mekkora utat tett meg?

**Megoldás:**

Az autó által a bányáktól a kupacokig megtett utak egy számtani sorozat egymást követő elemei, melynek első tagja 8000, a differenciája pedig 25. A 35. fordulóban lerakott kupac távolsága ennek 35. eleme, azaz $a_{35} = 8000 + 24 \cdot 35 = 8840$ m. Ahhoz, hogy az összesen megtett távolságot megtudjuk, össze kell adnunk a sorozat első 35 elemét (persze minden tagot kétszer kell számolnunk, mert az utakat az autó oda-vissza tette meg). A megtett távolság tehát $S = 2 \cdot \dfrac{8000 + 8840}{2} \cdot 35 = 589400 \text{ m}$.

A fenti feladathoz hasonlóan kell megoldani pl. páros számok, illetve egyéb számtani sorozatok összegzésére vonatkozó feladatokat.

Ha a számtani sorozat 3 egymást követő $a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$ tagját tekintjük, akkor az alábbi összefüggés áll fenn közöttük:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Azaz a középső tag a két szélső számtani közepe, innen ered a számtani sorozat elnevezés.

### I.4.3. Mértani sorozat

**Def.** Mértani sorozatnak nevezzük azt a számsorozatot, amelyben [a másodiktól kezdve] bármelyik tagnak és az azt megelőző tagnak a hányadosa állandó. Ezt az állandó hányadost $q$-val jelöljük, és a mértani sorozat hányadosának (kvóciensének) nevezzük.

A definícióból következik a mértani sorozat rekurzív képzési szabálya: $a_n = a_{n-1} \cdot q$. [$0 < q$ esetén a tagok előjele azonos, $q < 0$ esetén a tagok előjele váltakozó.]

Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy a mértani sorozat $n$-edik tagját az $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ képlettel adhatjuk meg.

**Megjegyzés:** Ez a definíció kizárja az $a_1 = 0$ illetve $q = 0$ eseteket. Ekkor ugyanis vagy a 0, 0, 0,

.

…, vagy az $a$, 0, 0, 0, … típusú sorozatokat kapnánk, azonban kényelmi szempontok miatt ezeket nem tekintjük mértani sorozatoknak.

Egyszerűen megmutatható, hogy $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$. Nem mondhatjuk azonban [a számtani sorozattal analóg módon], hogy a mértani sorozat egy tagja az őt közrefogó elemek mértani közepe, hisz a mértani sorozatnak negatív tagjai is lehetnek, így a fenti kijelentésünk nem lenne összhangban a mértani közép definíciójával. Helyesebb tehát csak a pozitív tagú mértani sorozatokra szorítkozni ebben az esetben. Ekkor megállapíthatjuk, hogy a pozitív számokból álló mértani sorozat bármely három egymást követő elemére igaz, hogy a két szélső mértani közepe egyenlő a középső taggal.
**Megjegyzés:** Természetesen mértani sorozatról beszélünk abban az esetben is, ha $q$ = 1. [Ez hasonló a számtani sorozatnál a $d$ = 0 esethez.]

A mértani sorozatok a például a kamatoskamat-számításnál bukkannak fel.

**Példa:**
Valamely év január 1-én beteszünk a bankba 10000 Ft-ot 15%-os kamatos kamatra, 5 évre. Mennyi pénz lesz a bankban a bankszámlánkon az 5 év leteltével?
**Megoldás:**
1 év elteltével a bankban $10000 + \frac{15}{100} \cdot 10000 = 10000 \cdot 1{,}15$ Ft-unk lesz. A következő évben $10000 \cdot 1{,}15 + (10000 \cdot 1{,}15) \cdot \frac{15}{100} = 10000 \cdot 1{,}15^2$ Ft-unk lesz. Egyszerűen belátható, hogy az $n$-edik év elteltével a bankban levő, kamatos kamatokkal növelt pénzösszeg $10000 \cdot 1{,}15^n$ Ft. Azaz az 5. év elteltével $10000 \cdot 1{,}15^5 \approx 20113{,}6$ Ft-unk lesz.

A fenti példa egyike a legegyszerűbb problémáknak, de jól illusztrálja az adott témakörben a mértani sorozatok szerepét. Bonyolultabb banki számításokban azonban a legtöbb esetben nem elég a mértani sorozatok használata, szükség van a mértani sorozatok első $n$ tagjának összegére is.

.

## I.4.4. A mértani sorozat első *n* tagjának összege

Idézzük fel a gimnáziumi első osztályos tananyagból az $a^n - b^n$ kifejezés szorzattá alakítását!

$$a^n - b^n = (a-b)\cdot(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

A mértani sorozat első n tagjának összegzésekor az alábbi összeget kell kiszámítanunk:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} = a_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1})$$

Ha a zárójeles kifejezést összevetjük a fenti szorzattal, akkor látható, hogy ott $a = q$, $b = 1$ helyettesítéssel hasonlót kapunk:

$$q^n - 1 = (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1)$$

Ha $q$ = 1, akkor természetesen $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, azaz $S_n = na_1$, ha $q \neq 1$, akkor pedig $q-1$-gyel leoszthatunk:

$$a_1\frac{q^n - 1}{q-1} = a_1(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1) = S_n$$

Nézzünk egy példát ennek alkalmazására!

**Példa:**

Asephad író szerint Sheran hindu királytól Sessa, a sakkjáték feltalálója jutalmul annyi szem búzát kért, amennyi a sakktábla négyzeteire kirakható úgy, hogy az első mezőre 1, a második mezőre 2, a harmadikra 4, a negyedikre 8, azaz minden mezőre kétszer annyi búzát tesznek, mint az előzőre. A király legyintett, hogy ilyen kicsiny kérést könnyűszerrel tud teljesíteni. Számítsuk ki, hogy mennyi búzát kért a feltaláló, ha 16 szem búza kb. 1 gramm!

**Megoldás:**

Az első mezőre 1, a másodikra 2, az *n*-edikre $2^n$ db búzaszem kerül. A sakktáblán így összesen $1+2+4+8+\ldots+2^{63}$ db búzaszem van. $1+2+4+\ldots+2^{63} = \frac{2^{64}-1}{2-1} = 2^{64}-1$. Ez a mennyiség lényegében $2^{64}$ [érezhető, hogy ehhez képest az 1 elhanyagolhatóan kicsi], ami $\frac{2^{64}}{2^4} = 2^{60}$ gramm. Mivel $2^{10} \approx 1000$, ezért ez kb. $2^{50}\,\mathrm{kg} = (2^{10})^5\,\mathrm{kg} \approx 1000^5\,\mathrm{kg} = 10^{15}\,\mathrm{kg}$. Ez $10^{12}$, azaz egybillió tonna.

.

## I.4.5. A Fibonacci-sorozat

Képzeljünk magunk elé egy nyúlfarmot. A farmon minden nyúl évente egyszer fial, de születése után el kell telnie egy évnek, hogy fialhasson. Így tehát minden évben a nyulak száma annyival növekszik, amennyi nyúl már két évvel azelőtt a farmon volt. Ha az $n$-edik év végén a nyulak számát $a_n$-nel jelöljük, akkor az előző év végén $a_{n\text{-}1}$ nyúl volt a farmon, de közülük csak a már egy éve a farmon élő $a_{n\text{-}2}$ nyúl fial, azaz $a_n = a_{n\text{-}1} + a_{n\text{-}2}$ [ $a_{n\text{-}2}$ a növekmény). A kezdőértékek: $a_1 = 1, a_2 = 1$. A fenti rekurzióval keletkező, és megadott kezdőértékekkel rendelkező sorozatot Fibonacci-sorozatnak nevezzük.

A Fibonacci-sorozathoz más meggondolással is eljuthatunk. Képzeljük azt, hogy egy lépcső van előttünk, és úgy akarunk felmenni rajta, hogy egyszerre egy vagy két lépcsőfokot lépünk. Az első lépcsőfokra nyilvánvalóan csak egyféleképpen léphetünk fel. A másodikra kétféleképpen: rögtön a másodikra, vagy az elsőre és onnan a másodikra. A továbbiakban a számolás egyszerűsíthető: az $n$-edik lépcsőfokra az $n$-1-edik vagy az $n$-2-edik lépcsőfokról léphetünk. Ha $a_n$-nel jelöljük az $n$-edik fokra való feljutási lehetőségek számát, akkor nyilvánvaló, hogy $a_n = a_{n\text{-}1} + a_{n\text{-}2}$.

## I.4.6. A Fibonacci-sorozat néhány egyszerű tulajdonsága

a) Számítsuk ki a sorozat első $n$ tagjának összegét!

Írjuk fel a kérdéses összeget, és alakítsuk át!

$$a_1 + a_2 + ...+ a_{\mathrm{n}} = a_1 + a_2 + (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + ... + (a_{n-2} + a_{n-1}) =$$
$$= a_2 + 2(a_1 + a_2 + ... + a_{n\text{-}2}) + a_{n\text{-}1}$$

Ebből az összefüggésből:

$$a_{n-1} + a_n = a_2 + a_{\mathrm{n}-1} + (a_1 + a_2 + ... + a_{n-2})$$
$$a_n - a_2 = a_n - 1 = a_1 + a_2 + ... + a_{n-2}$$

Nyilvánvaló, hogy ha a sorozat tagjainak összegét az $n$-edikig akarnánk kiszámítani, akkor a fenti összegzésben az eredeti összeget $a_{n+2}$-ig kell elkészíteni, és ekkor az

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = a_{n+2} - 1$$

kifejezést kapjuk.

.

b) Számítsuk ki a Fibonacci-sorozat első $n$ tagja négyzetének összegét!

Ha $k \geq 2$, akkor $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$. Szorozzunk $a_k$-val, és fejezzük ki $a_k^2$-t!

$$a_k^2 = a_{k+1}a_k - a_k a_{k-1}$$

Innen kapjuk, hogy

$$a_1^2 = a_2 a_1 \quad (\text{mert } a_1 = a_2 = 1)$$

$$a_2^2 = a_3 a_2 - a_2 a_1$$

$$a_3^2 = a_4 a_3 - a_3 a_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1}^2 = a_n a_{n-1} - a_{n-1} a_{n-2}$$

$$a_n^2 = a_{n+1} a_n - a_n a_{n-1}$$

Ha a jobb- és baloldalakat összeadjuk, akkor a baloldalak összege a kívánt négyzetösszeget adja, a jobboldalon pedig az egymást követő kifejezések tagjai a váltakozó előjel miatt kiesnek, kivéve az utolsó tagot:

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = a_{n+1} a_n$$

Jobb képességű diákoknál [pl. speciális matematika tagozaton vagy fakultáción, szakköri foglalkozás keretében] a Fibonacci-sorozat mélyebb tulajdonságairól is szót ejthetünk.

**Def.** Fibonacci-szerű sorozatoknak nevezzük az olyan $(a_n)$ sorozatokat, melyekre $n \geq 3$ esetén $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ .

Nyilvánvaló, hogy minden Fibonacci-szerű sorozatot az első két eleme határoz meg, ezeket viszont tetszőleges értéknek választhatjuk. Az is nyilvánvaló, hogy két Fibonacci-szerű sorozat összege illetve számmal való szorzata szintén Fibonacci-szerű.

Könnyen megmutatható, hogy van olyan mértani sorozat, amely Fibonacci-szerű. Legyen ennek kvóciense $q$, első eleme $a_1$. Ekkor a következő összefüggésnek kell teljesülnie:

$$a_1 q^n = a_1 q^{n-1} + a_1 q^{n-2}$$
$$q^2 = q + 1$$

Azaz $q$ az $x^2 - x - 1 = 0$ egyenlet gyökei közül kerülhet ki.

.

$$q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$ Ebből tehát

$$a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,\ b_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

A fentiekben már megmutattuk, hogy minden Fibonacci-szerű sorozatot az első két eleme határoz meg. Ebből következik, hogy ha $(f_n)$ Fibonacci-szerű sorozat, akkor abban az esetben, ha az A, B számok kielégítik az $f_1 = \mathrm{A}a_1 + \mathrm{B}b_1$, $f_2 = \mathrm{A}a_2 + \mathrm{B}b_2$ egyenleteket, $(f_n) = \mathrm{A}(a_n) + \mathrm{B}(b_n)$. Ez nyilvánvaló, mert az $\mathrm{A}(a_n) + \mathrm{B}(b_n)$ sorozat Fibonacci-szerű a korábban mondottak értelmében [Fibonacci-szerű sorozatok összege illetve számmal való szorzata is Fibonacci-szerű], és az első két eleme megegyezik $(f_n)$ első két elemével. Megmutatható az is, hogy az $f_1 = \mathrm{A}a_1 + \mathrm{B}b_1$, $f_2 = \mathrm{A}a_2 + \mathrm{B}b_2$ egyenleteknek mindig egyértelmű megoldása van. Ennek következménye az alábbi tétel:

**Tétel:** Minden Fibonacci-szerű sorozat egyértelműen előáll $\mathrm{A}(a_n) + \mathrm{B}(b_n)$ alakban.

A Fibonacci-szerű sorozatokkal való számolást megkönnyíti, ha az elemek sorszámozását nem 1-től, hanem 0-tól kezdjük. Ekkor a fenti egyenletrendszer az $f_0 = \mathrm{A} + \mathrm{B}$, $f_1 = \mathrm{A}a_1 + \mathrm{B}b_1$ alakot ölti. Konkrétan a Fibonacci-sorozat esetében a sorszámozás módosítását úgy is megtehetjük, hogy hozzáveszünk a sorozathoz egy $a_0 = 0$ elemet, és a sorozatot az $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ kezdőértékekkel adjuk meg.

A Fibonacci-sorozat illetve a Fibonacci-szerű sorozatok a legegyszerűbb példái a rekurzióval megadott sorozatoknak, amelyek általános tagját csak kissé körülményesen tudjuk meghatározni, azonban a rekurzív formulát felhasználva érdekes tulajdonságait tudjuk bebizonyítani illetve kideríteni. Jó példa arra, hogy hogyan lehet egy sorozatot kezelni anélkül, hogy az elemeinek általános alakját ismernénk.

## I.5. Sorozatok konvergenciája

**Def. I.** Az $a$ számot az $(a_n)$ sorozat határértékének nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $N$ szám, hogy ha $N < n$, akkor $|a_n - a| < \varepsilon$.

Szavakkal ez azt jelenti, hogy „egy idő után” [azaz $N$-nél nagyobb indexű tagokra] a sorozat elemei legfeljebb ε távolságra lesznek $a$-tól. Mivel ε-ra csak az a kikötésünk, hogy pozitív, a fenti definíció azt jelenti, hogy egy idő után a sorozat elemei tetszőlegesen megközelítik $a$-t.

**Def. II.** Az $a$ számot az $(a_n)$ sorozat határértékének nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $N$ szám, hogy $N < n$ esetén $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Könnyen látható, hogy az I. és II. definíciók ekvivalensek. Sőt, adható egy harmadik definíció is:

**Def. III.** Az $a$ számot az $(a_n)$ sorozat határértékének nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ számra az $|a_n - a| < \varepsilon$ egyenlőtlenség véges sok kivétellel teljesül, azaz a sorozatnak az $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ intervallumon kívül csak véges sok eleme van.

Ha az $a$ szám az $(a_n)$ sorozat határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az $(a_n)$ sorozat konvergens, és tart $a$-hoz, ha $n$ tart végtelenbe. Jelölése: $a_n \to a,\ n \to \infty$, vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (olvasd: limesz $a_n$ egyenlő $a$-val, ha $n$ tart végtelenbe). Az $N$ számot szokás küszöbszámnak vagy küszöbindexnek nevezni.

**Példák:**

1. Az $a_n = \frac{1}{n}$ sorozat konvergens, és határértéke 0. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor keresnünk kell olyan $N$-t, melyre $N < n$ esetén $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Pl. $N = \frac{1}{\varepsilon}$ megfelelő.

2. Az $a_n = 1$ sorozat konvergens, és határértéke 1. Ez nyilvánvaló, mert tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra $|a_n - 1| = 0 < \varepsilon$ minden $n$ esetén, tehát pl. $N = 1$ megfelelő küszöbszám.

3. Az $a_n = n$ sorozat nem konvergens, ugyanis bármilyen $a$ számot, és bármilyen $\varepsilon > 0$ számot veszünk, nem teljesül a definíció feltétele, nem létezik küszöbszám. Tegyük fel, hogy mégis lenne.

Legyen $a$ és $\varepsilon > 0$ rögzített, és tegyük fel, hogy ha $N < n$, akkor $|a_n - a| < \varepsilon$. Azonban ha $n > |a| + \varepsilon$, akkor $|a_n - a| > \varepsilon$. Ez viszont ellentmondásra vezet, mert $n > \max(|a| + \varepsilon, N)$ esetén $|a_n - a| > \varepsilon$ és $|a_n - a| < \varepsilon$ egyszerre áll fenn, tehát nem létezik küszöbszám, azaz a sorozat nem konvergens.

A fenti példák mutatják, hogy vannak konvergens, és nem konvergens sorozatok is. Ez utóbbi típusú sorozatokat divergensnek nevezzük.

A harmadik definíció egy kérdést vet fel. A definícióból következik, hogy ha az $(a_n)$ sorozat határértéke $a$, akkor minden $\varepsilon > 0$ számra az $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ intervallumba végtelen sok eleme esik az $(a_n)$ sorozatnak. Miért nem elég ez utóbbit kimondani? Mert előfordulhat, hogy ugyan a mondott következmény teljesül, de nemcsak az intervallumon belül, hanem rajta kívül is végtelen sok eleme van a sorozatnak.

**Példa:**

$$a_n = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n}, \text{ ha } n \text{ páros} \\ \dfrac{1}{n}, \text{ ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

Ekkor az $(a_n)$ sorozatnak a $(-\varepsilon, \varepsilon)$ illetve $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ intervallumba végtelen sok eleme esik, így az egyes intervallumokon kívülre is végtelen sok eleme esik.

**Def.** Az $(a_n)$ sorozat torlódási pontjának nevezzük az $a$ számot, ha minden $\varepsilon > 0$ számra az $(a_n)$ sorozatnak az $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ intervallumba végtelen sok eleme esik.

Nyilvánvaló, hogy ha az $a$ szám határértéke az $(a_n)$ sorozatnak, akkor egyben torlódási pontja is. Fordítva nem igaz: abból, hogy az $(a_n)$ sorozatnak az $a$ szám torlódási pontja, nem következik, hogy $(a_n)$ határértéke az $a$ szám [ezt mutatja a fenti példa is]. Egy sorozatnak tetszőlegesen sok, akár végtelen számú torlódási pontja is lehet.

Megkülönböztethetjük azokat az eseteket a konvergens sorozatoknál, amikor a sorozat úgy tart egy számhoz, hogy valamely küszöbszámtól kezdve nagyobb [kisebb] nála. Ekkor azt mondjuk, hogy a sorozat felülről [alulról] tart a határértékéhez.

## I.5.1. Konvergens sorozatok tulajdonságai

**Tétel:** Minden konvergens sorozat korlátos.

A konvergens sorozatok ezen tulajdonságát arra tudjuk felhasználni, hogy ha egy sorozatról megállapítható, hogy nem korlátos, akkor nem is lehet konvergens.

**Példa:**

Az $a_n = n$ sorozat nem korlátos, így nem is lehet konvergens.

**Tétel:** Ha az $(a_n)$ sorozat konvergens, akkor a határértéke egyértelmű.

Ez a tulajdonság azért fontos, mert elég csak egy határértéket találnunk, azaz egy olyan számot, amely teljesíti a definíciót.

**Tétel:** **[*Rendőr-elv*]** Ha adott három sorozat, $(a_n)$, $(b_n)$, $(c_n)$, melyre $a_n \to a, c_n \to a$ és $a_n \le b_n \le c_n$ valamely küszöbindextől kezdve, akkor $(b_n)$ is konvergens és határértéke *a*.

**Megjegyzés:** Az elnevezés abból a hasonlatból származik, hogy ha két rendőr közrefog egy bűnözőt, a két rendőr az őrszobára tart és a bűnöző mindig közöttük marad, akkor ő is az őrszobára tart.

Ez a tulajdonság akkor van nagy segítségünkre, amikor egy sorozatot már ismert határértékű sorozatokkal tudunk alulról illetve felülről közrefogni, így a vizsgált sorozat konvergenciája és határértéke megállapítható.

**Példa:**

Konvergens-e az $a_n = \frac{1}{n!}$ sorozat?

**Megoldás:**

Nyilvánvaló, hogy $0 < n < n!$ . Ebből következik, hogy $0 < \frac{1}{n!} < \frac{1}{n}$. A rendőr-elv értelmében, mivel

$\frac{1}{n} \to 0,\ 0 \to 0$, ezért $\frac{1}{n!}$ konvergens, és 0-hoz tart.

## I.6. Részsorozatok; korlátosság, monotonitás és konvergencia kapcsolata

**Def.** Legyen $(a_n)$ végtelen sorozat. Legyen $n_1, n_2, n_3, \ldots$ a természetes számok egy végtelen, szigorúan monoton növekedő részsorozata. Ekkor az $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$ sorozatot az $(a_n)$ sorozat részsorozatának nevezzük.

A definíció más szavakkal azt jelenti, hogy a részsorozat az a sorozat, amely az eredeti sorozat valamely [akár végtelen sok] tagjainak elhagyásával, a maradék tagok sorrendjének megtartásával keletkezik. Persze arra ügyelnünk kell, hogy az elhagyás után is még végtelen sok tag maradjon, de a fenti feltétel ezt garantálja.

**Megjegyzés:** A részsorozat fogalmának segítségével új definíciót adhatunk a torlódási pontra:

**Def.** Az $(a_n)$ sorozat torlódási pontja az $a$ szám, ha van az $(a_n)$ sorozatnak olyan részsorozata, amelynek határértéke $a$.

**Tétel:** Ha az $(a_n)$ sorozat konvergens és határértéke $a$, akkor bármely részsorozata konvergens és határértéke $a$.

**Megjegyzés:** A tétel megfordítása is igaz, azaz ha $(a_n)$ minden részsorozata konvergens, és határértéke $a$, akkor $(a_n)$ is konvergens és határértéke $a$.

A tétel jelentősége abban rejlik, hogy ha egy sorozatról valamilyen módon meg tudjuk mutatni, hogy konvergens, akkor elég egy tetszőleges részsorozatának határértékét megadni, ezzel megadtuk az egész sorozat határértékét, valamint ha a sorozatunk olyan konvergens részsorozatokra bontható, melyek határértéke megegyezik, akkor a sorozat határértékét is könnyen meg tudjuk határozni.

**Példa:**

Legyen az $(a_n)$ sorozat az alábbi sorozat:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2}, \text{ ha } n \text{ páros} \\ \dfrac{1}{n}, \text{ ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

Ekkor nyilvánvaló, hogy a páros indexű tagok a $b_n = \frac{1}{n^2}$, a páratlan indexű tagok a $c_n = \frac{1}{n}$ részsorozatokat határozzák meg. Mivel $(b_n)$ és $(c_n)$ határértéke 0, így az $(a_n)$ sorozat is konvergens, és határértéke 0.

**Tétel:** Korlátos, monoton sorozat konvergens.

**Megjegyzés:** A tétel a legkisebb felső korlát illetve a legnagyobb alsó korlát létezésének következménye.

A tétel lehetőséget ad arra, hogy bizonyos sorozatok konvergenciájának kérdését eldöntsük, de a legtöbb esetben arra nem ad módot, hogy konkrétan meg is határozzuk az adott sorozat határértékét.

**Példa:**

Konvergens-e az $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}$ sorozat?

**Megoldás:**

A sorozat nyilván szigorúan monoton növő, mert $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. Be kellene még látni, hogy a sorozat korlátos is. A monoton növekedés miatt ehhez elég belátni, hogy a sorozat felülről korlátos.

Tudjuk, hogy $\frac{1}{k^2} \le \frac{1}{(k-1)k}$ teljesül $k \ge 2$ esetén. Ekkor tehát a következő felső becslést adhatjuk a sorozat tagjaira:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} \le 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)n} =$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \le 2$$

A sorozat tehát szigorúan monoton növekvő és korlátos, így konvergens.

**Megjegyzés:** A sorozat konvergenciáját megállapítottuk, de határértékének kiszámítása már nehézségekbe ütközik. Euler számította ki először egyéb matematikai módszerekkel, és a $\frac{\pi^2}{6}$ eredményt kapta.

**Tétel:** Minden sorozatnak van monoton részsorozata.

A fenti tétel illetve a monoton, korlátos sorozatok konvergenciájára vonatkozó tétel egyszerű következménye:

**Tétel: [*Bolzano-Weierstrass tétel*]** Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.
A tétel más szavakkal azt mondja, hogy minden korlátos sorozatnak van torlódási pontja.

Felvetődik az a kérdés, hogy csinálhatunk-e olyan határérték illetve torlódási pont definíciót, amely nem csak korlátos sorozatokra alkalmazható.

## I.7. Tágabb értelemben vett határérték (A végtelen mint határérték)

Tekintsük az $a_n = n$ sorozatot. Korábban már láttuk, hogy nem korlátos, és nyilvánvaló, hogy szigorúan monoton növő. Az eddigi definícióink szerint nincs határértéke, mégis úgy érezzük, hogy „tart valahova”, hogy „tart a végtelenbe”.

**Def.** Az $(a_n)$ sorozat határértéke a plusz végtelen, ha az $(a_n)$ sorozat minden határon túl növő, azaz minden *K* számhoz létezik olyan *N* szám, hogy $n > N$ esetén $a_n > K$. Jelölés: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

**Def.** Az $(a_n)$ sorozat határértéke a mínusz végtelen, ha az $(a_n)$ sorozat minden határon túl csökkenő, azaz minden *K* számhoz létezik olyan *N* szám, hogy $n > N$ esetén $a_n < K$. Jelölés: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

**Megjegyzés:** A $\infty$ jelnek szimbolikus jelentése van a fentiekben és a továbbiakban, hiszen nincs olyan szám, mely „végtelen nagy”. A definíció gyakorlatilag azt jelenti, hogy a sorozat tagjai között tetszőlegesen nagy, illetve tetszőlegesen kicsi (nagy abszolút értékű negatív) tagok is vannak. A szóhasználatban azt is mondjuk, hogy az $(a_n)$ sorozat tart plusz végtelenhez, vagy tart mínusz végtelenhez.

A fenti határérték definícióval analóg módon definiálhatjuk a végtelent mint egy sorozat torlódási pontját.

**Def.** Az $(a_n)$ sorozat torlódási pontja a +∞, ha a sorozatnak van plusz végtelenhez tartó részsorozata, azaz minden *K*-ra a sorozatnak van végtelen sok *K*-nál nagyobb eleme.

**Def.** Az $(a_n)$ sorozat torlódási pontja a –∞, ha a sorozatnak van mínusz végtelenhez tartó részsorozata, azaz minden *K*-ra a sorozatnak van végtelen sok *K*-nál kisebb eleme.

**Megjegyzés:** Noha definiáltuk a végtelent mint határértéket, mégsem mondjuk, hogy egy sorozat konvergens, ha a határértéke végtelen. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a sorozat divergens, de van határértéke, a plusz vagy a mínusz végtelen. A „konvergens” jelzőt fenntartjuk a véges határértékkel rendelkező sorozatok számára.

Foglaljuk össze egy kis táblázatba, hogy milyen elnevezéseink vannak a sorozatok konvergenciájára illetve divergenciájára:

| | | |
|---|---|---|
| Van határértéke | $(a_n)$ határértéke az $a$ szám | Konvergens |
| | $(a_n)$ határértéke a +∞<br>$(a_n)$ határértéke a –∞ | Divergens |
| Nincs határértéke | $(a_n)$-nek nincs határértéke | |

**Példa:**

Határozzuk meg az alábbi sorozat torlódási pontjait: $a_n = 2^{(-1)^n \cdot n}$ !

**Megoldás:**

A sorozat a $b_k = a_{2k} = 2^{2k} = 4^k$, és a $c_k = a_{2k-1} = 2^{-(2k-1)} = \dfrac{1}{2^{2k-1}} = \dfrac{2}{4^k}$ részsorozatokra bontható. A $(b_k)$ sorozat határértéke +∞, a $(c_k)$ sorozat határértéke 0. Így tehát a sorozat torlódási pontjai a 0 és a +∞.

A végtelen mint határérték bevezetésével korábbi tételeink újrafogalmazhatóak (azaz olyan megfogalmazást adhatunk, amely érvényes a tágabb értelemben vett [végtelen] határértékre illetve a tágabb értelemben vett [végtelen] torlódási pontra is):

**Tétel:** Ha az $(a_n)$ sorozatnak van határértéke, akkor a határérték egyértelmű.

**Tétel: [*Rendőr-elv plusz végtelenhez tartó sorozatokra*]** Ha az $(a_n)$ sorozat tart plusz végtelenhez és valamely küszöbindextől kezdve $a_n \le b_n$, akkor a $(b_n)$ sorozat is tart plusz végtelenhez.

**Tétel: [*Rendőr-elv mínusz végtelenhez tartó sorozatokra*]** Ha az $(a_n)$ sorozat tart mínusz végtelenhez és valamely küszöbindextől kezdve $a_n \ge b_n$, akkor a $(b_n)$ sorozat is tart mínusz végtelenhez.

**Tétel:** Monoton sorozatnak van határértéke.

**Tétel:** Minden sorozatnak van határértékkel rendelkező részsorozata.

**Tétel:** Ha az $(a_n)$ sorozatnak létezik határértéke, akkor minden részsorozatának is van határértéke, és ez megegyezik $(a_n)$ határértékével.

**Megjegyzés:** Akárcsak korábban a hasonló tételnél, itt is igaz a tétel megfordítása: Ha az $(a_n)$ sorozat minden részsorozata konvergens, és ezek határértéke megegyezik, akkor az $(a_n)$ sorozat is konvergens, és határértéke megegyezik a részsorozatok határértékével.

Egyszerűen belátható, hogy a sorozatok konvergencia- illetve határérték és korlátossági tulajdonságait az alábbiak nem változtatják meg:

1. A sorozatot átrendezzük, azaz elemeinek sorrendjét megváltoztatjuk. (Ez pontosabban azt jelenti, hogy veszünk egy $k \mapsto n_k$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést $\mathbf{N}^+$ elemei között, és az „átrendezett” sorozat az $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$ sorozat.)
2. A sorozat bizonyos elemeit [akár végtelen sokat] véges sokszor megismételjük.
3. A sorozathoz véges sok elemet hozzáveszünk.
4. A sorozatból véges sok elemet elhagyunk.

# I.8. Műveletek és határérték

Korábban már definiáltuk a sorozatok közti műveleteket, most nézzük, hogy milyen tulajdonsággal rendelkeznek a végeredményként kapott sorozatok!

## I.8.1. Sorozatok számszorosának határértéke

**Tétel:** Ha $\lambda \in \mathbf{R}$ és az $(a_n)$ sorozat konvergens és határértéke az $a$ szám, akkor $(\lambda a_n)$ is konvergens, és határértéke $\lambda a$.

**Tétel:** Ha $\lambda > 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$ és az $(a_n)$ sorozat határértéke $+\infty$, akkor a $(\lambda a_n)$ sorozat határértéke is $+\infty$.

**Tétel:** Ha $\lambda > 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$ és az $(a_n)$ sorozat határértéke $-\infty$, akkor a $(\lambda a_n)$ sorozat határértéke is $-\infty$.

**Tétel:** Ha $\lambda < 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$ és az $(a_n)$ sorozat határértéke $+\infty$, akkor a $(\lambda a_n)$ sorozat határértéke $-\infty$.

**Tétel:** Ha $\lambda < 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$ és az $(a_n)$ sorozat határértéke $-\infty$, akkor a $(\lambda a_n)$ sorozat határértéke $+\infty$.

**Tétel:** Ha az $(a_n)$ sorozatnak nincs határértéke és $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$, akkor a $(\lambda a_n)$ sorozatnak sincs határértéke.

## I.8.2. Sorozatok összegének határértéke

**Tétel:** Ha az $(a_n)$ sorozat konvergens és határértéke $a$, a $(b_n)$ sorozat konvergens és határértéke $b$, akkor az $(a_n + b_n)$ sorozat is konvergens és határértéke $a + b$.

**Tétel:** Ha az $(a_n)$ sorozat alulról korlátos, és a $(b_n)$ sorozat tart a plusz végtelenhez, akkor az $(a_n + b_n)$ sorozat is tart a plusz végtelenhez.

**Tétel:** Ha az $(a_n)$ sorozat felülről korlátos, és a $(b_n)$ sorozat tart a mínusz végtelenhez, akkor az $(a_n + b_n)$ sorozat is tart a mínusz végtelenhez.

Ha határértékkel rendelkező sorozatokra szorítkozunk, akkor az alábbi táblázatban foglalhatjuk össze az összegsorozat határértékét:

| | $a_n \to a$ | $a_n \to +\infty$ | $a_n \to -\infty$ |
|---|---|---|---|
| $b_n \to b$ | $a+b$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $b_n \to +\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | ? |
| $b_n \to -\infty$ | $-\infty$ | ? | $-\infty$ |

A kérdőjellel jelölt esetekben nem mondhatunk semmit az összegsorozat határértékéről, mert ekkor több lehetőség is előfordulhat. Azaz ha $a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$, akkor lehet

a) $a_n + b_n \to +\infty$ Példa: $a_n = n^2 + n$, $b_n = -n$. Ekkor $a_n + b_n = n^2 \to +\infty$

b) $a_n + b_n \to -\infty$ Példa: $a_n = n$, $b_n = -n^2 - n$. Ekkor $a_n + b_n = -n^2 \to -\infty$

c) $a_n + b_n \to c, c \in \mathbf{R}$ Példa: $a_n = c + \frac{1}{n} + n$, $b_n = -n$. Ekkor $a_n + b_n = c + \frac{1}{n} \to c$

d) $(a_n + b_n)$-nek nincs határértéke Példa:

$$a_n = \begin{cases} n, \text{ ha } n \text{ páratlan} \\ n^2 + n, \text{ ha } n \text{ páros} \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} -n^2 - n, \text{ ha } n \text{ páratlan} \\ -n, \text{ ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

Ekkor

$$a_n + b_n = \begin{cases} -n^2, \text{ ha } n \text{ páratlan} \\ n^2, \text{ ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

Látható, hogy az $(a_n + b_n)$ sorozat oszcillálva divergens, azaz nincs határértéke.

## I.8.3. Sorozatok különbségének határértéke

Az $(a_n - b_n)$ sorozatot megkaphatjuk az $(a_n)$ és a $(-b_n)$ sorozatok összegeként, így erre az esetre a korábban mondott tételek érvényesek, a $(-b_n)$ sorozat határértékének figyelembevételével.

## I.8.4. Sorozatok szorzatának határértéke

**Tétel:** Ha az $(a_n)$ és $(b_n)$ sorozatok konvergensek és határértékük $a$ illetve $b$, akkor az $(a_nb_n)$ sorozat is konvergens és határértéke $ab$.

**Megjegyzés:** A tétel egyszerű következménye, hogy ha az $(a_n)$ sorozat konvergens, akkor $k \in \mathbf{N}$ esetén $(a_n^k)$ sorozat is konvergens, és határértéke $a^k$.

**Tétel:** Ha az $(a_n)$ sorozatnak valamely tagjától kezdve minden tagja nagyobb egy rögzített pozitív számnál, valamint a $(b_n)$ sorozat határértéke $+\infty$, akkor az $(a_nb_n)$ sorozat határértéke is $+\infty$.

**Tétel:** Ha az $(a_n)$ sorozat valamely tagjától kezdve minden tagja nagyobb egy rögzített pozitív számnál, valamint a $(b_n)$ sorozat határértéke $-\infty$, akkor az $(a_nb_n)$ sorozat határértéke is $-\infty$.

Hasonló tétel fogalmazható meg, ha az $(a_n)$ sorozat valamely tagjától kezdve minden tagja kisebb egy rögzített negatív számnál.

Szintén összefoglalhatjuk egy táblázatban, hogy a határértékkel rendelkező sorozatok szorzatának van-e határértéke, és ha van, akkor mennyi ez a határérték.

| | $a_n \to a > 0$ | $a_n \to 0$ | $a_n \to a < 0$ | $a_n \to +\infty$ | $a_n \to -\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $b_n \to b > 0$ | $ab$ | 0 | $ab$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $b_n \to 0$ | 0 | 0 | 0 | ? | ? |
| $b_n \to b < 0$ | $ab$ | 0 | $ab$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $b_n \to +\infty$ | $+\infty$ | ? | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $b_n \to -\infty$ | $-\infty$ | ? | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

A kérdőjellel jelölt esetekben nem mondhatunk semmit a szorzatsorozat határértékéről, mert ekkor több lehetőség is előfordulhat. Azaz ha pl. $a_n \to +\infty$, $b_n \to 0$, akkor lehet

a) $a_nb_n \to 0$ Példa: $a_n = n$, $b_n = \frac{1}{n^2}$. Ekkor $a_nb_n = \frac{1}{n} \to 0$

b) $a_nb_n \to +\infty$ Példa: $a_n = n^2$, $b_n = \frac{1}{n}$. Ekkor $a_nb_n = n \to +\infty$

c) $a_n b_n \to -\infty$ Példa: $a_n = n^2$, $b_n = -\frac{1}{n}$. Ekkor $a_n b_n = -n \to -\infty$

d) $a_n b_n \to c, c \in \mathbf{R}$ Példa: $a_n = n$, $b_n = \frac{c}{n}$. Ekkor $a_n b_n = c \to c$

e) $(a_n b_n)$-nek nincs határértéke. Példa: $a_n = n$, $b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. Ekkor $a_n b_n = (-1)^n$, amely sorozatnak nincs határértéke, mert a –1 és az 1 is torlódási pontja.

Hasonlóan megmutatható, hogy a fenti lehetőségek $a_n \to -\infty$, $b_n \to 0$ esetben is megvalósulhatnak.

## I.8.5. Sorozatok hányadosának határértéke

A sorozatok hányadosát arra az esetre definiáltuk, amikor az „osztó” sorozat egyik eleme sem 0. Ezt kibővíthetjük oly módon, hogy ha az $(a_n)$ sorozat elemei valamely $n_0$-tól kezdve nem 0-k, akkor az $(a_n)$ és $(b_n)$ sorozatok hányadosa az a $(c_n)$ sorozat, melyre $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ és $n > n_0$. Mivel a sorozatok véges sok elemét elhagyva a sorozatok konvergencia- illetve határérték tulajdonságai nem változnak, a hányadossorozatot tekinthetjük az $n_0$-adik elemétől.

**Tétel:** Ha $(a_n)$ és $(b_n)$ konvergens sorozatok, határértékük *a* illetve *b*, továbbá $b \neq 0$, akkor az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat is konvergens és határértéke $\frac{a}{b}$.

**Megjegyzés:** A $b_n \to b \neq 0$ feltételt tartalmazza azt a feltételt is, hogy van olyan $n_0$, hogy $n > n_0$ esetén $b_n \neq 0$.

**Tétel:** Ha $(b_n)$ pozitív tagú, korlátos sorozat és $a_n \to +\infty$, akkor $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$.

**Megjegyzés:** A $(b_n)$ sorozatról elég annyit feltenni, hogy valamely küszöbindextől kezdve pozitívak a tagjai.

Hasonló tétel mondható ki abban az esetben, ha a $(b_n)$ sorozat negatív tagú, illetve ha az $(a_n)$ sorozat határértéke a $-\infty$.

**Tétel:** Ha a $(b_n)$ sorozat nem korlátos, és $(a_n)$ sorozat korlátos, akkor az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat 0-hoz tart.

Ismét táblázatba foglalhatjuk a határértékkel rendelkező sorozatok hányadossorozatának határérték- illetve konvergencia-tulajdonságait:

| | $a_n \to a > 0$ | $a_n \to 0$ | $a_n \to a < 0$ | $a_n \to +\infty$ | $a_n \to -\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $b_n \to b > 0$ | $\frac{a}{b}$ | 0 | $\frac{a}{b}$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $b_n \to 0$ | ? | ? | ? | ? | ? |
| $b_n \to b < 0$ | $\frac{a}{b}$ | 0 | $\frac{a}{b}$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $b_n \to +\infty$ | 0 | 0 | 0 | ? | ? |
| $b_n \to -\infty$ | 0 | 0 | 0 | ? | ? |

A kérdőjelek helyén itt is olyan $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozatok állnak, melyek konvergenciája nem eldönthető az $(a_n)$ és $(b_n)$ sorozatok határértékének ismeretében. Mivel az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat az $(a_n)$ és az $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ sorozatok szorzataként áll elő, a korábbiakhoz hasonlóan magadhatóak olyan $(a_n)$ és $(b_n)$ sorozatok, melyre az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat más-más határértékkel rendelkezik, illetve előfordulhat, hogy határértéke sincs. A $b_n \to 0$ esetben a kritikus helyzet amiatt lép fel, hogy az $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ sorozat határértéke nem meghatározható a $(b_n)$ sorozat konkrét ismerete nélkül (ha egyáltalán van határértéke). Amikor pedig az $(a_n)$ és $(b_n)$ sorozatok határértéke $+\infty$ vagy $-\infty$, akkor az $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ sorozat határértéke 0, és a 0 illetve végtelen határértékű sorozatok szorzatának határértéke bizonytalan.

## I.8.6. Sorozatok hatványainak tulajdonsága

A sorozatok hányadosához hasonlóan a korábbi definíciónkat kibővíthetjük. Mivel a sorozatok határértéke nem változik véges sok tag elhagyásával, ezért definiáljuk a sorozatok hatványát a korábbi definíció szerint, de nemcsak olyan sorozatokra, melyek minden tagja nemnegatív, hanem azokra is, melyek tagjai egy küszöbindextől kezdve nemnegatívak.

**Tétel:** Ha az $(a_n)$ sorozat konvergens, és határértéke az $a > 0$ szám, akkor tetszőleges $\lambda \in \mathbf{R}$ esetén az $(a_n^\lambda)$ sorozat is konvergens, és határértéke $a^\lambda$.

**Tétel:** Ha az $(a_n)$ sorozat tart a plusz végtelenbe, akkor tetszőleges $\lambda > 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$ esetén az $(a_n^\lambda)$ sorozat határértéke plusz végtelen.

**Tétel:** Ha az $(a_n)$ sorozat tart a plusz végtelenbe, akkor tetszőleges $\lambda < 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$ esetén az $(a_n^\lambda)$ sorozat határértéke 0.

**Megjegyzés:** A fenti néhány tételhez hasonló tételeket lehet kimondani konkrét hatványkitevők esetén. Ekkor nem feltétlenül kell megkövetelni az adott sorozat elemeinek nemnegatív voltát, ugyanúgy, ahogy a számok hatványait is definiálhatjuk konkrét hatványkitevők esetén negatív számokra is, amennyiben ezt a hatványkitevő megengedi. Itt az általános érvényű tételeket mondtuk ki, így kénytelenek voltunk a nemnegatív feltételt hozzávenni a tételekhez.

## I.8.7. Néhány konkrét alkalmazás a sorozatok műveleti tulajdonságaira

**Példák:**

1. Mi a határértéke az $a_n = \frac{3}{n^2}$ sorozatnak?

Mivel a $b_n = 3$ sorozat határértéke 3, a $c_n = n^2$ sorozat határértéke +∞, ezért az $a_n = \frac{b_n}{c_n}$ sorozat határértéke 0.

2. Mi a határértéke az $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$ sorozatnak?

Mivel $b_n = \sin n$ korlátos és $c_n = n$ tart végtelenhez, ezért $a_n = \dfrac{b_n}{c_n}$ tart 0-hoz.

3. Mi a határértéke a $c_n = \dfrac{p(n)}{q(n)}$ sorozatnak, ahol $p(x)$ és $q(x)$ tetszőleges polinomok [$q(x)$ esetleges gyökei helyén $c_n$ értéke legyen pl. 0; mivel ez véges sok értéket jelent, a korábban mondottak értelmében ez nem befolyásolja a sorozat határértékét]. Legyen $p(x)$ $k$-adfokú, $q(x)$ $m$-edfokú polinom. A problémát három esetre kell bontanunk:

a) $k > m$

Ekkor $c_n = \dfrac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_0}{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \ldots + b_0}$. Ha a számlálót és a nevezőt leosztjuk $n^m$-nel, a

$$c_n = \frac{a_k n^{k-m} + a_{k-1} n^{k-m-1} + \ldots + a_1 \frac{1}{n^{m-1}} + a_0 \frac{1}{n^m}}{b_m + b_{m-1} \frac{1}{n} + b_{m-2} \frac{1}{n^2} + \ldots + b_0 \frac{1}{n^m}}$$

kifejezést kapjuk. Itt a számláló $+\infty$-hez, $a_k$-hoz illetve 0-hoz tartó sorozatok összegéből áll [véges sokból], így a határértéke $+\infty$. A nevező egy $b_m$-hez és $m-1$ db 0-hoz tartó sorozat összege, ezért határértéke $b_m$. Így $(c_n)$ határértéke $+\infty$.

b) $k = m$

Az előzőhöz hasonlóan osszuk le a számlálót és a nevezőt $n^m$-nel. Ekkor a számláló a fentiek szerint $a_k$-hoz, a nevező $b_m$-hez tart. A tört értéke tehát $\dfrac{a_k}{b_m}$-hez, a főegyütthatók hányadosához tart.

c) $k < m$

Az $n^m$-nel való leosztás után a fentiekhez hasonló gondolatmenettel megmutatható, hogy a nevező $b_m$-hez, a számláló 0-hoz tart, így $(c_n)$ határértéke 0.

Ebből a néhány példából is látható, hogy tételeink mennyire megkönnyítik a sorozatok határértékének kiszámítását. A legtöbb esetben az iskolai gyakorlatban olyan típusú sorozatokkal találkozunk, amelyek összeg, különbség, szorzat vagy hányados alakjában írhatók fel. A fenti tételek, valamint a rendőr-elv olyan eszközt jelentenek a határérték-számításban, melyek sok esetben sikerrel alkalmazhatóak.

A sorozatok konvergenciája és a műveletek kapcsolatát vizsgálva még egy hasznos tételt mondhatunk ki:

**Tétel:** Ha az $(a_n)$ és $(b_n)$ sorozatok konvergensek, akkor a határértékük akkor és csak akkor egyezik meg, ha az $(a_n - b_n)$ sorozat 0-hoz tart.

Hasonló tétel mondható ki konvergens sorozatok hányadosára, ha a határértékük nem 0. Ekkor a hányados-sorozat határértéke 1.

Korábban már szó esett arról, hogy ha egy sorozat konvergens, akkor minden részsorozata is konvergens, és ezek határértéke megegyezik az eredeti sorozat határértékével, azaz ha a konvergenciát beláttuk, akkor elég csak bizonyos részsorozatok határértékét meghatározni. E tények, valamint a sorozatok közti műveletek segítségével néhány sorozat határértékét egyszerűen kiszámíthatjuk.

**Példa:**

Legyen $a_n = \sqrt[n]{q}$, ahol $q > 0$. Állapítsuk meg, hogy az $(a_n)$ sorozatnak van-e határértéke, és ha igen, adjuk meg a határértékét!

**Megoldás:**

a) $q > 1$. Ekkor a sorozat monoton csökkenő, mert $q > 1$ miatt $q^{n+1} > q^n$, ahonnan $n(n+1)$-edik gyök vonása után az $\sqrt[n]{q} > \sqrt[n+1]{q}$. Másrészt a sorozat alulról korlátos, mert $q > 1$-ből $n$-edik gyök vonásával kapjuk, hogy $\sqrt[n]{q} > 1$. Tehát a sorozat konvergens, határértékét jelöljük $a$-val.

Tudjuk, hogy a sorozat $(a_{2n})$ részsorozatának határértéke megegyezik az $(a_n)$ sorozat határértékével, de mivel az $a_{2n}^2 = \left(\sqrt[2n]{q}\right)^2 = \sqrt[n]{q} = a_n$ kapcsolat fennáll, ezért $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n}^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. Másrészt $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} = a$ miatt és a konvergens sorozatok szorzatára vonatkozó tételt felhasználva $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n}^2 = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n}\right)\cdot\left(\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n}\right) = a^2$. Tehát $a^2 = a$, ahonnan $a = 0$, vagy $a = 1$. Mivel minden $n$-re $\sqrt[n]{q} > 1$, ezért az $a = 0$ eset nem jöhet szóba, tehát a sorozat határértéke 1.

b) $q < 1$. Ekkor a fentiekhez hasonlóan belátható, hogy az $(a_n)$ sorozat szigorúan monoton nő és felülről korlátos, tehát konvergens, és a határértéke 1.

c) $q=1$. Ekkor a sorozat nyilván konvergens és határértéke 1, mert a sorozat minden tagja 1.

A példák megoldásánál felhasználtuk azt a tulajdonságot, hogy a sorozatok határértékének és a velük végzett műveleteknek a kapcsolata öröklődik véges sok sorozattal végzett műveletekre is. Meg kell említenünk azonban, hogy ez a tulajdonság nem igaz abban az esetben, ha végtelen sok sorozattal dolgozunk. Vegyük például az alábbi sorozatokat:

$a_{1,n}=\frac{1}{n}$; $a_{2,n}=\frac{1}{n}$ ha $n\ge 2$, és 0, ha $n<2$; ... $a_{k,n}=\frac{1}{n}$ ha $n\ge k$, és 0, ha $n<k$.

Nyilvánvaló, hogy ez végtelen sok sorozatot jelent, minden egyes sorozat határértéke 0, de ha összeadjuk őket, akkor az összegsorozat minden tagja 1 lesz, azaz a határértéke 1. Könnyen végiggondolható, hogy ilyen módon akármilyen sorozatot elő tudunk állítani, tehát korábbi tételeinkkel ellentétesen végtelen sok sorozat összegére, szorzatára stb. nem tudunk semmiféle következményt kimondani.

## I.9. Az *e* szám

Az $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat vizsgálatával a korábbi tételeink együttes gyakorlati alkalmazását mutathatjuk be.

**Tétel:** Az $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat konvergens.

**Bizonyítás:** A konvergenciához elég belátni, hogy az $(a_n)$ sorozat monoton növekedő és felülről korlátos. A monoton növekedés a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség felhasználásával mutatható meg:

Ha felírjuk az $1+\frac{1}{n}$, $1+\frac{1}{n}$, ... $1+\frac{1}{n}$, 1 számok [összesen $n+1$ darab szám] számtani és mértani közepe közötti egyenlőtlenséget, akkor a következő kifejezést kapjuk:

$$\left[1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{n+1}}=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{n+1}}\le 1+\frac{1}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}=\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}$$

Innen $(n+1)$ -edik hatványra emeléssel kapjuk a kívánt egyenlőtlenséget:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \le \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Ezzel tehát a monoton növekedést beláttuk. A korlátosság legegyszerűbben a $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sorozat segítségével látható be.

Nyilvánvaló, hogy $a_n \le b_n$ minden $n$-re fennáll. Elég megmutatni, hogy a $(b_n)$ sorozat monoton csökkenő, és ekkor $a_n \le b_n \le b_1$ miatt $(a_n)$ felülről, $a_1 \le a_n \le b_n$ miatt $(b_n)$ alulról korlátos.

A $(b_n)$ sorozat monoton csökkenését a mértani és a harmonikus közép közti egyenlőtlenséggel láthatjuk be. Ha felírjuk az $1+\frac{1}{n}$, $1+\frac{1}{n}$, ... $1+\frac{1}{n}$, 1 számok [összesen $n+2$ darab szám] mértani és harmonikus közepe közötti egyenlőtlenséget, akkor az alábbi kifejezést kapjuk:

$$\left[1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]^{\frac{1}{n+2}} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]^{\frac{1}{n+2}} \ge 1+\frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)\frac{n}{n+1}+1} = \frac{n+2}{(n+1)\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+1}$$

Innen $(n+2)$ -edik hatványra emelve kapjuk:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \ge \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

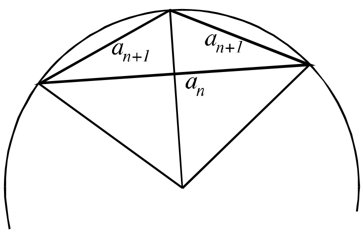
Láttuk tehát, hogy az $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ sorozat monoton növő és felülről korlátos, a $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, tehát mindkét sorozat konvergens. Mivel a $b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}-1\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\frac{1}{n}$ sorozat tart 0-hoz (mert az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ sorozat korlátos és $\frac{1}{n}$ tart 0-hoz), ezért a határértékük megegyezik. Ezt a határértéket $e$-vel jelöljük. A matematikában az $e^x$ illetve a $\log_e x$ [másképpen $\log x$ vagy $\ln x$] függvények szép tulajdonságaik miatt igen jelentős szerepet játszanak.

## I.10. A kör kerülete és területe

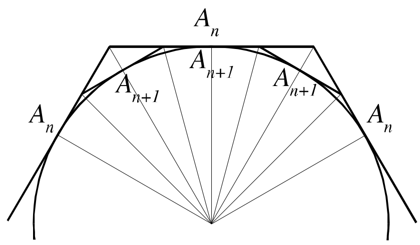
A kör kerülete és területe már az általános iskolai tananyagban is szerepel, de pontos definíciójára és kiszámítására csak a sorozatok és a határérték fogalmának ismeretében kerülhet sor.

Vegyünk egy adott $r$ sugarú kört. Legyen $K_b$ egy körbe írt konvex sokszög, azaz $K_b$ csúcsai legyenek a körvonalon. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt úgy érezzük, hogy ha van a körnek kerülete, akkor az nagyobb, mint $K_b$ kerülete, tetszőleges beírt sokszög esetén. Legyen $K_k$ egy kör köré írt konvex sokszög, azaz legyen $K_k$ minden oldala érintője a körnek úgy, hogy a kör $K_k$ belsejében legyen. Az elmondottak szerint a kör kerülete $K_k$ kerületénél kisebb kell legyen. Ha tehát a kör kerületét definiálni akarjuk, olyan számot kell keresnünk a kerület mérőszámának, amely kisebb az összes $K_k$ sokszög, és nagyobb az összes $K_b$ sokszög kerületénél. Meg kell tehát mutatni, hogy van ilyen szám, és pontosan egy van. Most egy lehetséges utat járunk végig a kör kerületének „megtalálásáig".

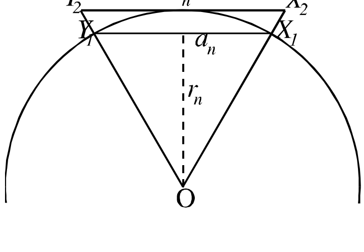
Vegyük a körbe, illetve a kör köré írt $2^n$ oldalú szabályos sokszögeket. Ha a körbe írt $2^n$ oldalú szabályos sokszög kerületét $k_n$-nel, oldalának hosszát $a_n$-nel, a kör köré írt $2^n$ oldalú szabályos sokszög kerületét $K_n$-nel, oldalának hosszát $A_n$-nel jelöljük, akkor az alábbi ábrákról leolvashatóak a közöttük fennálló következő egyenlőtlenségek [a háromszög egyenlőtlenség miatt]:




$k_n < k_{n+1}$




$K_n > K_{n+1}$




Az pedig nyilvánvaló az ábra alapján [ha egymással párhuzamos helyzetbe forgatjuk a beírt illetve a körülírt $2^n$ oldalú szabályos sokszög oldalait], hogy $a_n < A_n$, emiatt $k_n < K_n$.

Ha belátjuk, hogy $K_n - k_n \to 0$, ha $n \to \infty$, akkor a Cantor-axióma szerint pontosan egy olyan szám van, amely minden $n$-re $K_n$-nél kisebb és $k_n$-nél nagyobb [ekkor a $[k_n, K_n]$ zárt intervallumok egymásba skatulyázott intervallumok, és mivel hosszuk 0-hoz tart, pontosan egy közös elemük van].

Mivel a $k_n$ sorozat monoton és korlátos, ezért konvergens, hasonlóan a $K_n$ sorozathoz. A $K_n - k_n \to 0$, ha $n \to \infty$ feltétel tehát egyenértékű a $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n = \lim\limits_{n\to+\infty} K_n$ feltétellel, azaz elég belátni, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{k_n}{K_n} = 1$ [mivel egyik sorozat határértéke sem 0]. Felhasználva, hogy $k_n = 2^n a_n$ és $K_n = 2^n A_n$, elég belátnunk, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{A_n} = 1$.

Ha $r_n$-nel jelöljük $k_n$ beírt körének sugarát, akkor $r_n < r$ nyilvánvalóan fennáll, másrészt $r_n > r - \frac{1}{2}a_n$ az $OX_1Y_1$ háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség miatt [az előző ábra jelöléseit használva], és $\frac{a_n}{A_n} = \frac{r_n}{r}$ az $OX_1Y_1$ és $OX_2Y_2$ háromszögek hasonlósága miatt. Ezek felhasználásával kapjuk:

$$1 > \frac{a_n}{A_n} = \frac{r_n}{r} > \frac{r - \frac{1}{2}a_n}{r} > 1 - \frac{1}{2}\frac{a_n}{r}$$

Mivel $a_n \to 0$, ha $n \to \infty$, ezért $1 - \frac{1}{2}\frac{a_n}{r} \to 1$, és így $\frac{a_n}{A_n} \to 1$.

**Megjegyzés:** Megmutatható, hogy az így kapott $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n = \lim\limits_{n\to+\infty} K_n$ határérték kielégíti a kör kerületével szemben támasztott elvárásainkat. Ennek részletes bizonyításához a számhalmazok infimumának és supremumának általános megfogalmazása és az ezzel kapcsolatos tételek szükségesek, amik a mi témánkhoz nem kapcsolódnak szorosan. A kör kerületének definíciójában szorítkozhattunk volna csak a szabályos $2^n$-szögek kerületére is, de a dolog lényegét jobban mutatja az általános megfogalmazás. Az, hogy a beírt sokszögek és a köréírt sokszögek kerülete között van „elválasztó” érték, elég szemléletesen látszik, és a fenti gondolatmenettel nem csak azt állapítottuk meg, hogy pontosan egy elválasztó érték van, hanem módszert is adtunk kiszámítására, mégpedig egy konkrét sorozat határértékeként. A hangsúly jelen tárgyalásunkban inkább a sorozatok és a sorozatok határértéke mint új fogalom teremtésére, meghatározására illetve már meglevő fogalmak pontosítására alkalmas matematikai eszköz szerepeltetésére esett.

## I.10.1. A kör kerülete, kapcsolata a kör sugarával

Ha két különböző, $r'$ és $r''$ sugarú körre írjuk fel a $k_n$ sorozatot, akkor a körök hasonlósága miatt nyilvánvaló, hogy $\frac{k_n'}{k_n''} = \frac{r'}{r''}$, és mivel egyik sorozat határértéke sem 0, a határértékekre is fennáll a $\frac{\lim\limits_{n\to\infty} k_n'}{\lim\limits_{n\to\infty} k_n''} = \frac{r'}{r''}$, ahonnan $\frac{\lim\limits_{n\to\infty} k_n''}{r''} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} k_n'}{r'}$. A kör kerületének és sugarának hányadosa tehát állandó. Ha ezt az állandót 2π-vel jelöljük, akkor a kör kerületére a $k = 2\pi r$ kifejezést kapjuk.

## I.10.2. A kör területe

A kör területe a kör kerületéhez hasonlóan határozható meg: olyan számot kell keresnünk, mely a beírt konvex sokszögek területénél nagyobb, de a köréírt konvex sokszögek területénél kisebb. A fentiekkel analóg módon a körbe írt illetve a kör köré írt szabályos $2^n$-szögek területének határértéke adja a kör területét.

A kör kerületének és területének kapcsolata egyszerűen meghatározható. Tekintsük a körbe írt illetve a kör köré írt szabályos $2^n$-szögeket. A kerületek, az oldalak illetve a sokszögekbe írt körök sugarára korábban használt jelöléseket megtartva, valamint a sokszögek területét a fentieknek megfelelően $t_n$-nel, $T_n$-nel, illetve a kör területét *t*-vel jelölve az alábbi összefüggések írhatók fel:

$$t_n < t < T_n,\ t_n = 2^n \frac{a_n r_n}{2} = \frac{k_n r_n}{2},\ T_n = 2^n \frac{A_n r}{2} = \frac{K_n r}{2}$$

Mivel $k_n \to 2r\pi$, $r_n \to r$, $K_n \to 2r\pi$ ezért $t_n \to r^2\pi$, $T_n \to r^2\pi$. A fentiek értelmében tehát a kör területe: $t = r^2\pi$

**Megjegyzés:** Az $r_n \to r$ a Pitagorasz-tétel és $a_n \to 0$ felhasználásával látható be.

A kör kerületéhez és területéhez hasonlóan definiálható a körcikk kerülete és területe, illetve a körcikk kerületének felhasználásával a körív hossza. A körcikk kerület- és területképletének a háromszögek megfelelő képleteihez való hasonlósága éppen abból származik, hogy sorozattal [„háromszögek sorozata”] közelítjük meg, és ebből kapjuk a keresett értékeket.

A sorozatok használata a matematika számos területén jelenik meg. Alapvető szerepet játszanak az irracionális számok felépítésénél, valamint az irracionális számok és a műveletek kapcsolatánál, pl. az irracionális kitevőjű hatványok definíciója e nélkül elképzelhetetlen. A végtelen sorok összegével kapcsolatos problémákat is a sorozatok és a határérték segítségével tisztázhatták. A tizedes törtek egzakt definícióját is a sorozatokkal tudjuk megadni.

# II. Függvények határértéke és folytonossága

## II.1. Függvény korlátossága és határértéke

**Def.** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az I intervallumon. Az *f* függvény alulról korlátos az I intervallumon, ha van olyan *k*, melyre $f(x)\geq k$, ha $x\in \mathrm{I}$. Az *f* függvény felülről korlátos az I intervallumon, ha van olyan *K*, melyre $f(x)\leq K$, ha $x\in \mathrm{I}$. Az *f* függvény korlátos az I intervallumon, ha alulról és felülről is korlátos.

**Megjegyzés:** A fenti definícióhoz hasonlóan definiálható valamely ponthalmazon [alulról illetve felülről] korlátos függvény, azzal a különbséggel, hogy ott a ponthalmaz elemeire kell megkövetelnünk a megfelelő egyenlőtlenségek teljesülését. A sorozatoknál látott korlátossághoz hasonlóan itt is igaz, hogy az *f* függvény akkor és csak akkor korlátos az I intervallumon, ha van olyan *K*, hogy minden $x\in \mathrm{I}$-re $|f(x)|\leq K$.

**Def. I.** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega, a+\omega)\setminus\{a\}$ halmazon [*a* tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az *f* függvénynek létezik *a*-ban határértéke és ez *A*, ha minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $\delta>0$ szám, hogy minden esetben, amikor $0<|x-a|<\delta$ teljesül, fennáll $|f(x)-A|<\varepsilon$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

**Megjegyzés:** 1. A fenti definíció azt mondja ki, hogy az *f* függvény határértéke *a*-ban *A*, ha minden olyan esetben, amikor *x* közel van *a*-hoz, *f*(*x*) közel van *A*-hoz. Azért ε-hoz kell választanunk δ-t, mert azt akarjuk elérni, hogy ha *A*-t nevezzük határértéknek, akkor a függvényértékek tetszőlegesen közel kerülhessenek hozzá; ennek általában az a feltétele, hogy *x* közel legyen *a*-hoz, de persze vannak kivételek. Ha fordítva mondanánk ki a definíciót, akkor nem tudnánk garantálni, hogy *x*-szel *a*-hoz közelítve a függvényértékek is közel lesznek *A*-hoz.

2. A definíció azt mutatja, hogy a függvény határértékének egy adott pontban való kiszámításakor érdektelen, hogy a függvény azon a helyen, ahol a határértéket számítjuk, mit csinál; még azt sem követeljük meg, hogy abban a pontban értelmezve legyen. A vizsgálat tárgya az, hogy a pont egy környezetében miként viselkedik egy függvény, illetve *x* értékével a ponthoz közelítve milyen tulajdonságai vannak.

**Példa:**

Legyen $f(x)=x$, és $a$ tetszőleges valós szám. Megmutatjuk, hogy $\lim\limits_{x\to a} f(x)=a$. Nyilvánvaló, hogy az *f* függvény minden intervallumon értelmezve van. Legyen $\varepsilon>0$ valós szám. Ekkor $\delta=\varepsilon$-ra teljesül, hogy $0<|x-a|<\delta$ esetén $|f(x)-a|<\varepsilon$, hiszen $|f(x)-a|=|x-a|$ és $\delta=\varepsilon$, azaz $0<|x-a|=|f(x)-a|<\delta=\varepsilon$.

## II.1.1. Az átviteli elv

**Tétel:** **[*Átviteli elv*]** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega,a+\omega)\setminus\{a\}$ halmazon [$a$ tetszőleges valós szám, $\omega$ tetszőleges pozitív valós szám]. Az *f* függvénynek létezik *a*-ban határértéke és ez *A* akkor és csak akkor, ha minden $(a_n)$ sorozatra, melynek határértéke *a*, de egyik tagja sem egyenlő *a*-val, az $f(a_n)$ sorozat határértéke *A*.

**Megjegyzés:** Az „átviteli elv” elnevezés arra utal, hogy a fenti tétel segítségével a sorozatok határértékére megállapított tulajdonságokat alkalmazhatjuk a függvények esetében is.

Az átviteli elv lehetőséget ad arra, hogy új definíciót adjunk a függvények határértékére, amely jóval szemléletesebb, mint a korábban adott meghatározás, és a gyakorlatban is sokkal jobban alkalmazható:

**Def. II.** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega,a+\omega)\setminus\{a\}$ halmazon [$a$ tetszőleges valós szám, $\omega$ tetszőleges pozitív valós szám]. Az *f* függvénynek létezik *a*-ban határértéke és ez *A*, ha minden $(a_n)$ sorozatra, melynek határértéke *a*, de egyik tagja sem egyenlő *a*-val, az $f(a_n)$ sorozat határértéke *A*.

Az átviteli elv illetve az új definíció segítségével könnyebben meghatározhatjuk a függvények határértékét. Nézzünk erre néhány példát!

**Példa:**

2. Legyen $f(x)=x^2$, és $a$ tetszőleges valós szám. Ekkor az *f* függvénynek minden $a$ esetén van határértéke, és ez a határérték $a^2$, mert minden $a_n\to a$ sorozatra $f(a_n)=a_n^2\to a^2$.

3. Legyen $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, ha $x \neq 0$, és legyen $f(0) = 0$. Ekkor az *f* függvénynek az $a = 0$ helyen nincs határértéke. Ennek bizonyításához vegyük az alábbi sorozatokat:

$$a_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, \quad b_n = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$$

Nyilvánvaló, hogy $a_n \to 0$ és $b_n \to 0$, továbbá $\sin\frac{1}{a_n} = 1$ és $\sin\frac{1}{b_n} = -1$. Tehát az átviteli elv értelmében az $f(x)$ függvénynek nem lehet a 0-ban határértéke, mert találtunk két sorozatot, melyek 0-hoz tartanak, de a hozzájuk tartozó függvényértékek sorozatának határértéke nem egyezik meg.

A fenti példákból látható az átviteli elv „ereje": a függvények határértékét sokkal könnyebb meghatározni sorozatok határértékeként, a már korábban szerepelt tételek segítségével, mint az ε-hoz megfelelő δ keresgélésével. Azonban nemcsak gyorsaságot, hanem egyszerűbb, könnyebb kezelhetőséget is nyújt az átviteli elv. Arról azonban nem szabad megfeledkezni, hogy ***minden*** *a*-hoz tartó sorozatra teljesülnie kell az átviteli elvben megfogalmazott feltételnek. Amennyiben ez a dolog nem áll fenn, úgy a sorozat határértékének nem-létezését bizonyíthatjuk megfelelő ellenpéldák megadásával, mint ahogy azt tettük is.

## II.2. Tágabb értelemben vett függvényhatárérték
## (A végtelen mint függvényhatárérték)

Az átviteli elv kapcsolatot teremt a függvények és a sorozatok határértéke között. Célszerű tehát a sorozatok lehetséges határértékeit függvények esetén is értelmezni. Ezt véges határértékek esetén már megtettük, hátravan még a végtelen mint határérték bevezetése.

**Def.** Legyen az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a - \omega, a + \omega) \setminus \{a\}$ halmazon [*a* tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az *f* függvénynek létezik *a*-ban határértéke és ez plusz végtelen, ha minden *K* számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha $0 < |x - a| < \delta$ teljesül, fennáll $K < f(x)$ is. Jelölés: $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

**Def.** Legyen az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a - \omega, a + \omega) \setminus \{a\}$ halmazon [*a* tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az *f* függvénynek létezik *a*-ban határértéke és ez mínusz végtelen, ha minden *K* számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha $0 < |x - a| < \delta$ teljesül, fennáll $K > f(x)$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

**Tétel: [*Átviteli elv véges helyen vett plusz végtelen határértékre*]** Legyen az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a - \omega, a + \omega) \setminus \{a\}$ halmazon [*a* tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az *f* függvénynek létezik *a*-ban határértéke és ez plusz végtelen akkor és csak akkor, ha minden $(a_n)$ sorozatra, melynek határértéke *a*, de egyik tagja sem egyenlő *a*-val, az $f(a_n)$ sorozat határértéke +∞.

**Tétel: [*Átviteli elv véges helyen vett mínusz végtelen határértékre*]** Legyen az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a - \omega, a + \omega) \setminus \{a\}$ halmazon [*a* tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az *f* függvénynek létezik *a*-ban határértéke és ez mínusz végtelen akkor és csak akkor, ha minden $(a_n)$ sorozatra, melynek határértéke *a*, de egyik tagja sem egyenlő *a*-val, az $f(a_n)$ sorozat határértéke –∞.

## II.3. Függvény végtelenben vett határértéke

Az átviteli elv használatával sikerült meghatároznunk a függvények határértékét valamely véges helyen. Azonban mi történne akkor, ha az átviteli elvben szereplő, *a*-hoz tartó sorozatok határértékét véges érték helyett végtelennek választanánk?

**Def.** Legyen az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény értelmezve a $[W, +\infty)$ intervallumon, ahol $W \in \mathbf{R}$. Ekkor azt mondjuk, hogy *f* határértéke a plusz végtelenben az *A* szám, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan *K* szám, hogy minden esetben, amikor $K < x$ teljesül, fennáll $|f(x) - A| < \varepsilon$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

**Tétel: [*Átviteli elv plusz végtelenben vett véges határértékre*]** Legyen az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény értelmezve a $[W, +\infty)$ intervallumon, ahol $W \in \mathbf{R}$. Az *f* határértéke a plusz végtelenben az *A* szám akkor és csak akkor, ha minden $(a_n)$ sorozatra, melynek határértéke +∞, az $f(a_n)$ sorozat határértéke $A$.

Hasonló definíció illetve átviteli elv mondható ki a –∞-ben vett véges határértékre, illetve a +∞-ben és –∞-ben vett +∞ illetve –∞ határértékre:

**Def.** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve a $(-\infty,W]$ intervallumon, ahol $W\in\mathbf{R}$. Ekkor azt mondjuk, hogy $f$ határértéke a mínusz végtelenben az $A$ szám, ha minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $K$ szám, hogy minden esetben, amikor $K>x$ teljesül, fennáll $|f(x)-A|<\varepsilon$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

**Tétel: [*Átviteli elv mínusz végtelenben vett véges határértékre*]** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve a $(-\infty,W]$ intervallumon, ahol $W\in\mathbf{R}$. Az $f$ határértéke a mínusz végtelenben az $A$ szám akkor és csak akkor, ha minden $(a_n)$ sorozatra, melynek határértéke –∞, az $f(a_n)$ sorozat határértéke $A$.

**Def.** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve a $[W,+\infty)$ intervallumon, ahol $W\in\mathbf{R}$. Ekkor azt mondjuk, hogy $f$ határértéke a plusz végtelenben plusz végtelen, ha minden $N$ számhoz létezik olyan $K$ szám, hogy minden esetben, amikor $K<x$ teljesül, fennáll $f(x)>N$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

**Tétel: [*Átviteli elv plusz végtelenben vett plusz végtelen határértékre*]** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve a $[W,+\infty)$ intervallumon, ahol $W\in\mathbf{R}$. Az $f$ határértéke a plusz végtelenben plusz végtelen akkor és csak akkor, ha minden $(a_n)$ sorozatra, melynek határértéke +∞, az $f(a_n)$ sorozat határértéke +∞.

**Def.** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve a $[W,+\infty)$ intervallumon, ahol $W\in\mathbf{R}$. Ekkor azt mondjuk, hogy $f$ határértéke a plusz végtelenben mínusz végtelen, ha minden $N$ számhoz létezik olyan $K$ szám, hogy minden esetben, amikor $K<x$ teljesül, fennáll $f(x)<N$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

**Tétel: [*Átviteli elv plusz végtelenben vett mínusz végtelen határértékre*]** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve a $[W,+\infty)$ intervallumon, ahol $W\in\mathbf{R}$. Az *f* határértéke a plusz végtelenben mínusz végtelen akkor és csak akkor, ha minden $(a_n)$ sorozatra, melynek határértéke +∞, az $f(a_n)$ sorozat határértéke –∞.

**Def.** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve a $(-\infty,W]$ intervallumon, ahol $W\in\mathbf{R}$. Ekkor azt mondjuk, hogy *f* határértéke a mínusz végtelenben plusz végtelen, ha minden *N* számhoz létezik olyan *K* szám, hogy minden esetben, amikor $K>x$ teljesül, fennáll $f(x)>N$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

**Tétel: [*Átviteli elv mínusz végtelenben vett plusz végtelen határértékre*]** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve a $(-\infty,W]$ intervallumon, ahol $W\in\mathbf{R}$. Az *f* határértéke a mínusz végtelenben plusz végtelen akkor és csak akkor, ha minden $(a_n)$ sorozatra, melynek határértéke –∞, az $f(a_n)$ sorozat határértéke +∞.

**Def.** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve a $(-\infty,W]$ intervallumon, ahol $W\in\mathbf{R}$. Ekkor azt mondjuk, hogy *f* határértéke a mínusz végtelenben mínusz végtelen, ha minden *N* számhoz létezik olyan *K* szám, hogy minden esetben, amikor $K>x$ teljesül, fennáll $f(x)<N$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

**Tétel: [*Átviteli elv mínusz végtelenben vett mínusz végtelen határértékre*]** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve a $(-\infty,W]$ intervallumon, ahol $W\in\mathbf{R}$. Az *f* határértéke a mínusz végtelenben mínusz végtelen akkor és csak akkor, ha minden $(a_n)$ sorozatra, melynek határértéke –∞, az $f(a_n)$ sorozat határértéke –∞.

**Példa:**

Határozzuk meg az $f(x)=x^2$ függvény esetén a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ határértékeket!

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{\substack{n\to+\infty\\ a_n\to+\infty}} a_n^2=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ a_n\to 0}} a_n^2 = \left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ a_n\to-\infty}} a_n^2 = +\infty$$

## II.4. Függvény jobb- és baloldali határértéke

A függvény-határérték definíciójában $x$ „mindkét oldalról” közelítette az $a$ számot, azaz nem kötöttük ki, hogy az $x$ $a$-nál kisebb vagy nagyobb legyen. Megkülönböztethetünk azonban jobb- illetve baloldali határértéket, attól függően, hogy milyen $x$ értékeket engedünk meg.

**Def.** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a, a+\omega)$ intervallumon [$a$ tetszőleges valós szám, $\omega$ tetszőleges pozitív valós szám]. Az $f$ függvénynek létezik $a$-ban jobboldali határértéke és ez $A$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden esetben, amikor $0 < x - a < \delta$ teljesül, fennáll $\left|f(x) - A\right| < \varepsilon$ is. Jelölés: $\lim_{x\to a+0} f(x) = A$.

**Tétel: [*Átviteli elv jobboldali véges határértékre*]** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a, a+\omega)$ intervallumon [$a$ tetszőleges valós szám, $\omega$ tetszőleges pozitív valós szám]. Az $f$ függvénynek létezik $a$-ban jobboldali határértéke és ez $A$ akkor és csak akkor, ha minden $(a_n)$ sorozatra, mely felülről tart $a$-hoz, de egyik tagja sem egyenlő $a$-val, az $f(a_n)$ sorozat határértéke $A$.

A fentiekhez hasonlóan definiálható a baloldali határérték is, és hasonló átviteli elv mondható ki erre is [itt természetesen azok a sorozatok szerepelnek, amelyek alulról tartanak $a$-hoz]:

**Def.** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega, a)$ intervallumon [$a$ tetszőleges valós szám, $\omega$ tetszőleges pozitív valós szám]. Az $f$ függvénynek létezik $a$-ban baloldali határértéke és ez $A$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden esetben, amikor $0 < a - x < \delta$ teljesül, fennáll $\left|f(x) - A\right| < \varepsilon$ is. Jelölés: $\lim_{x\to a-0} f(x) = A$.

**Tétel: [*Átviteli elv baloldali véges határértékre*]** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega, a)$ intervallumon [$a$ tetszőleges valós szám, $\omega$ tetszőleges pozitív valós szám]. Az $f$ függvénynek létezik $a$-ban baloldali határértéke és ez $A$ akkor és csak akkor, ha minden $(a_n)$ sorozatra, mely alulról tart $a$-hoz, de egyik tagja sem egyenlő $a$-val, az $f(a_n)$ sorozat határértéke $A$.

**Def.** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a, a+\omega)$ intervallumon [$a$ tetszőleges valós szám, $\omega$ tetszőleges pozitív valós szám]. Az $f$ függvénynek létezik $a$-ban jobboldali határértéke és ez $+\infty$, ha minden $K$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden esetben, amikor $0 < x-a < \delta$ teljesül, fennáll $f(x) > K$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$.

**Tétel: [*Átviteli elv jobboldali plusz végtelen határértékre*]** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a, a+\omega)$ intervallumon [$a$ tetszőleges valós szám, $\omega$ tetszőleges pozitív valós szám]. Az $f$ függvénynek létezik $a$-ban jobboldali határértéke és ez $+\infty$ akkor és csak akkor, ha minden $(a_n)$ sorozatra, mely felülről tart $a$-hoz, de egyik tagja sem egyenlő $a$-val, az $f(a_n)$ sorozat határértéke $+\infty$.

**Def.** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a, a+\omega)$ intervallumon [$a$ tetszőleges valós szám, $\omega$ tetszőleges pozitív valós szám]. Az $f$ függvénynek létezik $a$-ban jobboldali határértéke és ez $-\infty$, ha minden $K$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden esetben, amikor $0 < x-a < \delta$ teljesül, fennáll $f(x) < K$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty$.

**Tétel: [*Átviteli elv jobboldali mínusz végtelen határértékre*]** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a, a+\omega)$ intervallumon [$a$ tetszőleges valós szám, $\omega$ tetszőleges pozitív valós szám]. Az $f$ függvénynek létezik $a$-ban jobboldali határértéke és ez $-\infty$ akkor és csak akkor, ha minden $(a_n)$ sorozatra, mely felülről tart $a$-hoz, de egyik tagja sem egyenlő $a$-val, az $f(a_n)$ sorozat határértéke $-\infty$.

**Def.** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega, a)$ intervallumon [$a$ tetszőleges valós szám, $\omega$ tetszőleges pozitív valós szám]. Az $f$ függvénynek létezik $a$-ban baloldali határértéke és ez $+\infty$, ha minden $K$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden esetben, amikor $0 < a-x < \delta$ teljesül, fennáll $f(x) > K$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty$.

**Tétel: [*Átviteli elv baloldali plusz végtelen határértékre*]** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega,a)$ intervallumon [$a$ tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az $f$ függvénynek létezik $a$-ban baloldali határértéke és ez $+\infty$ akkor és csak akkor, ha minden $(a_n)$ sorozatra, mely alulról tart $a$-hoz, de egyik tagja sem egyenlő $a$-val, az $f(a_n)$ sorozat határértéke $+\infty$.

**Def.** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega,a)$ intervallumon [$a$ tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az $f$ függvénynek létezik $a$-ban baloldali határértéke és ez $-\infty$, ha minden $K$ számhoz létezik olyan $\delta>0$ szám, hogy minden esetben, amikor $0<a-x<\delta$ teljesül, fennáll $f(x)<K$ is. Jelölés: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-\infty$.

**Tétel: [*Átviteli elv baloldali mínusz végtelen határértékre*]** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega,a)$ intervallumon [$a$ tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az $f$ függvénynek létezik $a$-ban baloldali határértéke és ez $-\infty$ akkor és csak akkor, ha minden $(a_n)$ sorozatra, mely alulról tart $a$-hoz, de egyik tagja sem egyenlő $a$-val, az $f(a_n)$ sorozat határértéke $-\infty$.

A jelölésekben a „ +0” illetve „ –0” azt mutatja, hogy az $a$ számnak melyik oldalán vagyunk. Szokás az $a$+0 illetve $a$–0 helyett egyszerűen csak az $a$+ illetve $a$– jelölést használni.

Nyilvánvaló, hogy a plusz végtelenben vett jobboldali illetve a mínusz végtelenben vett baloldali határértéknek nem lenne értelme; a a plusz végtelenben vett baloldali illetve a mínusz végtelenben vett jobboldali határértéket pedig felesleges volna definiálni.

Kapcsolatot teremthetünk a függvény határértéke illetve bal- és jobboldali határértéke között.

**Tétel:** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega,a+\omega)\setminus\{a\}$ halmazon [$a$ tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az $f$ függvénynek létezik $a$-ban határértéke és ez $A$ akkor és csak akkor, ha $f$-nek létezik $a$-ban a baloldali és jobboldali határértéke, és mindkettő $A$.

Ezzel a határérték-fogalmunk kibővült, mert vannak olyan függvények, melyek egy-egy $a$ szám esetén csak valamely $(a,a+\omega)$ illetve $[a,a+\omega)$, vagy $(a-\omega,a)$ illetve $(a-\omega,a]$ intervallumon vannak értelmezve. Ilyen például az $f(x)=\sqrt{x}$ függvény, mely csak az $x\geq 0$ esetben van értelmezve, így a 0-ban vett határértékéről nem beszélhetünk, de jobboldali határértékéről igen. [Könnyen belátható, hogy ez 0.]

A határértékek kiszámításában gyakorlati haszna is van a fenti tételeknek, mert olyan függvények határértéke is kiszámítható, melyek több függvény kombinációjából állnak elő, azaz egyes intervallumokon más-más képlet adja meg a függvényt.

**Példa:**

Mennyi az $f(x)=\begin{cases} x, \text{ha } x\geq 0 \\ -x^2, \text{ha } x<0 \end{cases}$ függvény határértéke az $a=0$ helyen?

**Megoldás:**

Ha a függvény jobboldali határértékét tekintjük a 0-ban, akkor ez megegyezik a $g(x)=x$ függvény ugyanitt vett jobboldali határértékével, ami 0. A függvény baloldali határértéke a 0-ban megegyezik a $h(x)=-x^2$ függvény 0-ban vett baloldali határértékével, ami 0. Mivel a bal- és jobboldali határértékek léteznek és mindkettő 0, ezért az *f* függvény határértéke a 0-ban létezik és értéke 0.

## II.5. Függvény folytonossága

Az eddigiekben nem foglalkoztunk azzal, hogy egy függvény hogyan viselkedik abban a pontban, ahol a határértékét számítjuk. Ha ezt is figyelembe vesszük, a függvények egy újabb érdekes tulajdonságát vizsgálhatjuk.

**Def.** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega, a+\omega)$ intervallumon [*a* tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az *f* függvény folytonos *a*-ban, ha a függvénynek létezik *a*-beli határértéke, és ez megegyezik a függvénynek *a*-ban felvett értékével, azaz $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

**Tétel: [*Átviteli elv a folytonosságra*]** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega, a+\omega)$ intervallumon [*a* tetszőleges valós szám, ω tetszőleges pozitív valós szám]. Az *f* függvény folytonos *a*-ban akkor és csak akkor, ha minden *a*-hoz tartó $(a_n)$ sorozatra az $f(a_n)$ függvényértékek sorozatának határértéke $f(a)$.

Korábban már láthattunk példát folytonos függvényre. Az $f(x)=x$ függvénynek minden $a$-ban létezik határértéke és $a$-val egyenlő, ami pont azt jelenti, hogy az $f$ függvény minden $a$-ban folytonos. Könnyen tudunk azonban olyan függvényt is készíteni, amely nem folytonos valamely pontban. Legyen például $g(x)=x$, ha $x \neq 2$, és legyen $g(2)=3$. Ekkor nyilvánvaló, hogy a $g$ függvény határértéke a 2-ben 2, de a függvényérték 3, így a $g$ függvény a 2-ben nem folytonos.

A bal- és jobboldali határérték definíciójának segítségével definiálhatjuk a függvények balról illetve jobbról folytonosságát is.

**Def.** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $[a,a+\omega)$ intervallumon [$a$ tetszőleges valós szám, $\omega$ tetszőleges pozitív valós szám]. Az $f$ függvény jobbról folytonos $a$-ban, ha a függvénynek létezik $a$-beli jobboldali határértéke, és ez megegyezik a függvénynek $a$-ban felvett értékével, azaz $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$.

**Def.** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a-\omega,a]$ intervallumon [$a$ tetszőleges valós szám, $\omega$ tetszőleges pozitív valós szám]. Az $f$ függvény balról folytonos $a$-ban, ha a függvénynek létezik $a$-beli baloldali határértéke, és ez megegyezik a függvénynek $a$-ban felvett értékével, azaz $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a)$.

**Def.** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $(a,b)$ intervallumon. Az $f$ folytonos $(a,b)$-n, ha $(a,b)$ minden pontjában folytonos.

**Def.** Legyen az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény értelmezve az $[a,b]$ intervallumon. Az $f$ folytonos $[a,b]$-n, ha folytonos $(a,b)$-n, és $a$-ban jobbról, $b$-ben balról folytonos.

A továbbiakban a folytonos [balról illetve jobbról folytonos] függvények említésekor nem fogjuk feltüntetni az értelmezési tartományt, a folytonosság fogalmába beleértjük, hogy a függvények a megfelelő intervallumokon értelmezve vannak.

Vannak tehát nem folytonos és folytonos függvényeink. Azon pontokat, ahol valamely $f$ függvény nem folytonos, megkülönböztető elnevezéssel láthatjuk el.

**Def.** Ha az $f$ függvény az $a$ pontban nem folytonos, akkor azt mondjuk, hogy $f$-nek $a$-ban szakadási helye van. A szakadási helyeket 3 csoportra oszthatjuk:

1. $\lim_{x\to a} f(x)$ létezik, de $a$ nincs benne $f$ értelmezési tartományában vagy $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$. Ekkor azt mondjuk, hogy $f$-nek $a$-ban megszüntethető szakadási helye van. [Azért megszüntethető, mert az $f$ függvény folytonossá tehető $a$-ban: az első esetben $a$-t belevesszük az értelmezési tartományba, és ott úgy adjuk meg a függvény értékét, hogy az a határértékkel legyen egyenlő; a második esetben a függvényértéket megváltoztatjuk $a$-ban úgy, hogy a határértékkel legyen egyenlő.]
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ nem létezik, de létezik $\lim_{x\to a+0} f(x)$ és $\lim_{x\to a-0} f(x)$ [és ezek szükségszerűen különbözőek]. Ekkor azt mondjuk, hogy $f$-nek ugráshelye van $a$-ban, vagy $f$ ugrik $a$-ban.
3. Minden más eset.

Az 1. és 2. típusú szakadási helyeket elsőfajú, a 3. típusúakat másodfajú szakadási helynek nevezzük.

## II.6. A függvény-határérték és a műveletek kapcsolata

Az átviteli elv módot ad arra is, hogy a függvények közti műveletek és a függvények határértékének kapcsolatát megállapítsuk. Mivel ezek a sorozatokkal analóg módon megfogalmazhatóak, ezért itt most ezzel nem foglalkozunk részletesen.

A határértékek és a műveletek kapcsolata a folytonos függvényeknél az alábbi tétellel fogalmazható meg:

**Tétel:** Ha $f$ és $g$ folytonos függvények $a$-ban, akkor $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ is folytonos $a$-ban, és $g(a) \neq 0$ esetén $\frac{f}{g}$ is folytonos $a$-ban.

**Következmény:** Mivel $f(x) = x$ folytonos $a$-ban tetszőleges $a$ esetén, ezért a $g(x)$ polinomfüggvény [azaz $g(x) = a_n x^n + ... + a_0$] folytonos tetszőleges $a$ esetén. Ha $h(x)$ racionális törtfüggvény [azaz két polinomfüggvény hányadosaként áll elő], akkor $h(x)$ a nevező nullhelyeit kivéve mindenütt folytonos.

A függvények esetében előkerül egy újabb művelet, ami még korábban nem szerepelt, nevezetesen a függvények összetétele vagy kompozíciója.

Legyenek $f:\mathrm{D}(f) \subset \mathbf{R} \to \mathrm{D}(g) \subset \mathbf{R}$, $g:\mathrm{D}(g) \to \mathbf{R}$ függvények, és legyen $\lim_{x \to a} f(x) = u$, $\lim_{x \to u} g(x) = v$. Ekkor általában nem igaz, hogy a $g(f(x))$ függvénynek van határértéke *a*-ban és ez *v*. [Ezt abból gondolhatnánk, hogy ha *x* tart *a*-hoz, akkor $f(x)$ tart *u*-hoz, és $g(f(x))$ tart *v*-hez.] Ez könnyen megmutatható. Vegyük a következő függvényeket:

$f(x) = 4$ minden *x*-re és $g(x) = \begin{cases} 5, \text{ ha } x \neq 4 \\ 3, \text{ ha } x = 4 \end{cases}$. Ekkor nyilvánvaló, hogy a $g(f(x))$ függvény értelmezve van **R**-en. Azonban $\lim_{x \to 3} f(x) = 4$, $\lim_{x \to 4} g(x) = 5$, de $\lim_{x \to 3} g(f(x)) \neq 5$, mert $\lim_{x \to 3} g(f(x)) = \lim_{x \to 3} g(4) = 3$.

Azonban bizonyos feltételek mellett igaz az állítás, nevezetesen:

**Tétel:** Ha *f* folytonos *a*-ban és *g* folytonos *f*(*a*)-ban, akkor $g(f(x))$ folytonos *a*-ban.

**Megjegyzés:** Az állítás teljesüléséhez nem szükséges a folytonosság, kevesebb megkötés is elég. Azonban a középiskolában csak ez az az eset, ami előfordul a mindennapos gyakorlatban. Elég tehát megemlíteni, hogy kevesebb feltétel is elégséges, de nem feltétlenül muszáj kimondani a tételt abban a formájában, hiszen ez már egy bonyolultabb gondolatmenetet igényelne.

## II.7. Zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai

**Tétel:** Zárt intervallumon folytonos függvény értékkészlete korlátos.

**Tétel: [*Weierstrass-tétel*]** Zárt intervallumon folytonos függvénynek van maximális és minimális értéke [maximuma illetve minimuma].

**Tétel: [*Bolzano-tétel*]** Az $[a,b]$ intervallumon folytonos függvény $f(a)$ és $f(b)$ között minden értéket felvesz.

**Következmény:** Zárt intervallumon folytonos függvény a maximuma és a minimuma között minden értéket felvesz.

**Megjegyzés:** A Weierstrass- és a Bolzano-tételt illetve a következményét egy tulajdonságban is megfogalmazhatjuk: Zárt intervallumon folytonos függvény értékkészlete zárt intervallum.

**Tétel:** Ha *f* folytonos az $[a,b]$ intervallumon és *f* monoton növekedő illetve csökkenő, akkor az értékkészlete az $[f(a), f(b)]$ illetve az $[f(b), f(a)]$ intervallum.

# III. Differenciálszámítás

## III.1. A differencia- és a differenciálhányados

**Bevezetés**

Egy test mozog valamilyen pályán, de nem egyenletesen, azaz azonos időtartamok alatt különböző nagyságú utakat tesz meg. A sebességet egyenletes mozgás esetére definiáltuk a $v = \frac{s}{t}$ képlettel. Ha a mozgás nem egyenletes, akkor a fenti képlet az átlagsebességet adja meg. Ez azonban a mozgás lefolyásáról elég kevés információt nyújt. Értelemszerű, hogy ha a mozgás „részleteire" vagyunk kíváncsiak, akkor olyan kis utakon kell számítanunk az átlagsebességet, melyen „lényegében" egyenes vonalú egyenletes mozgást végez a vizsgált test. Ezt úgy tehetjük meg, hogy az átlagsebességet egyre kisebb utakra, egyre kisebb időtartamokkal számítjuk ki. Igazán pontos eredményt akkor kaphatnánk, ha 0 hosszúságú vagy „végtelenül kicsi" időtartamra számíthatnánk ki az átlagsebességet, de 0-val nem lehet osztani, és olyasmi, hogy „végtelenül kicsi" mennyiség, nem létezik. Be kell tehát érnünk a határérték-számítás adta lehetőséggel, és egy adott időpontbeli sebességnek az átlagsebességek határértékét nevezhetjük, midőn az általunk választott kis időtartam tart a 0-hoz. Tehát a pillanatnyi sebesség: $v(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$.

**Megjegyzés:** Láttuk már korábban, hogy a „végtelenül kicsi" illetve „végtelenül közel van" a határérték-fogalommal tehető matematikailag precízzé. Nem árt, ha látjuk egy-egy fogalom kialakulásának előéletét, mert így jobban megértjük, hogy mi a jelentése, és világosabb lesz számunkra, hogy miért éppen úgy szól az adott definíció.

**Def.** Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ értelmezve az $(a - \omega, a + \omega)$ intervallumon. Legyen $x$ tetszőleges eleme az $(a - \omega, a + \omega)$ intervallumnak. Az $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ hányadost az $f$ $a$-ban vett differenciahányadosának vagy különbségi hányadosának nevezzük.

**Def.** Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ értelmezve az $(a - \omega, a + \omega)$ intervallumon. Az $f$ függvény az $a$-ban differenciálható[deriválható], ha létezik a $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ határérték [a differenciahányadosok határértéke]. Ezt a határértéket az $f$ $a$-beli differenciálhányadosának vagy deriváltjának nevezzük. Jelölése:

$f'(a)$ vagy $\dfrac{df}{dx}(a)$.

**Megjegyzés:** 1. Sok esetben megkönnyíti a számolást, ha a differenciahányadosokat az $x = a + h$ jelölés bevezetésével $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ alakban írjuk fel. Ekkor a differenciálhányados a $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ határértékkel egyenlő [amennyiben létezik]. Természetesen *h* pozitív és negatív értékeket is felvehet, annak megfelelően, hogy $x > a$ vagy $x < a$.

2. A $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ határérték kiszámításakor a $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ függvény határértékét keressük az *a*-ban, az 1. pontban szerepelt alak esetén pedig a $g(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ függvény határértékét kell kiszámítanunk a 0-ban. [Természetesen $g(x)$ nincs értelmezve *a*-ban, $g(h)$ nincs értelmezve 0-ban.] Ezért a differenciálhányados meghatározásánál alkalmazhatjuk a függvények határértékére vonatkozó átviteli elveket. Ez sok esetben leegyszerűsíti a számolást.

3. A továbbiakban nem fogjuk kiírni, hogy $x \neq a$ illetve $h \neq 0$. Ez úgyis magától értetődő, mert 0-val nem oszthatunk, tehát ezeken a helyeken a differenciahányadosok nincsenek értelmezve.

**Példák:**

1. Legyen $f(x) = c$, $c \in \mathbf{R}$. Ekkor az *f* függvény minden *a*-ra *a*-ban deriválható, és a deriváltja mindenütt 0. Ugyanis $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{c - c}{x - a} = \lim\limits_{x\to a} 0 = 0$.

2. Legyen $f(x) = x^2$. Ekkor *f* minden *a*-ra *a*-ban deriválható, és a deriváltja:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x\to a} (x + a) = 2a$$

3. Legyen $f(x) = |x|$. Ekkor a függvény a 0 kivételével mindenütt differenciálható.

Legyen $a > 0$. Ekkor:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x_n\to a} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \lim_{x_n\to a} \frac{|x_n| - |a|}{x_n - a} = \lim_{x_n\to a} \frac{x_n - a}{x_n - a} = 1.$$

[A $\lim\limits_{x_n\to a} \dfrac{|x_n| - |a|}{x_n - a} = \lim\limits_{x_n\to a} \dfrac{x_n - a}{x_n - a}$ egyenlőség azért áll fenn, mert ha $x_n \to a$ és $a > 0$, akkor véges sok kivétellel $x_n > 0$ teljesül, viszont véges sok tag elhagyása nem befolyásolja a határértéket.]

Ha $a<0$, akkor a fentiekhez hasonlóan kapjuk, hogy $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x_n\to a}\dfrac{-x_n+a}{x_n-a}=-1$. Tehát a függvény $a>0$ illetve $a<0$ esetén *a*-ban deriválható, és a deriváltja az első esetben 1, a másodikban –1.

Ha $a=0$, akkor $x_n\to a+0$ esetén $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x_n\to 0+0}\dfrac{x_n}{x_n}=1$, $x_n\to a-0$ esetén $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x_n\to 0-0}\dfrac{-x_n}{x_n}=-1$. Tehát a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ határérték nem létezik, mert az $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ függvény jobb- és baloldali határértéke nem egyezik meg a 0-ban. Így tehát az $f(x)=|x|$ függvény a 0-ban nem differenciálható.

A függvények jobb- illetve baloldali határértékéhez valamint a jobbról illetve balról folytonosság definíciójához hasonlóan beszélhetünk jobboldali illetve baloldali differenciálhányadosról.

**Def.** Legyen $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ értelmezve az $[a,a+\omega)$ intervallumon. Az *f* függvény az *a*-ban jobbról differenciálható, ha létezik a $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ határérték (a differenciahányadosok jobboldali határértéke). Ezt a határértéket az *f a*-beli jobboldali differenciálhányadosának [deriváltjának] nevezzük. Jelölése: $f'_+(a)$.

**Def.** Legyen $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ értelmezve az $(a-\omega,a]$ intervallumon. Az *f* függvény az *a*-ban balról differenciálható, ha létezik a $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ határérték (a differenciahányadosok jobboldali határértéke). Ezt a határértéket az *f a*-beli baloldali differenciálhányadosának [deriváltjának] nevezzük. Jelölése: $f'_-(a)$.

A függvény-határértékekről mondott korábbi tétel következménye:

**Tétel:** Legyen $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ értelmezve az $(a-\omega,a+\omega)$ intervallumon. Az *f* differenciálható *a*-ban akkor és csak akkor, ha *f* jobbról és balról is differenciálható *a*-ban és $f'_+(a)=f'_-(a)$

**Def.** Ha az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ értelmezve van az $(a,b)$ intervallumon és az *f* differenciálható $(a,b)$ minden pontjában, akkor azt mondjuk, hogy az *f* differenciálható az $(a,b)$ intervallumon.

**Def.** Ha az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ értelmezve van az $[a,b]$ intervallumon és az *f* differenciálható $(a,b)$ minden pontjában, valamint *a*-ban jobbról, *b*-ben balról differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy az *f* differenciálható az $[a,b]$ intervallumon.

**Def.** Ha *f* differenciálható az $(a,b)$ intervallumon, akkor a $g:(a,b)\to R$, $x\mapsto f'(x)$ függvényt az *f* deriváltfüggvényének vagy deriváltjának nevezzük. Jelölése: $f'(x)$ vagy $\dfrac{df}{dx}$.

**Példa:**

A korábban látott példák alapján az $f(x)=c$ függvény deriváltfüggvénye az $f'(x)=0$ függvény, a $g(x)=x^2$ függvény deriváltja a $g'(x)=2x$ függvény.

## III.2. Deriválhatóság és folytonosság kapcsolata

**Tétel:** Ha *f* differenciálható *a*-ban, akkor folytonos *a*-ban.

**Megjegyzés:** A tétel megfordítása nem igaz, azaz ha *f* folytonos *a*-ban, abból nem következik, hogy *f* differenciálható *a*-ban. Tekintsük az $f(x)=|x|$ függvényt, és legyen $a=0$. Nyilvánvaló, hogy *f* folytonos 0-ban, azaz $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, mert ha $x_n\to 0$, akkor $|x_n|\to 0$. Másrészt viszont láttuk, hogy *f* nem deriválható a 0-ban.

**Tétel:** Ha *f* jobbról differenciálható *a*-ban, akkor jobbról folytonos *a*-ban.

**Tétel:** Ha *f* balról differenciálható *a*-ban, akkor balról folytonos *a*-ban.

**Megjegyzés:** A tétel megfordítása nem igaz, azaz ha *f* jobbról vagy balról folytonos *a*-ban, abból nem következik, hogy *f* jobbról vagy balról differenciálható *a*-ban.

Legyen például $f(x)=\begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ rac.} \\ 2x, & \text{ha } x \text{ irrac.} \end{cases}$

Az *f* függvény a 0-ban nyilván folytonos; könnyen látható, hogy tetszőleges $x_n\to 0$ sorozatra $f(x_n)\to 0$. Tehát az *f* függvény a 0-ban balról és jobbról egyaránt folytonos. Azonban *f* sem jobbról, sem balról differenciálható a 0-ban. Vegyük az $(a_n)$ racionális tagokból álló, felülről 0-hoz tartó sorozatot. Erre $\lim\limits_{a_n \to 0+0} \frac{f(a_n) - f(0)}{a_n - 0} = \lim\limits_{a_n \to 0+0} \frac{a_n}{a_n} = 1$. Vegyük a $(b_n)$ irracionális tagokból álló, felülről 0-hoz tartó sorozatot. Erre $\lim\limits_{b_n \to 0+0} \frac{f(b_n) - f(0)}{b_n - 0} = \lim\limits_{b_n \to 0+0} \frac{2b_n}{b_n} = 2$. Tehát az átviteli elv értelmében nem létezhet a $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ határérték, azaz *f* jobbról nem differenciálható a 0-ban. Hasonlóan mutatható meg, hogy *f* balról sem differenciálható a 0-ban.

## III.3. A derivált és grafikon érintője

Vizsgáljuk meg, hogy a differenciálhányadosnak milyen szemléletes jelentést adhatunk!

Ha az $\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a}$ differenciahányadost tekintjük, akkor könnyen látható, hogy ez éppen az $(x_0, f(x_0))$ és $(a, f(a))$ pontokon átmenő egyenes meredeksége, azaz a függvény grafikonját az $(x_0, f(x_0))$ és $(a, f(a))$ pontokban metsző egyenes meredeksége.

Ha $x_0$-lal közelítünk *a*-hoz, akkor a szelők két metszéspontja egyre közelebb kerül egymáshoz. Ha az $x_0$ „végtelenül megközelíti” *a*-t, akkor a két metszéspont „összecsúszik”, azaz geometriai szemléletünk alapján a szelő átmegy a függvény grafikonjának *a*-beli érintőjébe. Ezen meggondolások alapján kézenfekvőnek tűnik, hogy ha *f* deriválható *a*-ban, akkor az $y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$ egyenletű egyenest az *f* függvény grafikonja *a*-pontbeli érintőjének, az $m = f'(a)$ számot az érintő meredekségének nevezzük.

Mennyire egyezik az így meghatározott érintő a geometriai értelemben vett érintővel? A geometriában például a kör esetén azt mondtuk, hogy érintőnek nevezzük azt az egyenest, amelynek egy közös pontja van az adott körrel. Ez a feltétel itt nem mindig teljesül, hiszen például az $f(x) = x$ függvény grafikonjának érintője minden pontban az $y = x$ egyenes, ami éppen a függvény grafikonjával esik egybe, azaz végtelen sok közös pontjuk van. A $g(x) = x^3$ függvény grafikonjának pedig a 0-ban vett érintője az $y = 0$ egyenes, ami a geometriai szemléletünk szerint kifejezetten metszi a grafikont.

Az érintőnek tehát más tulajdonságát kell kiemelnünk, nevezetesen azt, hogy az adott pontban vett érintő „jól hozzásimul” a grafikonhoz, vagyis az érintő és a grafikon távolsága valamilyen módon 0-hoz tart, ha tartunk $a$ felé. Ez még azonban nem elég, hisz bármelyik, az $(a, f(a))$ ponton átmenő egyenesre igaz ez a tulajdonság! Az, hogy „jól hozzásimul”, az alábbi tétellel fogalmazható meg:

**Tétel:** Legyen $f$ differenciálható az $a$ pontban. Ekkor az $y = f(a) + m \cdot (x - a)$ egyenletű egyenesre akkor és csak akkor áll fenn a $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - [f(a) + m \cdot (x - a)]}{x - a} = 0$ egyenlőség, ha $m = f'(a)$.

**Megjegyzés:** 1. A tétel azt mondja ki, hogy az $(a, f(a))$ ponton átmenő egyenesek közül egyedül az általunk érintőnek nevezett egyenes közelíti úgy a függvény grafikonját az $(a, f(a))$ pont közelében, hogy az „eltérés” még egy 0-hoz tartó kifejezéssel osztva is 0-hoz tart, ha közelítünk a fent említett ponthoz.

2. A fenti tétel azt is sugallja, hogy ha az $f$ függvény nem differenciálható az $a$ pontban, akkor nincs olyan egyenes, amely a fenti tulajdonsággal rendelkezne, azaz nincsen érintője a függvény grafikonjának.

## III.4. A legegyszerűbb elemi függvények deriváltja

A legegyszerűbb elemi függvények deriváltjait az alábbi táblázatban foglalhatjuk össze:

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $c,\ c \in \mathbf{R}$ | $0$ |
| $x^a,\ \alpha \in R$ | $a \cdot x^{a-1}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $a^x$ | $a^x \cdot \ln a$ |
| $\ln x$ | $\dfrac{1}{x}$ |
| $\log_a x$ | $\dfrac{1}{x \cdot \ln a}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\mathrm{tg}\, x$ | $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ |
| $\mathrm{ctg}\, x$ | $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ |
| $\arcsin x$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arccos x$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\mathrm{arc\,tg}\, x$ | $\dfrac{1}{1+x^2}$ |
| $\mathrm{arc\,ctg}\, x$ | $-\dfrac{1}{1+x^2}$ |

**Megjegyzés:** A második sorban álló általános alak a következő lépésekkel kapható meg:

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $x^n$, $n\in \mathbf{N}$ | $n\cdot x^{n-1}$ |
| $\frac{1}{x^n}$, $n\in \mathbf{N}$ | $-\frac{n}{x^{n+1}}$ |
| $\sqrt[n]{x}$, $n\in \mathbf{N}$ | $\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ |

Ha az $\frac{1}{x^n}=x^{-n}$ és $-\frac{n}{x^{n+1}}=-n\cdot x^{-n-1}$ valamint az $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ és $\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}=\frac{1}{n}\cdot x^{-\frac{n-1}{n}}=\frac{1}{n}\cdot x^{1-\frac{1}{n}}$ alakokat használjuk, akkor látszik a fent jelölt összefüggés. Ezek alapján az irracionális kitevőjű hatvány racionális kitevőjű hatványokkal való közelítését alkalmazva irracionális kitevőre is megkaphatjuk az összefüggést.

A fenti deriváltak közül némelyik nem csak elemi úton, a definíció felhasználásával határozható meg, hanem más függvények deriváltjainak segítségével is előállítható. A továbbiakban erről lesz szó.

## III.5. Műveletek differenciálható függvényekkel.
## A differenciálhatóság és a műveletek kapcsolata

### III.5.1. Összeg és különbség deriváltja

**Tétel:** Legyen $f$ és $g$ differenciálható $a$-ban. Ekkor $f+g$ is differenciálható $a$-ban, és $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$.

**Tétel:** Legyen $f$ és $g$ differenciálható $a$-ban. Ekkor $f-g$ is differenciálható $a$-ban, és $(f-g)'(a)=f'(a)-g'(a)$.

**Példa:**

Határozzuk meg az $f(x)=x^6+4x+2$ függvény deriváltját az $a=3$ helyen!

**Megoldás:**

Mivel $f(x) = g(x) + h(x) + k(x)$, ahol $g(x) = x^6$, $h(x) = 4x$ és $k(x) = 2$ és *g*, *h*, *k* minden pontban deriválhatóak, ezért $f$ is mindenütt deriválható és $f'(x) = g'(x) + h'(x) + k'(x)$, azaz $f'(x) = 6x^5 + 4 + 0$. Tehát $f'(2) = 6 \cdot 2^5 + 4 = 196$.

## III.5.2. Szorzat deriváltja

**Tétel:** Legyen $f$ és $g$ differenciálható az $a$ pontban. Ekkor $fg$ is differenciálható $a$-ban és $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

**Következmény I.:** A fenti tételből $g(x) = c$, $c \in \mathbf{R}$ helyettesítéssel kapjuk, hogy ha $f$ differenciálható $a$-ban és $c \in \mathbf{R}$, akkor $c \cdot f$ is differenciálható $a$-ban és a deriváltja $(cf)'(a) = cf'(a)$.

**Következmény II.:** A szorzat deriváltjára vonatkozó tétel első következményéből illetve az összeg deriváltjára vonatkozó tételből kapjuk, hogy ha $p(x)$ $n$-edfokú polinomfüggvény, azaz $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, akkor $p(x)$ mindenütt differenciálható és a deriváltja $p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1$.

**Példa:**

A szorzat deriváltjára vonatkozó tétel segítségével megkaphatjuk például az $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$ függvény deriváltját. Láttuk korábban, hogy ha $f(x) = x^2$, akkor $f'(x) = 2x$. Ha $f(x) = x^3$, akkor $f'(x) = (x \cdot x^2)' = (x)' \cdot x^2 + x \cdot (x^2)' = x^2 + 2x^2 = 3x^2$. Teljes indukcióval [az indukciós lépés az $f(x) = x^3$ esetben alkalmazott módszerrel teljesen analóg] megkaphatjuk, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$.

**Megjegyzés:** Ez a fenti példa alkalmazás a szorzatfüggvények deriváltjának elkészítésére. Az $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$ függvény deriváltját más, egyszerűbb módszerrel is megkaphatjuk.

## III.5.3. Hányados deriváltja

**Tétel:** Ha a $g$ függvény differenciálható $a$-ban és $g(a) \neq 0$, akkor az $\frac{1}{g}$ függvény is differenciálható $a$-ban, és a deriváltja $-\frac{g'(a)}{g^2(a)}$.

**Tétel:** Ha *f* és *g* differenciálható *a*-ban és $g(a) \neq 0$, akkor az $\frac{f}{g}$ függvény is differenciálható *a*-ban, és a deriváltja $\frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

**Példa:**

1. Mennyi az $f(x) = \frac{x^3 - 1}{3x + 2}$ függvény deriváltja az $a = 1$ helyen?

Mivel a számláló, $h(x) = x^3 - 1$ és a nevező, $g(x) = 3x + 2$ mindenütt differenciálható és a nevező 1-ben nem 0, ezért *f* is differenciálható az 1-ben. $h'(x) = 3x^2$, $g'(x) = 3$, ezért a hányados derivált-jára vonatkozó szabály értelmében $f'(1) = \frac{h'(1)g(1) - h(1)g'(1)}{g^2(1)} = \frac{3}{5}$.

2. Legyen $f(x) = \operatorname{tg} x$. Mennyi az *f* deriváltja?

Mivel $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$, ezért *f* mindenütt deriválható, ahol a nevező nem 0, azaz $a = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ kivételével mindenütt deriválható. Itt a deriváltja a hányados deriváltjára vonatkozó szabállyal szá-mítható ki:

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

## III.5.4. Összetett függvény deriváltja

**Tétel:** **[*Lánc-szabály*]** Tegyük fel, hogy *g* differenciálható *a*-ban, *h* differenciálható $g(a)$-ban. Ek-kor $f(x) = h(g(x))$ is differenciálható *a*-ban, és $f'(a) = h'(g(a)) \cdot g'(a)$.

**Példa:**

Mennyi az $f(x) = \sin(x^3 - 3)$ függvény deriváltja?

**Megoldás:**

Mivel $f(x) = h(g(x))$, ahol $h(x) = \sin x$ és $g(x) = x^3 - 3$, és *g* illetve *h* mindenütt differenciálható, ezért *f* is mindenütt differenciálható és

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = [\cos(x^3 - 3)] \cdot [3x^2].$$

## III.5.5. Inverz függvény deriváltja

**Tétel:** Ha *f* szigorúan monoton és folytonos az $(a-\omega, a+\omega)$ intervallumon, *a*-ban differenciálható és $f'(a) \neq 0$, akkor $f$ inverz függvénye $\varphi = f^{-1}$ szigorúan monoton és folytonos valamely $(f(a)-\delta, f(a)+\delta)$ intervallumban, differenciálható $b = f(a)$-ban és itt a deriváltja $\varphi'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$ vagy másképpen $\varphi'(b) = \dfrac{1}{f'(\varphi(b))}$.

**Megjegyzés:** A fenti tétel bizonyítása egyszerű, bár maga a tétel kissé körülményesnek tűnik. Fogalmilag, megértés szempontjából azonban mindenképpen csak jobb képességű diákoknak ajánljuk. Fogalmi nehézsége ellenére nagyon hasznos tétel, hiszen így nagyon sok függvény [például a trigonometrikus függvények inverzei] deriváltja valamely más függvény deriváltjából megkapható, melyet korábban már kiszámítottunk.

**Példa:**

Legyen $f(x) = x^2$ a $[0, A)$ intervallumon. Mivel itt $f(x) = x^2$ szigorúan monoton, folytonos és differenciálható, ezért a $\varphi(x) = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ is szigorúan monoton, folytonos és differenciálható [a 0 kivételével, mert $f(0) = 0$, és mivel $f'(x) = 2x$, a $\varphi$ függvény deriváltja:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{f'(\varphi(x))} = \frac{1}{f'(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

## III.6. Helyi és abszolút szélsőértékek

**Def.** Az *f* függvénynek az *a*-ban helyi [lokális] maximuma van, ha valamely $(a-\omega, a+\omega)$ intervallumon *f* értelmezve van, és az ide eső *x*-ekre fennáll, hogy $f(x) \le f(a)$. Szigorú helyi maximumról beszélünk, ha minden ide eső *x*-re *a* kivételével a szigorú egyenlőtlenség teljesül, azaz $f(x) < f(a)$.

**Def.** Az *f* függvénynek az *a*-ban helyi [lokális] minimuma van, ha valamely $(a-\omega, a+\omega)$ intervallumon *f* értelmezve van, és az ide eső *x*-ekre fennáll, hogy $f(x) \ge f(a)$. Szigorú helyi minimum-ról beszélünk, ha minden ide eső $x$-re $a$ kivételével a szigorú egyenlőtlenség teljesül, azaz $f(x) > f(a)$.

**Példa:**

Az $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ ha } x \neq 3 \\ 3, \text{ ha } x = 3 \end{cases}$ függvénynek a 3-ban szigorú helyi maximuma van, mert minden $\omega > 0$ esetén a $(3-\omega, 3+\omega)$ intervallumba eső x-ekre $x \neq 3$ esetén $f(x) = 2 < f(3) = 3$.

A Weierstrass-tétel kapcsán ejtettünk már szót egy függvény maximumáról illetve minimumáról, de most határozzuk meg pontosan, mit is értünk ezek alatt.

**Def.** Az $f$ függvénynek $a$-ban abszolút [globális] maximuma van, ha minden $x$-re, melyre $f$ értelmezve van, $f(x) \leq f(a)$. Az $f$ függvénynek $a$-ban szigorú abszolút [globális] maximuma van, ha minden $x$-re, melyre $f$ értelmezve van, $x \neq a$ esetén $f(x) < f(a)$.

**Def.** Az $f$ függvénynek $a$-ban abszolút [globális] minimuma van, ha minden $x$-re, melyre $f$ értelmezve van, $f(x) \geq f(a)$. Az $f$ függvénynek $a$-ban szigorú abszolút [globális] minimuma van, ha minden $x$-re, melyre $f$ értelmezve van, $x \neq a$ esetén $f(x) > f(a)$.

**Példa:**

Nyilvánvaló, hogy az előző példában szerepelt $f$ függvénynek a 3-ban szigorú abszolút maximuma van, mert minden $x$-re, ha $x \neq 3$, akkor $f(x) = 2 < f(3) = 3$.

Ha $f$-nek abszolút szélsőértékhelye van $a$-ban, akkor itt nem feltétlenül van helyi szélsőértéke és viszont. Ennek oka egyrészt az, hogy az abszolút szélsőértékhelynél nem követeltük meg, hogy egy, a szélsőértékhely körüli intervallumban értelmezve legyen a függvény, másrészt pedig az, hogy a helyi szélsőérték csak az értelmezési tartomány egy intervallumán felvett legnagyobb illetve legkisebb érték, lehet nála nagyobb illetve kisebb függvényérték is az értelmezési tartomány többi részében.

Azonban igaz a következő tétel:

**Tétel:** Ha $f$-nek $a$ az $I$ intervallumra nézve maximumhelye és $a$ belső pontja $I$-nek, akkor $a$ helyi maximumhelye is *f*-nek.

**Tétel:** Ha *f*-nek $a$ az $I$ intervallumra nézve minimumhelye és $a$ belső pontja $I$-nek, akkor $a$ helyi minimumhelye is *f*-nek.

**Megjegyzés:** A tétel azért igaz, mert ekkor nem fordulhat elő a fent említett eset, nevezetesen, hogy a függvény nincs értelmezve semelyik $(a-\omega, a+\omega)$ intervallumon.

Láttuk, hogy az abszolút szélsőértékek egyben helyi szélsőértékek is, ha az értelmezési tartomány egy részintervallumának belső pontjáról van szó. A továbbiakban valamely $I$ intervallumon folytonos illetve differenciálható függvényekkel foglalkozunk, ezért a helyi szélsőértékekbe az abszolút szélsőértékeket is beleértjük, azaz a helyi szélsőértékekre kimondott tételeink a fent említett esetekben az abszolút szélsőértékekre is vonatkoznak. A továbbiakban a „szélsőértékek” elnevezést az abszolút szélsőértékekre fogjuk használni, a helyi szélsőértékek esetén „helyi szélsőérték”-et mondunk. Ugyanígy a „maximum” illetve „minimum” elnevezés is az abszolút maximumot illetve minimumot fogja jelölni.

## III.6.1. A helyi szélsőértékek és a derivált kapcsolata

**Tétel:** Ha az $(a,b)$ intervallumon differenciálható *f* függvénynek a $c \in (a,b)$ pontban helyi szélsőértéke van, akkor $f'(c)=0$.

**Megjegyzés:** Nyilvánvaló, hogy a tétel megfordítása nem igaz. Legyen például $f(x)=x^3$. Ekkor $f'(x)=x^2$, tehát $f'(0)=0$. Az *f* függvénynek azonban a 0-ban nincsen helyi szélsőértéke, mert $x<0$ esetén $f(x)<0$, $x>0$ esetén $f(x)>0$ és $f(0)=0$.

**Példa:**

Legyen $f(x)=\sin x$. Tudjuk, hogy *f*-nek abszolút maximuma van az $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ abszolút minimuma van az $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ helyeken. Az $f$ deriváltja $f'(x)=\cos x$, és $\cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=0$ illetve $\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=0$.

## III.6.2. Zárt intervallumon folytonos, differenciálható függvény szélsőértékeinek meghatározása (Indirekt módszer)

A helyi szélsőértékek és a derivált közti kapcsolat lehetőséget ad arra, hogy megkeressük valamely $[a,b]$ intervallumon folytonos, $(a,b)$ intervallumon differenciálható függvény szélsőértékeit. A Weierstrass-tétel értelmében ezek léteznek, és az előzőekben mondottak szerint ha valamely $c \in (a,b)$ pontban abszolút szélsőértéke van *f*-nek, akkor $f'(c)=0$. Természetesen az $[a,b]$ intervallum határairól semmit sem tudunk mondani a derivált viselkedése alapján, így ott külön meg kell néznünk a függvényértékeket. Tehát az $[a,b]$ intervallumon folytonos, $(a,b)$ intervallumon differenciálható függvény szélsőérték-helyei az alábbi pontok közül kerülhetnek ki: a derivált nullhelyei, *a* és *b*. Természetesen, mivel a derivált 0 mivoltából nem következik, hogy ott [helyi] szélsőérték van, az eljárásunk a következő:

1. Elkészítjük a függvény deriváltját.
2. Megkeressük a derivált $(a,b)$-be eső nullhelyeit.
3. Ezekben a pontokban valamint *a*-ban és *b*-ben felírjuk a függvényértékeket.
4. Az így kapott számhalmazból kiválasztjuk a legnagyobbat és a legkisebbet, ezzel megkaptuk az adott intervallumon a függvény abszolút maximumát és minimumát.

**Példa:**

Határozzuk meg, hogy a 10 cm kerületű téglalapok közül melyiknek maximális a területe!

**Megoldás:**

Jelölje *x* és *y* egy tetszőleges, 10 cm kerületű téglalap oldalait. Ekkor tudva, hogy $2(x+y)=10$, keressük *x*-et, hogy az *xy* szorzat maximális legyen. Mivel $x+y=5$, ezért $y=5-x$ és az *xy* szorzat $x(5-x)$ alakba írható. $0 \le x$ és $0 \le y$ miatt $0 \le x \le 5$. Tehát az $f(x)=x(5-x)$ függvény maximumát kell megkeresnünk a $[0{,}5]$ intervallumon. Mivel *f* folytonos $[0{,}5]$-ön és differenciálható $(0{,}5)$-ön, ezért alkalmazható a fenti módszer. $f(x)=x(5-x)=5x-x^2$, $f'(x)=5-2x$. Ennek nullhelye a 2,5. Tehát a maximumhely a 0; 2,5; 5 számok közül kerülhet ki. Az *f*-be helyettesítve kapjuk, hogy $f(0)=0,\ f(5)=0,\ f(2{,}5)=6{,}25$. Tehát az *f* függvény a $[0{,}5]$ intervallumon a maximumát az $x=2{,}5$ helyen veszi fel. Mivel $y=5-x$, ezért ebben az esetben $y=2{,}5$, tehát a kérdéses téglalap egy négyzet, oldala 2,5 cm, területe $6{,}25\,\text{cm}^2$.

A fenti módszer hátránya, hogy ugyan megtaláltuk a keresett szélsőértéket, de magáról a függvényről, a függvény menetéről nem tudtunk meg semmit. A későbbiekben látni fogunk más módszert is, mely részletesebb képet ad a függvényről is. Ennek a módszernek azonban vitathatatlan előnye, hogy csak az adott kérdésre koncentrál, és a feladat szempontjából érdektelen számításokkal nem foglalkozik.

## III.7. A derivált tulajdonságaira vonatkozó középérték-tételek

**Tétel: [*Rolle-tétel*]** Ha $f$ folytonos az $[a,b]$ intervallumon, differenciálható az $(a,b)$ intervallumon és $f(a)=f(b)$, akkor van olyan $c\in(a,b)$, hogy $f'(c)=0$.

**Tétel: [*Lagrange-tétel*]** Ha $f$ folytonos az $[a,b]$ intervallumon, differenciálható az $(a,b)$ intervallumon, akkor van olyan $c\in(a,b)$, hogy $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

**Következmény I.:** Legyen $f$ folytonos az $[a,b]$ intervallumon, differenciálható az $(a,b)$ intervallumon. $f'(x)\equiv 0$ minden $(a,b)$-beli $x$-re akkor és csak akkor, ha $f$ konstans $[a,b]$-n.

**Következmény II.:** Legyenek $f$ és $g$ az $[a,b]$ intervallumon folytonos, az $(a,b)$ intervallumon differenciálható függvények. $f'(x)\equiv g'(x)$ minden $(a,b)$-beli $x$-re akkor és csak akkor, ha $f-g$ konstans $[a,b]$-n.

**Megjegyzés:** 1. A Lagrange-tétel a Rolle-tétel általánosítása. Ha $f(a)=f(b)$, akkor a Lagrange-tételben szereplő hányados éppen 0.

2. A Lagrange-tétel szemléletesen azt mondja ki, hogy van olyan pontja az $(a,b)$ intervallumnak, ahol az érintő meredeksége megegyezik az $(a,f(a))$ és $(b,f(b))$ pontokon átmenő egyenes (húr) meredekségével.

**Tétel: [*Cauchy-tétel*]** Ha $f$ és $g$ $[a,b]$ intervallumon folytonos, $(a,b)$ intervallumon differenciálható függvények, továbbá $g'(x)\neq 0$ az $(a,b)$ intervallum egyik pontjában sem, akkor létezik olyan $c\in(a,b)$, hogy $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

**Tétel: [*Darboux-tétel*]** Ha *f* differenciálható az $[a,b]$ intervallumon, akkor itt $f'$ minden $f'_+(a)$ és $f'_-(b)$ közti értéket felvesz.

**Megjegyzés:** A Darboux-tétel természetesen nem mondja ki azt, hogy a deriváltfüggvény folytonos, hiszen abból, hogy egy függvény valamely két pontban felvett függvényértéke között minden értéket felvesz, nem következik, hogy a függvény a két pont között folytonos. Konstruálható például olyan függvény, amely minden intervallumon minden valós számot felvesz függvényértékként; ez nyilván teljesíti a Darboux-tétellel megfogalmazott tulajdonságot [„Darboux-tulajdonság"], azonban nyilvánvalóan nem folytonos sehol sem.

## III.8. A függvény monotonitása és deriváltja közti kapcsolat

**Tétel:** Legyen *f* differenciálható az $(a,b)$ intervallumon. *f* monoton növő az $(a,b)$ intervallumon akkor és csak akkor, ha $f'(x) \geq 0$ az $(a,b)$ intervallumon.

**Tétel:** Legyen *f* differenciálható az $(a,b)$ intervallumon. *f* monoton csökkenő az $(a,b)$ intervallumon akkor és csak akkor, ha $f'(x) \leq 0$ az $(a,b)$ intervallumon.

**Megjegyzés:** 1. Ha *f* folytonos az $[a,b]$ intervallumon és differenciálható az $(a,b)$ intervallumon, akkor a fenti tételekben „*f* monoton növő az $[a,b]$ intervallumon" illetve „*f* monoton csökkenő az $[a,b]$ intervallumon" szerepel.

2. Ha *f* szigorúan monoton növő vagy csökkenő az $(a,b)$ intervallumon, akkor ebből nem következik, hogy $f'(x) > 0$ illetve $f'(x) < 0$ az $(a,b)$ intervallumon. Legyen például $f(x) = x^3$. Elég nyilvánvaló, hogy *f* szigorúan monoton növő a $[-1,1]$-ben, de láttuk, hogy a deriváltja a 0-ban 0, tehát nem igaz, hogy a megjelölt intervallumon $f'(x) > 0$.

Igaz viszont az alábbi tételpár:

**Tétel:** Legyen *f* differenciálható az $(a,b)$ intervallumon. *f* szigorúan monoton növő az $(a,b)$ intervallumon akkor és csak akkor, ha $f'(x) \geq 0$ az $(a,b)$ intervallumon és nincs olyan részintervalluma $(a,b)$-nek, ahol $f'(x) \equiv 0$.

**Tétel:** Legyen *f* differenciálható az $(a,b)$ intervallumon. *f* szigorúan monoton csökkenő az $(a,b)$ intervallumon akkor és csak akkor, ha $f'(x) \leq 0$ az $(a,b)$ intervallumon és nincs olyan részintervalluma $(a,b)$-nek, ahol $f'(x) \equiv 0$.

**Megjegyzés:** Ha *f* folytonos az $[a,b]$ intervallumon és differenciálható az $(a,b)$ intervallumon, akkor a fenti tételekben „*f* szigorúan monoton növő az $[a,b]$ intervallumon” illetve „*f* szigorúan monoton csökkenő az $[a,b]$ intervallumon” szerepel.

## III.9. Függvény helyi és abszolút szélsőértékének megkeresése (Direkt módszer)

A monotonitás és a derivált kapcsolata lehetőséget ad arra, hogy egy függvény helyi és abszolút szélsőértékeit megkeressük. A derivált előjeléből ugyanis következtethetünk a függvény monotonitási tulajdonságaira, ebből pedig a helyi illetve abszolút szélsőértékek hollétére.

**Példa:**

1. Legyen $f(x)=x^2$. Ekkor tudjuk, hogy $f(x)$ mindenütt folytonos és deriválható. A deriváltja: $f'(x)=2x$. $f'(x)<0$, ha $x<0$, $f'(x)>0$, ha $x>0$. Tehát az $x<0$ esetben a függvény szigorúan monoton csökken, $x>0$ esetén a függvény szigorúan monoton nő. Így az $x=0$ helyen helyi és egyben abszolút minimuma is van.

A függvények viselkedését az értelmezési tartományukon könnyebben meg tudjuk határozni, ha a fenti eredményeket táblázatba foglaljuk. Érdemes feltüntetni a –∞-ben illetve a +∞-ben a függvény határértékét [amennyiben az értelmezési tartomány kiterjed addig]. Természetesen a táblázatban azokat a helyeket „kihúzzuk”, amelyekre nem kerül semmi, illetve amelyek a függvényvizsgálat szempontjából érdektelenek.

| $x$ | $\to -\infty$ | $x<0$ | $x=0$ | $x>0$ | $\to +\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\to +\infty$ | szig. mon. csökken | 0 helyi min. | szig. mon. nő | $\to +\infty$ |
| $f'(x)$ | – | $0>$ | 0 | $>0$ | – |

2. Elevenítsük fel a III.6.2.-ben az indirekt módszer alkalmazására példaként szerepelt $f(x)=x(5-x)$ függvényt, és alkalmazzuk mostani módszerünket. $f'(x)=5-2x$, $f'(x)$ nullhelye 2,5. Készítsük el a táblázatunkat:

| $x$ | $x=0$ | $0<x<2{,}5$ | $x=2{,}5$ | $2{,}5<x<5$ | $x=5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | szig. mon. nő | 6,25 helyi max. | szig. mon. csökken | 0 |
| $f'(x)$ | – | $>0$ | 0 | $<0$ | – |

A táblázatból leolvasható, hogy az $x=2{,}5$ helyen az $f(x)=x(5-x)$ függvénynek a $[0{,}5]$ intervallumra nézve maximuma, az $x=0$ és az $x=5$ helyen minimuma van.

Előfordulhat, hogy az értelmezési tartomány nem a valós számok halmaza, hanem ennek csak egy részhalmaza. Ilyenkor az értelmezési tartományba tartozó intervallumok szélein is érdemes feltüntetni a függvény értékét [zárt intervallum esetén] illetve a függvény határértékét [nyílt intervallum esetén].

3. Legyen $f(x)=\dfrac{1}{x}$, ha $x\neq 0$, az $x=0$ helyen a függvény nincs értelmezve. Állapítsuk meg, van-e minimuma illetve maximuma a $[-1{,}1]$ intervallumon!

Az $f(x)=\dfrac{1}{x}$ függvény értelmezési tartománya $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. $f$ az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos és differenciálható. Deriváltja $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, amelynek nincs nullhelye, sőt, mindenütt negatív. Készítsük el a táblázatot!

| $x$ | $x=-1$ | $-1<x<0$ | $\to 0-$ | $\to 0+$ | $0<x<1$ | $x=1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1$ | szig. mon. csökken | $\to -\infty$ | $\to +\infty$ | szig. mon. csökken | 1 |
| $f'(x)$ | – | $<0$ | – | – | $<0$ | – |

Látható tehát, hogy a függvénynek az adott intervallumon sem helyi, sem abszolút szélsőértéke nincs. Azonban a $[-1{,}0)$ intervallumon van maximális, de nincs minimális, a $(0{,}1]$ intervallumon van minimális, de nincs maximális értéke.

A példák jól illusztrálják az indirekt és a direkt módszer közti különbséget. Az előbbi esetén azt kaptuk meg, hogy a függvény mely helyeken vehet fel maximális illetve minimális értéket, és ezek közül kellett válogatnunk. A második esetben azonban a függvény menetét állapítottuk meg, és ennek ismeretében adódott, hogy mely helyeken van [ha van] helyi illetve abszolút minimum és maximum. A direkt módszer azonban nemcsak abban az esetben használható, ha a függvény valamely

$[a,b]$ intervallumon folytonos és $(a,b)$-n differenciálható [ezt az indirekt módszer esetén igen erősen kihasználtuk!], hanem tetszőleges differenciálható függvény esetében. A két módszer gondolatmenete is igen különböző: az indirekt módszernél olyan valami után kutatunk, amelynek létezését tudjuk, és helyét kizárásos alapon határozzuk meg; a direkt módszer gondolatmenete ezzel szemben természetesebb, hiszen a függvény monotonitási tartományainak ismeretében következtetéseket vonunk le, úgyszólván mintegy „melléktermékként” jönnek ki az esetleges szélsőértékek.

A direkt módszer alkalmazásával tehát a függvény tulajdonságairól is megtudunk egyet s mást. Ezek segítségével akár a függvény grafikonját is felrajzolhatnánk. Azonban a rajzoláshoz hozzákezdve még egy kérdés vetődik fel: merre „görbül” a grafikon? Ezt az eddigiek alapján nem tudjuk megállapítani. A továbbiakban ennek meghatározásáról lesz szó.

## III.10. Magasabb rendű deriváltak

**Def.** Legyen *f* differenciálható az $(a-\omega, a+\omega)$ intervallumon, és legyen itt a deriváltfüggvénye $f'(x)$. Ha $f'(x)$ differenciálható *a*-ban és itt a deriváltja $(f')'(a)$, akkor azt mondjuk, hogy az *f* kétszer differenciálható *a*-ban. Az $(f')'(a)$ számot az *f* *a*-beli második deriváltjának nevezzük, és $f''(a)$-val jelöljük.

**Megjegyzés:** Hasonlóan definiálható az *a*-beli *n*-edik derivált $n \in \mathbf{Z}^+$ az $(n-1)$-edik derivált segítségével [„definíció teljes indukcióval”]. A jelölése: az első, második illetve harmadik deriváltat rendre $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$-val, az *n*-edik deriváltat, ha $n \geq 4$, $f^{(n)}(a)$-val jelöljük.

**Def.** Legyen *H* azon pontok halmaza, melyekben az *f* függvény kétszer differenciálható. Ekkor a $g: H \to \mathbf{R}$, $x \mapsto f''(x)$ függvényt az *f* második deriváltfüggvényének vagy röviden *f* második deriváltjának nevezzük, és $f''(x)$-szel jelöljük.

**Megjegyzés:** Hasonlóan definiálható az *f* függvény *n*-edik deriváltfüggvénye [*n*-edik deriváltja].

**Példa:**

Láttuk már, hogy $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$. Ebből kapjuk, hogy $x^n$ kétszer is differenciálható minden pontban, és a második deriváltja $(x^n)'' = n(n-1) \cdot x^{n-2}$. Teljes indukcióval belátható, hogy $x^n$ akárhányszor differenciálható, és a *k*-adik deriváltja:

$$(x^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot x^{n-k}, \text{ ha } k \le n \text{ és } (x^n)^{(k)} \equiv 0, \text{ ha } k > n.$$

## III.11. Konvex és konkáv függvények

Konvex illetve konkáv alakzatokkal találkoztunk már a geometriai tanulmányok során. Konvexnek neveztünk egy alakzatot, ha bármely két pontját összekötő szakasz minden pontját tartalmazta, konkávnak, ha ez a tulajdonsága nem volt meg. A függvények esetében a függvény grafikonjának tulajdonságaival határozhatjuk meg a konvexitás illetve konkávitás fogalmát.

Konvexnek nevezünk egy függvényt az $I$ intervallumon, ha itt értelmezve van, és ha minden $\alpha, \beta \in I$ -re a függvény grafikonjának az $(\alpha, f(\alpha))$ és $(\beta, f(\beta))$ pontokra illeszkedő húrja minden $\alpha$ és $\beta$ közti pontban a függvény grafikonja fölött van.

Konkávnak nevezünk egy függvényt az $I$ intervallumon, ha itt értelmezve van, és ha minden $\alpha, \beta \in I$ -re a függvény grafikonjának az $(\alpha, f(\alpha))$ és $(\beta, f(\beta))$ pontokra illeszkedő húrja minden $\alpha$ és $\beta$ közti pontban a függvény grafikonja alatt van.

Mivel az $(\alpha, f(\alpha))$ és $(\beta, f(\beta))$ pontokra illeszkedő húr egyenlete $y = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot (x - \alpha) + f(\alpha)$, ezért a fenti megfogalmazás az alábbi definíció formájába írható át:

**Def.** Az *f* függvény konvex az *I* intervallumon, ha minden $\alpha, \beta \in I$ és $x \in (\alpha, \beta)$ esetén

$$f(x) \le \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot (x - \alpha) + f(\alpha)$$

Ha az egyenlőtlenség fordítva áll, akkor *f* konkáv, ha pedig az egyenlőséget nem engedjük meg, akkor *f* szigorúan konvex illetve konkáv.

**Megjegyzés:** 1. Belátható, hogy ha *f* $(a, b)$ -ben konvex, de nem szigorúan konvex, akkor $(a, b)$ -nek van olyan részintervalluma, melyen *f* lineáris, azaz $f(x) = cx + d$, $c, d \in \mathbf{R}$.

2. Egyszerűen belátható, hogy ha *f* konvex vagy konkáv *I*-n, akkor folytonos *I*-n. A folytonosság nyilván nem elég a konvexitáshoz, gondoljunk például a $\sin x$ függvényre, amely folytonos a $[0, 2\pi]$ intervallumon, de könnyen megmutatható, hogy itt se nem konvex, se nem konkáv. Az viszont nem igaz, hogy ha egy függvény konvex, akkor differenciálható. Erre megfelelő ellenpélda az

$|x|$ függvény, mely a $[-1,1]$ intervallumon konvex, de a 0-ban nem differenciálható.

A fenti definíció egyben azt is jelenti, hogy az *f* függvényt akkor nevezzük konvexnek illetve konkávnak az *I* intervallumon, ha *I* minden $(\alpha,\beta)$ részintervallumán a függvény grafikonja illetve az $x=\alpha$ és $x=\beta$ egyenesek által határolt, a függvény grafikonja fölött levő [„felfelé végtelen”] alakzat konvex illetve konkáv.

## III.12. Konvexitás és a deriváltak kapcsolata

**Tétel:** Legyen *f* differenciálható az *I* intervallumon. *f* konvex *I*-ben akkor és csak akkor, ha $f'$ monoton növekedő *I*-ben.

**Tétel:** Legyen *f* differenciálható az *I* intervallumon. *f* konkáv *I*-ben akkor és csak akkor, ha $f'$ monoton csökkenő *I*-ben.

**Tétel:** Legyen *f* differenciálható az *I* intervallumon. *f* szigorúan konvex *I*-ben akkor és csak akkor, ha $f'$ szigorúan monoton növekedő *I*-ben.

**Tétel:** Legyen *f* differenciálható az *I* intervallumon. *f* szigorúan konkáv *I*-ben akkor és csak akkor, ha $f'$ szigorúan monoton csökkenő *I*-ben.

Mivel egy differenciálható függvény monotonitási tulajdonságai a deriváltja előjelével kapcsolatban állnak, ezért a most illetve korábban kimondott tételek egyszerű következménye:

**Tétel:** Legyen *f* kétszer differenciálható az *I* intervallumon. *f* konvex *I*-ben akkor és csak akkor, ha itt $f''\geq 0$.

**Tétel:** Legyen *f* kétszer differenciálható az *I* intervallumon. *f* konkáv *I*-ben akkor és csak akkor, ha itt $f''\leq 0$.

**Tétel:** Legyen *f* kétszer differenciálható az *I* intervallumon. *f* szigorúan konvex *I*-ben akkor és csak akkor, ha itt $f'' \geq 0$ és nincs olyan részintervalluma *I*-nek, amelyen $f'' \equiv 0$.

**Tétel:** Legyen *f* kétszer differenciálható az *I* intervallumon. *f* szigorúan konkáv *I*-ben akkor és csak akkor, ha itt $f'' \leq 0$ és nincs olyan részintervalluma *I*-nek, amelyen $f'' \equiv 0$.

Korábban láttuk, hogy egy függvény két monotonitási tartományának határán valamiféle szélsőérték található. Felmerül hát a kérdés, mi van két konvexitási tartomány határán?

**Def.** Legyen $a < c < b$. Ha *f* konvex $(a,c]$-n és konkáv $[c,b)$-n vagy fordítva, akkor *c*-t az *f* inflexiós pontjának nevezzük.

**Tétel:** Ha *f* kétszer differenciálható *c*-ben és *c* inflexiós pontja *f*-nek, akkor $f''(c) = 0$.

**Megjegyzés:** A tétel megfordítása itt sem igaz, akárcsak a helyi szélsőértékek és az első derivált közötti kapcsolat esetén. Legyen például $f(x) = x^4$. Ekkor $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$. Mivel mindenütt igaz, hogy $f''(x) \geq 0$, ezért az *f* függvény mindenütt konvex. Viszont $f''(0) = 0$, de a 0 nem inflexiós pontja *f*-nek, hiszen *f* minden, a 0-t tartalmazó intervallumon is konvex.

## III.13. Teljes függvényvizsgálat

Most, hogy a függvények konvex illetve konkáv mivoltát is el tudjuk dönteni, módunk nyílik arra, hogy ábrázoljuk a függvények grafikonját. Ehhez az alábbi tulajdonságokat kell meghatároznunk:

- értelmezési tartomány
- paritás (páros-e vagy páratlan-e a függvény)
- periodicitás (periodikus-e a függvény, ha igen, akkor mennyi a periódus hossza)
- folytonossági tartomány(ok)
- szakadási helyek, ezek milyensége
- nullhelyek
- $-\infty$-ben illetve $+\infty$-ben vett határérték, szakadási helyeken illetve az értelmezési tartományt alkotó intervallumok szélein vett határérték illetve függvényérték (amennyiben ezek léteznek)
- monotonitási tartományok (az első derivált segítségével)
- helyi és abszolút szélsőértékek helye, itt a függvényértékek
- értékkészlet
- konvexitási, konkávitási tartományok (a második derivált segítségével)

– inflexiós pontok

Nézzünk erre egy konkrét példát!

**Példa:**

Ábrázoljuk az $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ függvényt!

– *f* értelmezési tartománya: **R**

– folytonossági tartomány: **R**, mert *f* polinomfüggvény

– *f* se nem páros se nem páratlan, mert

$$x^3 - x^2 - 6x \neq (-x)^3 - (-x)^2 - 6(-x) = -x^3 - x^2 + 6x, \text{ valamint}$$

$$x^3 - x^2 - 6x \neq -[(-x)^3 - (-x)^2 - 6(-x)] = x^3 + x^2 - 6x$$

– *f* nem periodikus

– határértéke az értelmezési tartomány szélein:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ illetve } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

– nullhelyei:

$$x^3 - x^2 - 6x = 0$$
$$x(x-3)(x+2) = 0$$
$$x_1 = 0, \; x_2 = 3, \; x_3 = -2$$

– első deriváltja: $f'(x) = 3x^2 - 2x - 6$. Ennek nullhelyei:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+72}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{19}}{3}$$

– második deriváltja: $f''(x) = 6x - 2$. Ennek nullhelye: $x = \frac{1}{3}$

Ezek alapján már el tudjuk készíteni a táblázatot:

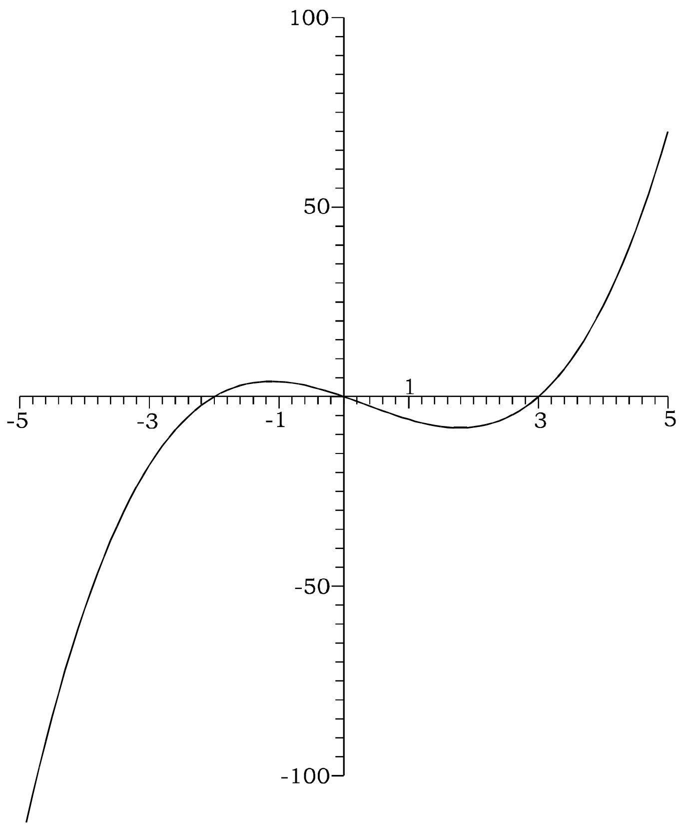
| $x$ | $\to -\infty$ | $x < \frac{1-\sqrt{19}}{3}$ | $x = \frac{1-\sqrt{19}}{3}$ | $\frac{1-\sqrt{19}}{3} < x < \frac{1}{3}$ | $x = \frac{1}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\to -\infty$ | szig. mon. nő konkáv | helyi max. | szig. mon. csökken konkáv | infl. pont |
| $f'(x)$ | – | $>0$ | $=0$ | $<0$ | $<0$ |
| $f''(x)$ | – | $<0$ | $<0$ | $<0$ | $=0$ |

| $x$ | $\frac{1}{3} < x < \frac{1+\sqrt{19}}{3}$ | $x = \frac{1+\sqrt{19}}{3}$ | $\frac{1+\sqrt{19}}{3} < x$ | $\to +\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | szig. mon. csökken<br>konvex | helyi min. | szig. mon. nő<br>konvex | $\to +\infty$ |
| $f'(x)$ | $< 0$ | $= 0$ | $> 0$ | – |
| $f''(x)$ | | $> 0$ | $> 0$ | – |

A táblázatból leolvasható, hogy $f(x)$-nek nincsen abszolút maximuma illetve minimuma, Helyi maximuma van az $x = \frac{1-\sqrt{19}}{3}$ helyen, helyi minimuma van az $x = \frac{1+\sqrt{19}}{3}$ helyen, inflexiós pontja az $x = \frac{1}{3}$.

– értékkészlete a fentiek alapján: **R**

Ezek után pedig nem marad más hátra, mint a grafikon elkészítése:



# IV. Integrálszámítás

**Bevezetés:**

A fizikában találkoztunk azzal a problémával, hogy számítsuk ki a test által megtett utat, ha ismerjük minden időpillanatban a sebességét, azaz ismerjük a $v(t)$ függvényt. Ezt úgy tehetjük meg, hogy felosztjuk az adott időtartamot kis $\Delta t_i$ időintervallumokra, ezeken úgy tekintjük a sebességet, mint állandó mennyiséget, tehát ez idők alatt a test $\Delta s_i = v \cdot \Delta t_i$ utakat tesz meg. Ha összegezzük a $\Delta s_i$ utakat, megkapjuk a test által megtett összes utat. Ha pontosabban akarjuk megkapni ezt a távolságot, akkor a $\Delta t_i$ időintervallumok hosszát minél rövidebbnek kell választani. [Itt megint a „végtelenül kicsi” problémájába ütközünk!]

Érezhető, hogy ez a gondolatmenet tartalmaz bizonyos ugrásokat. Mekkora az a sebesség, amivel a $\Delta t_i$ időintervallumokban számolunk? [Melyik időponthoz tartozó sebességet tekintsük „állandónak”?] Hogyan végezzük el az összegzést? Mennyire lesz pontos az eredményünk?

Ezen kérdések felvetése után jogos igény merül fel arra, hogy az ilyen jellegű problémákat megalapozzuk, módszert adjunk ehhez hasonló számítások elvégzésére.

## IV.1. Alsó és felső közelítő összeg

**Def.** Legyenek az $[a,b]$ intervallum belső pontjai az $a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < b$ pontok [$n \in \mathbf{N}^+$]. Ekkor az $x_0 = a$, $x_n = b$ jelöléssel az $[x_i, x_{i-1}]$ intervallumok [$i$ = 1, 2, 3, ..., $n$] az $[a,b]$ intervallum egy felosztását jelentik, az $x_i$ pontok pedig a felosztáshoz tartozó osztópontok.

**Def.** Legyen az *f* függvény értelmezve az $[a,b]$ intervallumon, és itt legyen *f* korlátos. Legyen $\Phi : x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ az $[a,b]$ intervallum egy felosztása. Legyen továbbá $m_i$ az *f* függvény infimuma [legkisebb alsó korlátja vagy alsó határa] az $[x_i, x_{i-1}]$ intervallumon, és legyen $M_i$ az *f* függvény supremuma [legkisebb felső korlátja vagy felső határa] ugyanitt. Ekkor az $s_\Phi = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$ összeget az *f* függvény $\Phi$ felosztáshoz tartozó alsó közelítő összegének, a $S_\Phi = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$ összeget az *f* függvény $\Phi$ felosztáshoz tartozó felső közelítő összegének nevezzük.

**Megjegyzés:** Az $S_\Phi$ illetve $s_\Phi$ definíciójából következően $S_\Phi \geq s_\Phi$.

**Def.** A $\Phi$ felosztás finomításának nevezzük a $\Psi$ felosztást, ha $\Psi$ osztópontjai között szerepel $\Phi$ minden osztópontja.

**Tétel:** Ha $\Phi$ és $\Psi$ az $[a,b]$ intervallum egy-egy felosztása, és $\Psi$ a $\Phi$ felosztás finomítása, akkor $S_\Phi \geq S_\Psi \geq s_\Psi \geq s_\Phi$.

**Def.** Legyen $\Phi_1$ és $\Phi_2$ az $[a,b]$ intervallum egy-egy felosztása. A $\Psi$ felosztást a $\Phi_1$ és $\Phi_2$ közös finomításának nevezzük, ha osztópontjai között szerepel $\Phi_1$ és $\Phi_2$ minden osztópontja.

**Tétel:** Ha $\Phi_1$ és $\Phi_2$ az $[a,b]$ intervallum egy-egy felosztása, és $\Psi$ a $\Phi_1$ és $\Phi_2$ közös finomítása, akkor $S_{\Phi_2} \geq S_\Psi \geq s_\Psi \geq s_{\Phi_1}$.

## IV.2. A határozott integrál

Nézzük ezek után a bevezető példában látott számolási módszert. A példánkban szereplő függvény a sebességfüggvény, a vizsgált intervallum felosztása pedig az általunk alkalmazott felosztás. Ha az alsó közelítő összeget vesszük, az mindenképpen kisebb vagy egyenlő, mint a test által megtett út, tetszőleges felosztás esetén, hiszen a sebességet mindig „alulról becsüljük”, azaz a test minden egyes időintervallumban nagyobb sebességgel mozgott, így több utat tett meg, mint amennyit arra az intervallumra számoltunk. Hasonlóan látható, hogy a felső közelítő összeg mindig nagyobb vagy egyenlő, mint a test által megtett út. Megállapíthatjuk tehát, hogy ha létezik a test által megtett út, akkor ez minden $\Phi$ felosztás esetén az $[s_\Phi, S_\Phi]$ intervallumba esik. A megtett útnak azonban egyértelműnek kell lennie, tehát csak akkor kaphatjuk meg az utat ilyen számítással, ha pontosan egy szám esik ezen intervallumok mindegyikébe, azaz a metszetükbe is.

**Def.** Legyen az $f$ függvény korlátos $[a,b]$-n. Az $f$ integrálható $[a,b]$-n, ha pontosan egy olyan $I$ szám létezik, amelyre az $[a,b]$ tetszőleges $\Phi$ felosztása esetén fennáll az $S_\Phi \geq I \geq s_\Phi$ egyenlőtlenség. Az $I$ számot az $f$ $[a,b]$-n vett határozott integráljának nevezzük, és $\int_a^b f$ -fel vagy $\int_a^b f(x)dx$ -szel jelöljük.

**Példa:**

1. Tekintsük az $f(x)=c$ függvényt az $[a,b]$ tetszőleges intervallumon. Nyilvánvaló, hogy az $[a,b]$ tetszőleges felosztása esetén $M_i$ és $m_i$ értéke minden $i$ esetén $c$. Tehát az alsó és felső közelítő összegek tetszőleges felosztás esetén:

$$S_\Phi = s_\Phi = \sum_{i=1}^{n} c\cdot(x_i - x_{i-1}) = c\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = c(b-a).$$

Nyilvánvaló tehát, hogy az $f$ függvény integrálható $[a,b]$-n és a határozott integrálja

$$\int_a^b c dx = c(b-a).$$

2. Tekintsük a $D(x)=\begin{cases} 0, \text{ ha } x \text{ rac.} \\ 1, \text{ ha } x \text{ irrac.}\end{cases}$ úgynevezett Dirichlet-függvényt valamely $[a,b]$ intervallumon.

Mivel az $[a,b]$ intervallum tetszőleges $\Phi: x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ felosztására az $[x_i, x_{i-1}]$ intervallumba esik racionális és irracionális szám is, ezért minden $[x_i, x_{i-1}]$ intervallumon $M_\mathrm{i} = 1$ és $m_\mathrm{i} = 0$. Ha felírjuk az alsó illetve felső közelítő összegeket, akkor $s_\Phi = 0$ és $S_\Phi = b-a$ értékeket kapjuk tetszőleges felosztás esetén. Ennek alapján már nyilvánvaló, hogy a D($x$) függvény nem integrálható semmilyen $[a,b]$ intervallumon.

**Megjegyzés:** A korábbiakban már láttuk, hogy tetszőleges $\Phi_2$, $\Phi_1$ felosztások esetén teljesül, hogy $S_{\Phi_2} \geq s_{\Phi_1}$, azaz $\inf_\Phi S_\Phi \geq \sup_\Phi s_\Phi$ [itt az összes $\Phi$ felosztást beleértjük]. A fenti definíció azonban azt is jelenti, hogy $\inf_\Phi S_\Phi \geq I \geq \sup_\Phi s_\Phi$, tudniillik $I \geq s_\Phi$ illetve $S_\Phi \geq I$ minden felosztásra való fennálltából $I \geq \sup_\Phi s_\Phi$ és $\inf_\Phi S_\Phi \geq I$ következik. Mivel az $I$ egyértelmű, $\sup_\Phi s_\Phi$ és $\inf_\Phi S_\Phi$ „között” csak egy szám lehet, ami az $\inf_\Phi S_\Phi = I = \sup_\Phi s_\Phi$ egyenlőséget vonja maga után. A definíciót tehát úgy is kimondhatnánk, hogy az $f$ integrálható $[a,b]$-n, ha az alsó illetve felső közelítő összegek között csak egy elválasztó érték van, vagyis $\inf_\Phi S_\Phi = \sup_\Phi s_\Phi$. A középiskolai tanulmányok során azonban az említett bevezető gondolatmenet végére jobban illeszkedik a definíciónak az a formája, ahogyan azt először kimondtuk. A most említett tulajdonság viszont a továbbiakban fontos szerepet fog kapni.

Az integrálhatóság eldöntésére illetve a határozott integrál kiszámítására az eddigiekben egy elvi módszert láthattunk. Azonban a gyakorlatba az nehéz közvetlenül átültetni, hiszen a felosztások száma végtelen sok, emellett a fajtájuk is igen sokféle lehet. Olyan módszert kéne tehát találnunk, amely leegyszerűsíti a számolást, és lehetővé teszi, hogy bizonyos speciális felosztások segítségével könnyen megállapíthassuk egy függvény integrálhatóságát és határozott integráljának értékét.

## IV.3. Az oszcillációs összeg és a közelítő összeg

**Def.** Legyen *f* korlátos az $[a,b]$ intervallumon, és $\Phi : x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ az $[a,b]$ tetszőleges felosztása. Az $\Omega_\Phi = S_\Phi - s_\Phi$ számot az *f* függvény **Φ** felosztáshoz tartozó oszcillációs összegének nevezzük.

**Tétel:** *f* integrálható $[a,b]$-n akkor és csak akkor, ha az $\Omega_\Phi$ [Φ tetszőleges felosztása az $[a,b]$ intervallumnak] oszcillációs összegek halmazának infimuma [alsó határa] 0.

Ezt a tételt másképp is megfogalmazhatjuk:
**Tétel:** *f* integrálható $[a,b]$-n akkor és csak akkor, ha létezik az $[a,b]$ intervallum felosztásaiból álló olyan $(\Phi_n)$ felosztássorozat, melyre az egyes felosztásokhoz tartozó oszcillációs összegek sorozata 0-hoz tart.
**Következmény:** Ha találunk egy $(\Phi_n)$ felosztássorozatot, amely a tétel feltételeit kielégíti, akkor a felosztássorozat elemeihez tartozó alsó illetve felső közelítő összegek sorozata konvergens és a határozott integrál értékéhez tart.

**Def.** A $\Phi : x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ felosztásban az $[x_i, x_{i-1}]$ intervallumok hosszának maximumát a felosztás finomságának nevezzük.

**Def.** Az $[a,b]$ intervallum felosztásainak $(\Phi_n)$ sorozata végtelenül finomodó, ha a $(\Phi_n)$ felosztássorozat tagjainak finomsága 0-hoz tart.

**Példa:** Az $[a,b]$ intervallum $n$ részre történő egyenletes felosztásaiból képzett $(\Phi_n)$ felosztássorozat végtelenül finomodó, mert az osztó intervallumok hossza $\dfrac{b-a}{n}$, és ez 0-hoz tart, ha $n$ tart a végtelenbe.

**Tétel:** *f* integrálható $[a,b]$-n akkor és csak akkor, ha tetszőleges végtelenül finomodó $(\Phi_n)$ felosztássorozatra a felosztásokhoz tartozó oszcillációs összegek sorozata 0-hoz tart.

**Következmény:** *f* integrálható $[a,b]$-n akkor és csak akkor, ha tetszőleges végtelenül finomodó $(\Phi_n)$ felosztássorozatra a felosztásokhoz tartozó alsó illetve felső közelítő összegek sorozata konvergens és határértékük megegyezik.

A tételnek és következményének jelentősége abban rejlik, hogy ha az integrálhatóság tényét el tudjuk dönteni [például valamely felosztássorozathoz tartozó oszcillációs összegek sorozata 0-hoz tart], de az alsó illetve felső közelítő összegek határértékének kiszámítása nem lehetséges vagy nehézkes, akkor választhatunk egy tetszőleges, végtelenül finomodó felosztássorozatot, melyre már esetleg könnyű kiszámítani pl. az alsó közelítő összegek sorozatának határértékét.

**Példa:**

1. Állapítsuk meg, hogy az $f(x)=x^{10}$ integrálható-e az $[1, 2]$ intervallumon, és ha igen, számítsuk ki a határozott integrálját!

Legyen $\Phi_n$ az $[1, 2]$ intervallum $n$ részre való egyenletes felosztása. Mivel az *f* szigorúan monoton nő $[1, 2]$-n, ezért az $[x_i, x_{i-1}]$ intervallumon

$$m_i = f(x_{i-1}) = f\left(1+\frac{i-1}{n}\right) = \left(1+\frac{i-1}{n}\right)^{10},\quad M_i = f(x_i) = f\left(1+\frac{i}{n}\right) = \left(1+\frac{i}{n}\right)^{10}.$$

Az $[x_i, x_{i-1}]$ intervallumok hossza $\dfrac{1}{n}$. A $\Phi_n$-hez tartozó oszcillációs összeg

$$\Omega_n = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^{10} - \left(1+\frac{i-1}{n}\right)^{10}\right] = \frac{1}{n}(2^{10}-1^{10}) = \frac{2^{10}-1}{n}.$$

Ez nyilván 0-hoz tart, ha $n$ tart végtelenbe, tehát az *f* függvény integrálható. Azonban ha az alsó vagy felső közelítő összegek sorozatának határértékét akarnánk kiszámítani erre a felosztássorozatra, akkor nehézségekbe ütköznénk. Látható ugyanis, hogy amikor pl. az alsó közelítő összeget írjuk fel, abban $\left(1+\frac{i-1}{n}\right)^{10}$ alakú tagokat kell összegeznünk, és tizedik hatványok összegének zárt alakra hozása bizony meglehetősen bonyolult feladat. Ezért vegyünk egy másik, végtelenül finomodó felosztássorozatot, ez legyen $(\Psi_n)$. Legyenek az ebben szereplő $n$-edik felosztás osztópontjai az $1 < q < q^2 < ... < q^n = 2$ pontok, ahol $q = \sqrt[n]{2}$. A szomszédos osztópontok távolsága $q^k - q^{k-1} = q^{k-1}(q-1)$, ezek közül a legnagyobb a $k = n$ esetén fellépő $q^{n-1}(q-1) = \sqrt[n]{2^{n-1}}\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$ [$q$ értékét visszaírva]. Mivel $1 < \sqrt[n]{2^{n-1}} < 2$ és $\sqrt[n]{2}-1 \to 0$, ezért a felosztássorozat végtelenül finomodó, így a hozzá tartozó alsó vagy felső közelítő összegek sorozatának határértéke a határozott integrál értékét adja.

Az egyszerűség kedvéért továbbra is a $q = \sqrt[n]{2}$ jelöléssel élve kapjuk, hogy:

$$S_{\Psi_n} = \sum_{i=1}^{n} (q^i)^{10} \cdot (q^i - q^{i-1}), \text{ mert } f \text{ szigorúan monoton nő.}$$

$$S_{\Psi_n} = \sum_{i=1}^{n} (q^{11i} - q^{11i-1}) = \frac{q^{11(n+1)}-1}{q^{11}-1} - \frac{1}{q}\cdot\frac{q^{11(n+1)}-1}{q^{11}-1} = \frac{q^{11(n+1)}-1}{q^{11}-1}\cdot\frac{q-1}{q}$$

Tudjuk, hogy $\frac{q-1}{q^{11}-1} = \frac{1}{q^{10}+q^9+q^8+...+1}$. Mivel $q = \sqrt[n]{2} \to 1$, ha $n \to \infty$, ezért $\frac{q-1}{q^{11}-1} \to \frac{1}{11}$.

Tudjuk továbbá azt is, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{q^{11(n+1)}-1}{q} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2^{11})^{\frac{n+1}{n}}-1}{\sqrt[n]{2}} = 2^{11}-1$, tehát $\lim\limits_{n\to\infty} S_{\Psi_n} = \frac{2^{11}-1}{11}$. Azt kaptuk tehát eredményül, hogy az $f(x) = x^{10}$ integrálható az $[1, 2]$ intervallumon, és a határozott integráljának értéke $\int_1^2 f(x)dx = \frac{2^{11}-1}{11}$.

2. Tekintsük az ún. Riemann-függvényt, azaz az

$$R(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha } x \text{ irrac.} \\ \frac{1}{q}, \text{ ha } x = \frac{p}{q} [q > 0, (p,q) = 1] \end{cases}$$

függvényt. Integrálható-e $R(x)$ a $[0, 1]$ intervallumon?

Legyen $\Phi$ a $[0, 1]$ intervallum tetszőleges felosztása. A függvény alsó határa minden intervallumon 0, mivel minden intervallumban van irracionális szám, ezért az alsó közelítő összeg tetszőleges felosztás esetén 0. Vegyük észre, hogy a függvény $\frac{1}{n}$-nél nagyobb értéket $n^2$-nél kevesebb helyen vesz fel, ugyanis ha $f(x) \geq \frac{1}{n}$, akkor $x = \frac{p}{q}$, $(p,q) = 1$ és $q \leq n$ kell teljesüljön. Minden $q \leq n$-hez $n$-nél kevesebb $p$ van, melyre $0 < \frac{p}{q} < 1$, és a megfelelő $q$-k száma is legfeljebb $n$, tehát a fent említett $x$-ek száma legfeljebb $n^2$ [sőt annál biztosan kisebb]. Tekintsük tehát a $[0, 1]$ intervallum $n^3$ részre való egyenletes felosztását, ez legyen $\Phi_n$. Az $S_{\Phi_n} = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \frac{1}{n^3}$ összeget bontsuk egy $S_1$ illetve $S_2$ összegre: $S_1$-be vegyük azokat a tagokat, melyekben $M_i \geq \frac{1}{n}$, $S_2$-be a maradékot. A fentiek szerint $S_1$ legfeljebb $2n^2$ tagú összeg [előfordulhat, hogy valamely pont két osztó intervallum határán van, és mindkettőnél figyelembe kell vennünk], és az biztos, hogy az $S_1$-ben szereplő minden $M_i$-re $M_i \leq 1$. Tehát $S_1 \leq 2n^2 \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{2}{n}$. $S_2$-ben $n^3$-nél kevesebb tag van, és az itt szereplő minden $M_i$-re $M_i < \frac{1}{n}$. Tehát $S_2 < n^3 \cdot \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$. Az $S_1$ illetve $S_2$ összegre adott felső becslést figyelembe véve azt kapjuk, hogy $0 < S_{\Phi_n} = S_1 + S_2 < \frac{2}{n} + \frac{1}{n} = \frac{3}{n}$. Tehát a $(\Phi_n)$ felosztássorozatra $s_{\Phi_n} \to 0$ [mert minden $\Phi_n$ felosztásra $s_{\Phi_n} = 0$], $S_{\Phi_n} \to 0$, így az $R(x)$ integrálható a $[0, 1]$ intervallumon, és az integrálja 0.

Felhasználva az integrálhatóság illetve az alsó és felső közelítő összegek kapcsolatát, még egy módszert adhatunk meg a határozott integrál kiszámítására.

**Def.** Legyen $\Phi : x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ az $[a,b]$ intervallum egy felosztása, legyen $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, egyébként $t_i$ tetszőleges $[i = 1, 2, 3, \ldots, n]$, és legyen az $f$ függvény korlátos az $[a,b]$ intervallumon. A $\sigma_\Phi = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$ összeget az $f$ $\Phi$-hez tartozó közelítő összegének nevezzük.[ $\sigma_\Phi$ értéke nyilván nem független $t_i$ megválasztásától!].

**Megjegyzés:** $\sigma_\Phi$ definíciójából nyilvánvaló, hogy $s_\Phi \leq \sigma_\Phi \leq S_\Phi$.

A korábbi tételek illetve a rendőr-elv alkalmazásával a közelítő összeg alábbi tulajdonságai állapíthatók meg:

**Tétel:** Ha $f$ integrálható az $[a,b]$ intervallumon, akkor tetszőleges $(\Phi_n)$ végtelenül finomodó felosztássorozatra a felosztásokhoz tartozó tetszőleges közelítő összegek sorozata a határozott integrál értékéhez tart.

**Tétel:** $f$ integrálható az $[a,b]$ intervallumon és az integrálja $I$ akkor és csak akkor, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\Phi$ felosztás, melyhez tartozó tetszőleges $\sigma$ közelítő összegre fennáll az $|\sigma - I| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

## IV.4. A határozott integrál tulajdonságai

### IV.4.1. A határozott integrál és a műveletek kapcsolata

**Tétel:** Ha $f$ integrálható $[a,b]$-n és $c$ tetszőleges valós szám, akkor $cf$ is integrálható $[a,b]$-n és $\int_a^b (cf)(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$.

**Tétel:** Ha $f$ és $g$ integrálható $[a,b]$-n, akkor $f+g$ is integrálható $[a,b]$-n és $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

**Tétel:** Ha $f$ és $g$ integrálható $[a,b]$-n, akkor $fg$ is integrálható $[a,b]$-n.

**Megjegyzés:** Eddig a differenciál- illetve integrálszámítás és a műveletek kapcsolatánál csupa olyan esettel találkoztunk, amelynél az összeg-, szorzat- stb. függvény megfelelő származtatott mennyisége kiszámítható volt az eredeti függvények megfelelő származtatott mennyiségének segítségével. Azonban $\int_a^b (fg)(x)dx$ nem számítható ki $\int_a^b f(x)dx$ és $\int_a^b g(x)dx$ segítségével, pontosabban fogalmazva nincs olyan általánosan érvényes eljárás, mellyel a szorzatfüggvény integrálja az eredeti függvények integráljának segítségével kiszámítható lenne. Ez más szavakkal azt jelenti, hogy a két függvény integráljának értéke nem határozza meg a szorzatfüggvény integrálját. Ez egy egyszerű példával megmutatható.

Legyen például először $f(x) \equiv g(x) \equiv \frac{1}{2}$, és számítsuk ki *f*, *g* és *fg* határozott integrálját a $[0, 1]$ intervallumon. Nyilvánvaló, hogy $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = \frac{1}{2}$ és $\int_0^1 (fg)(x)dx = \frac{1}{4}$. Most legyen $f(x) \equiv g(x) \equiv x$, és számítsuk ki ugyanezen határozott integrálok értékét. Itt most nem részletezett számítással kapjuk: $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = \frac{1}{2}$, $\int_0^1 (fg)(x)dx = \frac{1}{3}$. [A két integrál értéke az egyenletes felosztássorozathoz tartozó alsó illetve felső közelítő összegek sorozatának határértékeként könnyen kiszámítható.] Azt kaptuk tehát, hogy mindkét esetben $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = \frac{1}{2}$, de az első esetben $\int_0^1 (fg)(x)dx = \frac{1}{4}$, a második esetben $\int_0^1 (fg)(x)dx = \frac{1}{3}$. Ha lenne általános képlet $\int_a^b (fg)(x)dx$-nek $\int_a^b f(x)dx$ és $\int_a^b g(x)dx$ értékéből történő kiszámítására, akkor mindkét esetben ugyanazt kellett volna kapnunk. Azonban különböző eredményekhez jutottunk, így nem létezhet az igényeinket kielégítő általános eljárás.

A fentiekhez hasonló tételt nem mondhatunk ki két függvény hányadosának integrálhatóságára, hiszen többek között azt sem tudjuk garantálni, hogy ha *f* és *g* integrálható $[a,b]$-n, akkor a hányadosfüggvény korlátos $[a,b]$-n, így *f* és *g* integrálhatóságának nyilván nem következménye a hányadosuk integrálhatósága. Viszont bizonyos feltételek teljesülése esetén a hányados integrálható, nevezetesen:

**Tétel:** Ha *g* integrálható $[a,b]$-n, és itt $|\, g \,| \geq c > 0$, akkor $\frac{1}{g}$ is integrálható $[a,b]$-n.

A fenti tétel és a szorzat integrálhatóságára mondott tétel következménye:

**Tétel:** Ha *f* és *g* integrálható $[a,b]$-n, és itt $|\, g \,| \geq c > 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is integrálható $[a,b]$-n.

**Megjegyzés:** Természetesen itt sincsen általános kiszámítási mód, akárcsak a szorzatfüggvény integráljánál.

A fentiekkel szemben két, minden intervallumon integrálható függvényből képzett összetett függvény nem szükségképpen integrálható.

Legyen például

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ ha } x=0\\ 0, \text{ ha } x\neq 0\end{cases} \qquad R(x)=\begin{cases}0, \text{ ha } x \text{ irrac.}\\ \dfrac{1}{q}, \text{ ha } x=\dfrac{p}{q}, [q>0, (p,q)=1]\end{cases}$$

$f(x)$ nyilván integrálható a $[0,1]$-n, és már láttuk, hogy itt $R(x)$ is integrálható. Viszont az $f(R(x))=D(x)=\begin{cases}1, \text{ ha } x \text{ irrac.}\\ 0, \text{ ha } x \text{ rac.}\end{cases}$ függvény a Dirichlet-függvény, amiről már megmutattuk, hogy semmilyen $[a,b]$-n nem integrálható.

$f(g(x))$ integrálhatóságára csak akkor következtethetünk, ha az integrálhatóságon kívül további tulajdonságokat feltételezünk *f*-ről és *g*-ről. Például:

**Tétel:** Ha *g* integrálható $[a,b]$-n és *f* folytonos egy $g([a,b])$-t tartalmazó zárt intervallumon, akkor $f(g(x))$ is integrálható $[a,b]$-n.

**Tétel:** Ha *f* integrálható $[a,b]$-n, akkor $|\, f\,|$ is integrálható $[a,b]$-n.

**Megjegyzés:** A tétel megfordítása nyilvánvalóan nem igaz. Legyen például

$$f(x)=\begin{cases}-1, \text{ ha } x \text{ rac.}\\ 1, \text{ ha } x \text{ irrac.}\end{cases}$$

Ekkor $|\, f\,|\equiv 1$ nyilván integrálható minden $[a,b]$-n, de egyszerűen belátható, hogy *f* nem integrálható semmilyen $[a,b]$-n, mert $[a,b]$ tetszőleges felosztása esetén az alsó közelítő összegek $a-b$-vel, a felső közelítő összegek $b-a$-val egyenlőek, és $a\neq b$ miatt $a-b\neq b-a$.

## IV.4.2. Az integrál intervallumon való additivitása

**Tétel:** Ha *f* integrálható $[a,b]$-n és $[c,d]$ az $[a,b]$ egy részintervalluma, akkor *f* integrálható $[c,d]$-n is.

**Tétel:** Ha $f$ integrálható $[a,b]$-n és $c\in(a,b)$, akkor $f$ integrálható $[a,c]$-n és $[c,b]$-n is, és

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

**Tétel:** Ha $f$ integrálható $[a,c]$-n és $[c,b]$-n, akkor $f$ integrálható $[a,b]$-n és $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

**Def.** Legyen *f* integrálható $[a,b]$-n. Ekkor vezessük be az alábbi határozott integrálokat:

Legyen $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$, és legyen $\int_a^a f(x)dx = 0$.

A bevezetett új jelöléseinkkel illetve a határozott integrál „kiterjesztett" értelmezésével az alábbi általános tételhez jutunk:

**Tétel:** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, amennyiben az egyes integrálok léteznek. [*a*, *b* és *c* tetsző-leges valós számok]

## IV.4.3. Az integrálhatóság elégséges feltételei

**Tétel:** Ha *f* monoton az $[a,b]$ intervallumon, akkor *f* integrálható $[a,b]$-n.

**Tétel:** Ha *f* korlátos $[a,b]$-n, és $[a,b]$ felbontható véges sok intervallumra, melyek mindegyikén *f* monoton, akkor *f* integrálható $[a,b]$-n.

**Tétel:** Ha *f* folytonos $[a,b]$-n, akkor *f* integrálható $[a,b]$-n.

**Megjegyzés:** Ez a tétel számunkra igen fontos, mert az általunk használt függvények nagy része folytonos, így az integrálhatóságot nem kell külön megvizsgálni ezek esetében.

**Tétel:** Ha *f* korlátos az $[a,b]$ intervallumon, és minden $\delta > 0$ esetén integrálható az $[a+\delta, b]$ intervallumon, akkor integrálható az $[a,b]$-n is.

**Tétel:** Ha *f* korlátos $[a,b]$-n és itt véges számú hely kivételével folytonos, akkor *f* integrálható $[a,b]$-n.

**Tétel:** Ha *f* integrálható $[a,b]$-n, *g* értelmezve van $[a,b]$-n és itt véges számú hely kivételével $g(x)=f(x)$, akkor *g* is integrálható $[a,b]$-n, és $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$.

Ez a tétel lehetőséget ad rá, hogy a függvény integrálhatóságát kiterjesszük arra az esetre, amikor az *f* függvény az $[a,b]$ intervallum véges sok pontjában nincs értelmezve, de az értelmezési tartományának $[a,b]$-be eső részén korlátos. Legyen ugyanis $g(x)=f(x)$ azokban a pontokban, ahol *f* értelmezve van $[a,b]$-n, a maradék véges sok pontban pedig *g* értéke legyen tetszőleges. A korábban mondott tételek szerint ha *g* integrálható $[a,b]$-n, akkor a határozott integráljának értéke nem függ ezen véges sok pontban felvett függvényértéktől. Vagyis legyen $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$, ha *g* integrálható $[a,b]$-n, egyéb esetben pedig legyen *f* nem integrálható $[a,b]$-n.

Tehát összefoglalva a határozott integrál értéke nem változik, ha:

1. A függvény értékét véges sok pontban megváltoztatjuk
2. A függvény értelmezését véges sok pontban kiterjesztjük
3. A függvény értelmezését véges sok pontban megszüntetjük

## IV.4.4. A határozott integrálra vonatkozó egyenlőtlenségek

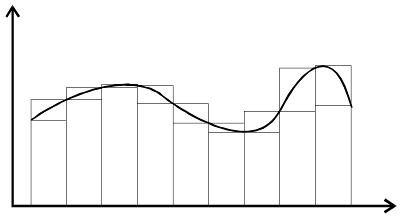
**Tétel:** Ha *f* integrálható $[a,b]$-n, és $k\le f(x)\le K$ az $[a,b]$ intervallumon, akkor $k(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le K(b-a)$.

**Tétel:** Ha *f* integrálható $[a,b]$-n, és $k\le f(x)\le K$ az $[a,b]$ intervallumon, akkor van olyan μ szám, melyre $k\le\mu\le K$ és $\int_a^b f(x)dx=\mu(b-a)$.

A tétel következménye az alábbi tétel:

**Tétel:** Ha $f$ folytonos $[a,b]$-n, akkor van olyan $c \in [a,b]$, melyre $\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$.

## IV.5. A határozott integrál és a terület kapcsolata



Ha az integrál definícóját tekintjük és egy koordináta-rendszerben felrajzoljuk a függvény grafikonját illetve az alsó és felső közelítő összegeket, akkor láthatjuk, hogy az alsó közelítő összegek olyan téglalapok területeinek összegei, melyek az $x$ tengely, az $x=a$ és $x=b$ egyenesek valamint a függvény grafikonja által határolt síkidomon belül vannak, a felső közelítő összegek pedig olyan téglalapok területeinek összegei, melyek az említett síkidomot lefedik. [A „síkidom”-ot itt tágabb értelemben kell vennünk, hiszen például a nem folytonos függvények grafikonjai nem folytonos, nem összefüggő görbék.] A síkidom területe [ha egyáltalán van ilyen] nagyobb, mint a benne levő téglalapok területének összege, és kisebb, mint az őt lefedő téglalapok területének összege. Ha a függvény integrálható, akkor csak egy olyan szám van, amely ezekkel a tulajdonságokkal rendelkezik, és ez a függvény határozott integrálja. Tehát az említett síkidom területe a határozott integrállal kell, hogy megegyezzen abban az esetben, ha a függvény integrálható.

A fentiekben elmondottaknak szemléletes jelentéstartalma van. Mindenkiben van egy intuitív elképzelés a területről, a terület fogalmáról, és ezt vetjük össze az integrálszámítás eddig megismert eredményeivel. Azonban a terület fogalmát nem árt megalapozni, mert nem teljesen egyértelmű, hogy miért pont úgy számítjuk ki az egyes alakzatok területét, ahogy tesszük. Erre van geometriai illetve analitikus módszer is, de mindenképpen érdemes valahogy ötvözni a kétféle tárgyalási módot. Természetesen az ilyen módon történő területfogalom felépítése nem kell, hogy teljes matematikai precízséggel történjék. Azonban korábban az érintővel kapcsolatban látszólag ellentmondásba kerültünk a szemlélettel, ezért érdemes a terület azon tulajdonságait kiemelni, amelyek világossá teszik, hogy a területszámításban miért használhatjuk a határozott integrál kiszámítását.

Az eddigiekben láthattunk már néhány példát a határozott integrál kiszámítására. Érezhető azonban, hogy akár az alsó vagy felső közelítő összegegekkel, akár a közelítő összegekkel vagy az oszcillációs összeggel történő számolások elég bonyolultak és nehézkesek. A továbbiakban olyan módszerről lesz szó, amely leegyszerűsíti az integrál kiszámítását.

## IV.6. Az integrálfüggvény

**Def.** Legyen *f* integrálható $[a,b]$-n. Ekkor tudjuk, hogy minden $a \le x \le b$ esetén *f* integrálható az $[a,x]$ intervallumon. Az $I(x)=\int_a^x f(t)dt$ függvényt az *f* integrálfüggvényének nevezzük.

**Tétel:** Ha *f* integrálható $[a,b]$-n, akkor *f* integrálfüggvénye folytonos $[a,b]$-n.

**Tétel:** Ha *f* folytonos $[a,b]$-n, akkor *f* integrálfüggvénye folytonos $[a,b]$-n, differenciálható $(a,b)$-n, és $I'(x)=f(x)$.

Ha a fenti tételt kicsit megvizsgáljuk, az alábbi érdekes kapcsolatot fedezhetjük fel:
Az integrálfüggvény definícióját tekintve nyilvánvaló, hogy $\int_a^b f(t)dt = I(b)-I(a)$. Másrészt viszont láttuk, hogy ha *f* folytonos, akkor $I'(x)=f(x)$, vagyis a határozott integrál értékét egy olyan függvénynek az intervallum szélein felvett függvényértékei különbségeként kapjuk, melynek deriváltja a integrálandó függvény.
Ez a megfigyelés általánosabban is igaz, nevezetesen:

**Tétel: [*Newton-Leibniz formula*]** Ha *f* integrálható $[a,b]$-n, $F$ folytonos $[a,b]$-n, differenciálható $(a,b)$-n és itt $F'(x)=f(x)$, akkor $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

Az $F(b)-F(a)$ kifejezés szokásos jelölése $[F(x)]_a^b$.

**Példa:**

1. Legyen $f(x)=c$. Számítsuk ki a határozott integrálját az $[a,b]$ intervallumon!
$F(x)=cx$-re teljesül, hogy $F'(x)=f(x)$. Tudjuk, hogy *f* folytonos, tehát *f* integrálható $[a,b]$-n, így a Newton-Leibniz formula értelmében $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = c(b-a)$.

2. Legyen $f(x)=x^{10}$. Számítsuk ki a határozott integrálját az $[1, 2]$ intervallumon!

Mivel *f* folytonos, *f* integrálható az $[1, 2]$ intervallumon. Ha $F(x)=\frac{1}{11}x^{11}$, akkor $F'(x)=f(x)$. A Newton-Leibniz formula értelmében $\int_1^2 f(x)dx=F(2)-F(1)=\frac{2^{11}-1}{11}$.

A példákból is látható, hogy a Newton-Leibniz formula lényegesen egyszerűbb számolási lehetőséget nyújt, mint az alsó illetve felső közelítő összegek határértékének megadása. Persze néha az is nehézséget okoz, hogy találjunk olyan függvényt, amelynek deriváltja az általunk integrálni kívánt függvény, de a legtöbb, a középiskolában előforduló függvény esetén viszonylag egyszerű módszerekkel találhatunk ilyet.

A Newton-Leibniz formula azt mutatja, hogy az integrál- és differenciálszámítás között kapcsolat áll fenn. A továbbiakban ezt a kapcsolatot vizsgáljuk meg.

## IV.7. Primitív függvény, határozatlan integrál

A Newton-Leibniz formula akkor alkalmazható, ha *f* integrálható $[a,b]$-n, és van olyan *F* függvény, melyre $F'(x)=f(x)$. Vezessünk be egy új fogalmat!

**Def.** Ha *F* differenciálható az $(a,b)$-n, és itt $F'(x)=f(x)$, akkor *F*-et az *f* $(a,b)$-hez tartozó primitív függvénynek nevezzük.

**Def.** Ha *F* differenciálható az $[a,b]$-n, és itt $F'(x)=f(x)$, akkor *F*-et az *f* $[a,b]$-hez tartozó primitív függvénynek nevezzük.

A Newton-Leibniz formula a primitív függvény fogalmának segítségével az alábbi alakban írható fel:

**Tétel: [*Newton-Leibniz formula*]** Ha *f* integrálható $[a,b]$-n, itt van primitív függvénye és ez *F*, akkor $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

Ezek után rögtön a következő kérdések merülnek fel:

1. *f* milyen tulajdonságaiból következik, hogy van primitív függvénye?
2. Ha *f*-nek több primitív függvénye van, akkor ezek milyen kapcsolatban vannak egymással?
3. Integrálhatóság és primitív függvény létezése között van-e összefüggés?

Nézzük most az egyes kérdésekre a válaszokat!

**Tétel:** Ha *f*-nek van primitív függvénye $[a,b]$-n, akkor *f* rendelkezik a Darboux-tulajdonsággal, azaz *f* minden $f(a)$ és $f(b)$ közti értéket felvesz az $[a,b]$ intervallumon.

**Megjegyzés:** A Darboux-tulajdonság szükséges, de nem elégséges feltétel a primitív függvény létezéséhez. Legyen ugyanis a $[-2,\, 2]$ intervallumon *f* a következőképpen értelmezve:

$$f(x)=\begin{cases} x-2, \text{ ha } 0\le x\le 2 \\ x+2, \text{ ha } -2\le x<0 \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy *f* a $[-2,\, 2]$ intervallumon minden $f(-2)$ és $f(2)$ közé eső értéket felvesz, mert $f(-2)=f(2)=0$, így itt rendelkezik a Darboux-tulajdonsággal. Viszont ha lenne olyan *F* függvény, melyre $F'(x)=f(x)$ a $[-2,\, 2]$ intervallumon, akkor $F'(x)=f(x)$ teljesülne például a $[-1,\, 1]$ intervallumon, azonban nyilvánvaló, hogy *f* itt nem rendelkezik a Darboux-tulajdonsággal, mert itt $f(-1)=1$ és $f(1)=-1$ közé eső értékeket egyáltalán nem vesz fel. Tehát *f*-nek nem létezik primitív függvénye a $[-2,\, 2]$ intervallumon.

**Tétel:** Ha *f* folytonos $[a,b]$-n, akkor itt van primitív függvénye [például az integrálfüggvénye].

**Megjegyzés:** A folytonosság elégséges, de nem szükséges feltétele a primitív függvény létezésének. Erre majd később látunk példát.

**Tétel:** Legyen *F* az *f* függvény primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon. *G* primitív függvénye *f*-nek az $[a,b]$ intervallumon akkor és csak akkor, ha van olyan *c* konstans, hogy az $[a,b]$ intervallumon $G(x)=F(x)+c$.

A tételből látható, hogy *f* primitív függvényei csak egy konstansban térhetnek el egymástól, tehát ha *f* egy primitív függvényét meghatározzuk, megkaphatjuk az összes primitív függvényét ennek segítségével. Most már az is érthető, hogy a Newton-Leibniz formulában szereplő $F$ primitív függvény miért lehet tetszőleges: ha ugyanis helyette egy $G$ primitív függvényt írunk, akkor valamely $c$-re $G(x)=F(x)+c$, és ezért

$$F(b)-F(a)=[F(b)+c]-[F(a)+c]=G(b)-G(a).$$

**Def.** Az $f$ $I$ intervallumhoz tartozó primitív függvényeinek összességét az $f$ határozatlan integráljának nevezzük, és $\int f(x)dx$-szel vagy röviden $\int f$-fel jelöljük.

Látható, de nem árt hangsúlyozni, hogy az $f$ függvény kétféle integrálja két teljesen különböző dolgot takar: a határozott integrál egy *szám*, míg a határozatlan integrál adott tulajdonságú *függvények halmaza*.

## IV.8. Alapintegrálok

Az ún. elemi függvények differenciálási szabályainak ismeretében kapjuk az ún. alapintegrálokat, melyeket az elemi függvények deriváltjaihoz hasonlóan táblázatba foglalhatunk [a táblázatban a primitív függvény mellett fel van tüntetve az az intervallum, melyen a primitív függvény érvényes].

| $f(x)$ | $\int f(x)dx$ |
|---|---|
| $x^\alpha,\ \alpha\neq -1$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $I\subset x^\alpha$ értelmezési tartománya |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert+c,\ I\subset(-\infty,0)$ vagy $I\subset(0,+\infty)$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\operatorname{arctg} x+c,\ I\subset(-\infty,+\infty)$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin x+c,\ I\subset[-1,1]$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $\operatorname{arsh} x+c=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+1}\right\rvert+c,\ I\subset(-\infty,+\infty)$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\operatorname{arch} x+c=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert+c,\ I\subset(1,+\infty)$ vagy $I\subset(-\infty,-1)$ |
| $e^x$ | $e^x+c,\ I\subset(-\infty,+\infty)$ |

| $f(x)$ | $\int f(x)dx$ |
|---|---|
| $a^x$ | $\dfrac{a^x}{\ln a}+c,\ a>0,\ I\subset(-\infty,+\infty)$ |
| $\sin x$ | $-\cos x+c,\ I\subset(-\infty,+\infty)$ |
| $\cos x$ | $\sin x+c,\ I\subset(-\infty,+\infty)$ |
| $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $\mathrm{tg}\ x+c,\ I\subset\left((2k-1)\dfrac{\pi}{2},(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$ |
| $\mathrm{sh}\ x$ | $\mathrm{ch}\ x+c,\ I\subset(-\infty,+\infty)$ |
| $\mathrm{ch}\ x$ | $\mathrm{sh}\ x+c,\ I\subset(-\infty,+\infty)$ |
| $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$ | $\mathrm{th}\ x+c,\ I\subset(-\infty,+\infty)$ |
| $\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$ | - $\mathrm{cth}\ x+c,\ I\subset(-\infty,0)$ vagy $I\subset(0,+\infty)$ |

## IV.9. Kapcsolat a primitív függvény létezése és az integrálhatóság között

**Tétel:** Ha $F$ az $[a,b]$-n folytonosan differenciálható [azaz a deriváltja folytonos], és az egyszerűség kedvéért $F(a)=0$, akkor $F(x)=\int_a^x F'(t)dt$, azaz ha az $F$ függvényt deriváljuk, majd a deriváltját integráljuk, visszakapjuk az eredeti függvényt [vagy általános esetben $F(x)-F(a)$ -t].

**Tétel:** Ha $f$ folytonos $[a,b]$-n, akkor $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$, azaz ha a függvényt integráljuk, majd az integrálfüggvényt deriváljuk, visszakapjuk az eredeti függvényt.

**Megjegyzés:** A fenti két tétel azt mutatja, hogy bizonyos értelemben véve az integrálás és a deriválás egymásnak „inverz” műveletei.

Ez a két tétel általánosan is kimondható:

**Tétel:** Ha $F$ differenciálható $[a,b]$-n és $F'$ integrálható $[a,b]$-n, akkor $F(x)=\int_a^x F'(t)dt+F(a)$.

**Tétel:** Ha $f$ integrálható $[a,b]$-n és van primitív függvénye $[a,b]$-n, akkor $f$ integrálfüggvénye differenciálható $[a,b]$-n, és $(a,b)$ minden pontjában $I'(x)=f(x)$.

Van-e szorosabb kapcsolat a primitív függvény létezése és az integrálhatóság között? Az alábbiakban megmutatjuk, hogy nincs.

**Tétel:** Ha $f$ integrálható $[a,b]$-n, akkor ebből nem következik, hogy $f$-nek van primitív függvénye $[a,b]$-n.

Ezt egyszerű megmutatni. Legyen például $f(x)=\operatorname{sgn} x$, azaz

$$f(x)=\begin{cases}+1, \text{ ha } x>0\\ 0, \text{ ha } x=0\\ -1, \text{ ha } x<0\end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy $f$ integrálható a $[-1,1]$ intervallumon, de itt nem rendelkezik a Darboux-tulajdonsággal, így nem létezik primitív függvénye.

**Tétel:** Ha $f$ integrálható az $[a,b]$-n, integrálfüggvénye differenciálható $[a,b]$-n, akkor ebből nem következik, hogy $f$-nek van primitív függvénye $[a,b]$-n.

Ennek igazolásához tekintsük például az előző tételnél szerepelt $f(x)=\operatorname{sgn} x$ függvényt a $[0,1]$ intervallumon. A korábban mondottak értelmében $f$ integrálható a $[0,1]$ intervallumon, mert egy pont kivételével folytonos, és integrálfüggvényének értéke minden 0 és 1 közé eső $x$-re megegyezik a $g(x)\equiv 1$ függvény integrálfüggvényével. Tehát $f$ integrálfüggvénye $[0,1]$ intervallumon differenciálható, és deriváltja a $g(x)\equiv 1$ függvény. Viszont $f$ nem lehet semelyik függvénynek a deriváltja a $[0,1]$ intervallumon, mert itt nem rendelkezik a Darboux-tulajdonsággal.

Ugyanez fennáll az $R(x)$ Riemann-függvényre is. Korábban már szerepelt, hogy $R(x)$ integrálható a $[0,1]$ intervallumon, és itt a határozott integrálja 0. Könnyen belátható, hogy $R(x)$ tetszőleges intervallumon integrálható, és itt határozott integráljának értéke 0. Ennek megfelelően pl. a $[0,1]$ intervallumon $R(x)$ integrálfüggvénye az $I(x)\equiv 0$ függvény, ami differenciálható, és deriváltja $I'(x)\equiv 0$. A Darboux-tételt felhasználva pedig belátható, hogy $R(x)$-nek nem létezik a $[0,1]$ intervallumon primitív függvénye, sőt az is igaz, hogy semmilyen intervallumon nincs primitív függvénye.

**Tétel:** Ha *f*-nek van primitív függvénye $[a,b]$-n, akkor ebből nem következik, hogy *f* integrálható is $[a,b]$-n.

Ennek megmutatásához olyan *F* függvényt kell keresnünk, amely valamely $[a,b]$-n deriválható, de a deriváltja nem integrálható. Ilyen például a $[-1,1]$ intervallumon az

$$F(x)=\begin{cases}|x|^{\frac{3}{2}}\cdot\sin\dfrac{1}{x},\text{ ha } x\neq 0\\ 0,\text{ ha } x=0\end{cases}$$

függvény. Ha $x<0$, akkor $F'(x)=-\frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{x}-(-x)^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{x}$, ez a második tag miatt nem korlátos, ha $x>0$, akkor $F'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{x}-x^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{x}$, ez a második tag miatt szintén nem korlátos. Könnyen megmutatható, hogy $F'(0)$ is létezik, tehát *F* differenciálható a $[-1,1]$ intervallumon, de a deriváltja nem integrálható, mert nem korlátos.

**Megjegyzés:** Megadható olyan függvény is, mely differenciálható valamely $[a,b]$-n, itt a deriváltja korlátos, de mégsem integrálható.

**Tétel:** Ha *f* integrálható $[a,b]$-n és itt van primitív függvénye, akkor ebből nem következik, hogy *f* folytonos is.

Ennek megmutatásához tekintsük a $[-1,1]$ intervallumon az

$$f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x},\text{ ha } x\neq 0\\ 0,\text{ ha } x=0\end{cases}$$

függvényt. *f* az $x=0$ kivételével mindenütt folytonos, és korlátos a $[-1,1]$ intervallumon, tehát itt integrálható. *f*-nek primitív függvénye is van, mégpedig

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x},\text{ ha } x\neq 0\\ 0,\text{ ha } x=0\end{cases}$$

## IV.10. Integrálási szabályok

A Newton-Leibniz formula segítségével kapcsolatot találtunk a primitív függvény illetve a határozott integrál között. Általában olyan függvények határozott integrálját számítjuk ki, melyek eleget tesznek a Newton-Leibniz formula feltételeinek, ezért érdemes néhány olyan szabályt illetve módszert végigtekinteni, amely a primitív függvény megkeresésében van segítségünkre.

**Tétel: [*Parciális integrálás szabálya*]** Ha $f$ és $g$ differenciálható az $I$ intervallumon, és itt $fg'$ primitív függvénye létezik, akkor $f'g$ primitív függvénye is létezik és $\int f'g = fg - \int fg'$.

**Példa:**

Határozzuk meg $x \cdot \sin x$ primitív függvényét!

Legyen $f(x) = -\cos x$ és $g(x) = x$. Ekkor $f'(x) = \sin x$, $g'(x) = 1$, tehát a fenti jelölésekkel $\int x \sin x dx = -x\cos x - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + c$.

**Tétel: [*Parciális integrálás szabálya*]** Ha $f$ és $g$ differenciálható az $[a,b]$ intervallumon és itt $f'$ és $g'$ integrálható, akkor $\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$.

**Példa:**

Számítsuk ki $e^x \cos x$ határozott integrálját a $[0,2\pi]$ intervallumon!

Legyen $f(x) = e^x$, $g(x) = \cos x$. Ekkor $f'(x) = e^x$, $g'(x) = -\sin x$. Azaz a fentiek szerint

$$\int_0^{2\pi} e^x \cos x dx = [e^x \cos x]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} e^x \sin x dx$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\int_0^{2\pi} e^x \sin x dx = [e^x \sin x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^x \cos x dx .$$

Azaz az előző kifejezésbe visszahelyettesítve

$$\int_0^{2\pi} e^x \cos x dx = [e^x \cos x]_0^{2\pi} + [e^x \sin x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^x \cos x dx$$

$$2\int_0^{2\pi} e^x \cos x dx = [e^x \cos x]_0^{2\pi} + [e^x \sin x]_0^{2\pi} = e^{2\pi} - 1$$

$$\int_0^{2\pi} e^x \cos x dx = \frac{1}{2}[e^{2\pi} - 1]$$

**Tétel:** **[*Helyettesítéssel való integrálás módszere*]** Ha $g(x)$ differenciálható az $I$ intervallumon, $f(x)$ primitív függvénye létezik $g(I)$-n és ez $F(x)+c$, akkor $f(g(x))\cdot g'(x)$ primitív függvénye is létezik *I*-n és $\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = F(g(x)) + c$.

**Megjegyzés:** A tételt kétféle módon használhatjuk fel. Egyszer úgy, hogy valamely *f* függvény primitív függvényét keresve egy olyan *g* függvényt keresünk, melyre az $f(g(x))\cdot g'(x)$ primitív függvénye könnyen megadható, és ebbe *g* inverzét írva megkapjuk a keresett, *f*-hez tartozó primitív függvényt. Másodszor pedig úgy, hogy adott valamely *f* függvény, melynek ismert a primitív függvénye, és az $f(g(x))\cdot g'(x)$ függvény primitív függvényét keressük. Itt most az első módszerre láthatunk példát.

**Példa:**

Határozzuk meg $\sqrt{1-x^2}$ primitív függvényét a $[0, 1]$ intervallumon!

Legyen $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ és $g(x) = \sin x$ [ $g(x)$ a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon változik, ha $f(x)$ a $[0, 1]$ intervallumon]. Ekkor $f(g(x))\cdot g'(x) = \sqrt{1-\sin^2 x}\cdot \cos x = \cos^2 x$.

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c = \frac{x}{2} + \frac{2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}}{4} + c = F(g(x)) + c$$

Ahhoz, hogy *f* primitív függvényét megkapjuk, az $F(g(x))$-be $g^{-1}(x)$-et, azaz jelen esetben *x* helyébe $\arcsin x$-et kell írnunk. Ekkor az $F(x) = \frac{\arcsin x}{2} + x\sqrt{1-x^2} + c$ függvényhez jutunk.

**Megjegyzés:** A szabály látszólag bonyolult, nem túlzottan követhető. Viszont a módszer egyszerűsíthető bizonyos technikai trükkökkel, melynek végén a helyes eredményt kapjuk. [Ez az ún. „fizikus módszer”, mert a fizikusok a gyakorlati számítások során ezt alkalmazzák.] Lássuk tehát, hogyan lehet egyszerűsíteni a számolást!

$\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ értékét kell kiszámítanunk. Vezessünk be új változót, $x=\sin t$ helyettesítéssel. Ekkor mindkét oldalt „differenciálva" a $\frac{dx}{dt}=\cos t$ egyenlőséget kapjuk, az egyenlőség mindkét oldalát $dt$-vel „megszorozva" $dx=\cos t\,dt$. Ezt visszaírjuk $x$ illetve $dx$ helyébe, és ekkor az alábbi formát kapjuk:

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt=\int\cos^2 t\,dt=\frac{t}{2}+\frac{2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}}{4}+c=\frac{\arcsin x}{2}+x\sqrt{1-x^2}+c$$

Látható tehát, hogy egyrészt az új változó bevezetésével sokkal áttekinthetőbbé válik a számolás, másrészt az alkalmazott technika jobban követhetővé teszi, hogy az egyes kifejezések hogyan változnak a számolás során, illetve ennek segítségével állapíthatjuk meg, hogy egyáltalán mit is kell csinálni.

Nagyon fontos azonban megjegyezni, hogy ez itt pusztán szimbolikus számítási módszer, a $\frac{dx}{dt}$ függvény $dt$-vel való „megszorzásának" illetve a $dt$-vel való „egyszerűsítésnek" konkrét matematikai jelentése nincs. Az egyszerűsége és áttekinthetősége azonban amellett szól, hogy alkalmazzuk, és használjuk a középiskolás feladatmegoldás esetén is. A tanítása illetve alkalmazása során azonban mindig hangsúlyozni kell a szimbolikus jellegét, csakúgy, mint például a „végtelen" szimbólumának bevezetésekor.

A tétel határozott integrálra is kimondható. Mivel láttuk, hogy egyszerűbb és áttekinthetőbb új változó alkalmazása a jelölésben, a tételt már ilyen formában mondjuk ki.

**Tétel: [*Helyettesítéssel való integrálás módszere*]** Ha $g$ differenciálható az $[a,b]$ intervallumon, $f$ integrálható $g([a,b])$-n és itt van primitív függvénye, valamint $f(g(t))\cdot g'(t)$ integrálható $[a,b]$-n és itt van primitív függvénye, akkor $\int\limits_{g(a)}^{g(b)}f(x)dx=\int\limits_a^b f(g(t))\cdot g'(t)dt$

**Példa:**

Számítsuk ki az $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\cdot e^{\cos^2 t}dt$ integrál értékét!

A megoldás során a korábban használt „fizikus módszert" fogjuk alkalmazni. Legyen $x=\cos^2 t$!

Ekkor $dx = -2\cos t \sin t dt = -\sin 2t dt$. Azaz

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos^2 t} \sin 2t dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\underbrace{\cos^2 t}_{x}} \cdot \underbrace{(-\sin 2t)\ dt}_{dx} = -\int_1^0 e^x dx = \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e-1$$

A helyettesítés utáni határokat úgy érdemes megállapítani, hogy megnézzük, milyen értékek között változik a helyettesített kifejezés illetve ennek megfelelően az új változó. Jelen esetben $x = \cos^2 t$, ha $t$ 0-tól $\frac{\pi}{2}$-ig változik, akkor $x = \cos^2 t$ $\cos^2 0$-tól $\cos^2 \frac{\pi}{2}$-ig, azaz 1-től 0-ig változik. Itt, mint látható, előfordulhat, hogy „fordított irányú” integrált kapunk, azaz az integrál alsó határa nagyobb, mint a felsőé, de ez csak egy negatív előjelet jelent, tehát nem okoz gondot.

## IV.11. Néhány példa határozatlan integrál kiszámítására

Az előző integrálási szabályok módot adnak arra, hogy az alapintegrálok vagy bizonyos függvények primitív függvényének ismeretében további függvények határozatlan integrálját kiszámítsuk. Azonban, mint az látható lesz a későbbiekben, néha olyan nehézségekbe ütközünk, mellyel a differenciálszámítás során nem találkoztunk. Ennek oka abban rejlik, hogy a differenciálási szabályokból kiderül: az ún. elemi függvények [konstans, $x$, sin$x$, cos$x$, ln$x$, $e^x$ függvényekből és ezek inverzeiből a négy alapművelet illetve az összetett függvény képzés véges sokszori alkalmazásával előállított függvények] deriváltja meghatározható, és ez a derivált is elemi függvény. Ezzel szemben a primitív függvény megkeresése nem működik ilyen „receptszerűen”, a legtöbb esetben külön ötlet kell ahhoz, hogy az integrálási szabályokat hogyan alkalmazzuk, pl. milyen helyettesítő függvényt válasszunk. Ennek az az oka, hogy nem minden elemi függvény primitív függvénye elemi függvény. Ilyenek például a $\sin x^2$, $\cos x^2$, $e^{-x^2}$ függvények. Ezeknek nyilván létezik primitív függvényük, mert folytonosak, ám mégsem adhatók meg elemi függvényként. Általános módszer primitív függvény keresésére tehát nem adható. Vannak azonban olyan függvények, amikor ügyes helyettesítéssel vagy megfelelő átalakítással már ismert primitív függvényre vezethető vissza a határozatlan integrál megkeresése. Nézzünk erre néhány példát!

1. Keressük meg az $\frac{1}{x^2+x-2}$ függvény határozatlan integrálját a $[2,\infty)$ intervallumon! [az egyszerűség kedvéért választottuk pont ezt az intervallumot; máshol a módszer hasonlóan működik]

A nevező szorzattá alakítható: $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$. A nevező szorzatalakját felhasználva a törtet két tört összegére tudjuk bontani: $\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)$ Tehát

$$\int\frac{1}{x^2+x-2}dx=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{3}\ln(x+2)+c$$

Hasonlóan kaphatjuk meg olyan racionális törtfüggvények határozatlan integrálját, melyek nevezője másodfokú és két valós gyöke van, a számlálóban pedig egy konstans áll. [A két valós gyök esetébe a kettős gyököt is beleértjük.]

2. Keressük meg a $\frac{2x+5}{x^2+x-2}$ függvény határozatlan integrálját a $[2,\infty)$ intervallumon!

Írjuk fel a törtet két tört összegeként:

$$\frac{2x+5}{x^2+x-2}=\frac{2x+5}{(x+2)(x-1)}=\frac{2(x+2)+1}{(x+2)(x-1)}=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x+2)(x-1)}$$

Az előzőekben már láttuk, hogy $\int\frac{1}{(x+2)(x-1)}dx=\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{3}\ln(x+2)+c$ és $\int\frac{2}{(x-1)}dx=2\ln(x-1)+c$. Ebből azt kapjuk, hogy

$$\int\frac{2x+5}{x^2+x-2}dx=2\ln(x-1)+\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{3}\ln(x+2)+c=\frac{7}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{3}\ln(x+2)+c$$

Hasonlóan kaphatjuk meg olyan racionális törtfüggvények határozatlan integrálját, melyek nevezője két valós gyökkel rendelkező másodfokú, a nevezője pedig első fokú polinom. [A két valós gyök esetébe a kettős gyököt is beleértjük.]

3. Keressük meg a $\frac{x+2}{x^2+x+1}$ függvény határozatlan integrálját!

A nevezőnek nincs valós gyöke, ebben az esetben tehát nem működik az előzőekben alkalmazott módszer. Alakítsuk át úgy a törtet, hogy a számlálóban a nevező deriváltja szerepeljen! $\frac{x+2}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1+3}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\ln(x^2+x+1)+c$. Meg kell tehát határozni $\frac{1}{x^2+x+1}$ határozatlan integrálját. Ehhez alakítsuk át a törtet!

$$\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\frac{4}{3}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

Tehát $\int\frac{1}{x^2+x+1}dx=\frac{4}{3}\cdot\int\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx$. Helyettesítsünk $t=\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}$-at, ekkor $\frac{\sqrt{3}}{2}dt=dx$. Ennek eredményeképpen azt kapjuk, hogy

$$\frac{4}{3}\cdot\int\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\int\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}t+c$$

Tehát a végeredmény: $\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\sqrt{3}\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+c$.

Hasonlóan lehet kiszámítani olyan racionális törtfüggvény határozatlan integrálját, melynek nevezőjében olyan másodfokú polinom áll, melynek nincs valós gyöke, és a számláló első vagy másodfokú polinom.

4. Keressük meg az $\frac{e^x-e^{2x}}{1-e^{2x}}$ függvény határozatlan integrálját a $(0,\infty)$ intervallumon!

Helyettesítsünk $t=e^x$-et! Ekkor $x=\ln t$, $dx=\frac{1}{t}dt$.

$$\int\frac{e^x-e^{2x}}{1-e^{2x}}dx=\int\frac{t-t^2}{1-t^2}\cdot\frac{1}{t}dt=\int\frac{t(1-t)}{(1-t)(1+t)}\cdot\frac{1}{t}dt=\int\frac{1}{(1+t)}dt=\ln(1+t)+c=\ln(1+e^x)+c$$

Ha $e^x$ racionális törtfüggvényét kell integrálni, akkor a $t=e^x$ helyettesítés racionális törtfüggvény integrálására vezet.

5. Keressük meg az $\frac{1}{5-4\cos x}$ függvény határozatlan integrálját!

Helyettesítsünk $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$-t. Ekkor $x=2\cdot\mathrm{arctg}\,t$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$. Használjuk még fel, hogy

$$\cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}, \text{ azaz } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\int \frac{1}{5-4\cos x}dx = \int \frac{1}{5-4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{1+9t^2}dt = \frac{2}{3}\mathrm{arctg}\,3t + c = \frac{2}{3}\mathrm{arctg}\left(3\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)+c$$

Abban az esetben, ha az integrálandó kifejezés sin$x$ illetve cos$x$ racionális törtfüggvénye, akkor a $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, $x = 2\cdot\mathrm{arctg}\,t$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ helyettesítés $\cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ és $\cos x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$ figyelembevételével racionális törtfüggvény integrálására vezet.

**Megjegyzés:** Alacsonyabb fokú racionális törtfüggvényre vezető helyettesítés lehetséges abban az esetben, ha sin$x$ illetve cos$x$ racionális törtfüggvényében a számláló és a nevező minden tagjában sin$x$ illetve cos$x$ kitevőjének összege páros, vagy ha minden tagban páratlan. Ekkor a $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}$ és $\sin x = \frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}$ összefüggések felhasználásával az $u = \mathrm{tg}x$, $x = \mathrm{arctg}u$, $dx = \frac{1}{1+u^2}du$ helyettesítéssel szintén racionális törtfüggvény integrálásához jutunk.

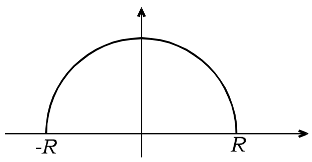
## IV.12. Az integrálszámítás alkalmazásai. Terület- és térfogatszámítás

Korábban már esett szó arról, hogy ha az *f* függvény integrálható az $[a,b]$ intervallumon, akkor az *f* grafikonja, az $x=a$ és $x=b$ egyenesek valamint az $x$ tengely által határolt síkidom területe az $\int_a^b f(x)dx$ határozott integrál értékével adható meg. Ez most bizonyítás nélkül szerepel, mert a területszámítás felépítése nem kapcsolódik szorosan a témánkhoz, de az integrálszámítást fel fogjuk használni különböző alakzatok területének kiszámítására.

Mielőtt azonban rátérnénk erre, tennünk kell egy megjegyzést. Az integrálszámítással kapott terület ún. előjeles terület, mégpedig értéke negatív, ha a síkidom az $x$ tengely alatt, pozitív, ha az $x$ tengely felett helyezkedik el. [Ez a határozott integrál definíciójának segítségével könnyen megmutatható.] Ezek alapján elképzelhető, hogy egy síkidom területére 0-t kapunk, ha azt integrállal számítjuk ki, holott valójában a kérdéses terület nagysága nem 0. [pl. $f(x) = x$ grafikonja, az $x = -1$ és az $x = 1$ egyenesek valamint az $x$ tengely által határolt síkidom területe 1, míg az integrálszámítással kapott terület az előjeles értékek miatt 0.] Ezt tehát a gyakorlati alkalmazások során figyelembe kell vennünk: azt a síkidomot, melynek területét meg akarjuk kapni, olyan részekre kell bontanunk, amelyek teljes egészében az $x$ tengely alatt illetve felett helyezkednek el, majd ezek területének abszolút értékét kell összegezni.

## IV.12.1. A kör területe

Nyilvánvaló, hogy a teljes kört mint függvényt nem tudjuk értelmezni. Számítsuk ki tehát a félkör területét!

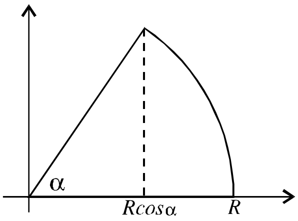



Az $R$ sugarú, origó középpontú félkört az $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ függvény grafikonja és az $x$ tengely határolja. Mivel ez végig az $x$ tengely felett van, ezért a területe $T = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$.

Helyettesítsünk $x = R\sin\varphi$, $dx = R\cos\varphi d\varphi$-t. Ekkor $x$ értéke $-R$-től $R$-ig, $\varphi$ értéke $-\frac{\pi}{2}$-től $\frac{\pi}{2}$-ig változik. Itt $\cos\varphi \geq 0$, tehát

$$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2\sin^2\varphi} \cdot R\cos\varphi d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos^2\varphi d\varphi = R^2 \cdot \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = R^2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

## IV.12.2. Körcikk területe

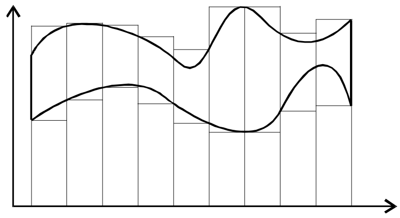



Legyen az $R$ sugarú origó középpontú körcikk középponti szöge $\alpha$. Ekkor a körcikket az $x$ tengely, az $x \cdot \mathrm{tg}\alpha$ $(x \in [0, R\cos\alpha])$ és a $\sqrt{R^2 - x^2}$ $(x \in [R\cos\alpha, R])$ függvények grafikonjai határolják. A körcikk teljes egészében az $x$ tengely felett van, tehát területét a

$T = \int_{0}^{R\cos\alpha} x \cdot \mathrm{tg}\alpha\, dx + \int_{R\cos\alpha}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} dx$ kifejezés adja meg.

Az első integrál egy egyszerű lineáris függvény integrálja, a másodikat pedig lényegében az előző feladatban kiszámítottuk, csupán a határok változtak meg az ottani értékhez képest. A területre az integrálok kiszámításával a $T = \frac{R^2}{4}\sin 2\alpha + R^2\frac{\alpha}{2} - \frac{R^2}{4}\sin 2\alpha = R^2\frac{\alpha}{2}$ értéket kapjuk.

## IV.12.3. Két integrálható függvény grafikonja közti síkidom területe



Legyenek $f$ és $g$ az $[a,b]$ intervallumon integrálható függvények, és legyen $[a,b]$ minden pontjában $f(x) \ge g(x) \ge 0$. Határozzuk meg az $x = a$ és $x = b$ egyenesek valamint a két függvény grafikonja által határolt S síkidom területét!

Legyen $\Phi$ az $[a,b]$ intervallum tetszőleges felosztása! Jelölje $s_\Phi(f)$ és $S_\Phi(f)$ az $f$-hez tartozó alsó illetve felső közelítő összegeket, hasonlóan ehhez $s_\Phi(g)$ és $S_\Phi(g)$ jelölje $g$-re vonatkozóan ugyanezeket a mennyiségeket! Nyilvánvaló, hogy ha képezzük az $S_\Phi(f) - s_\Phi(g)$ különbséget, akkor ez a kiszámítani kívánt területnél nem kisebb, hiszen ez a különbség olyan téglalapok területének összegét jelenti, melyek lefedik az S síkidomot [ez az ábráról leolvasható]. Tehát, ha a kiszámítandó területet $T$-vel jelöljük, akkor $T \le S_\Phi(f) - s_\Phi(g)$. Hasonlóan kapjuk, hogy $s_\Phi(f) - S_\Phi(g) \le T$ , hiszen az $s_\Phi(f) - S_\Phi(g)$ különbség olyan téglalapok összegét jelenti, melyek egymásba nem nyúlóak, és az S síkidom belsejében vannak.

Tehát az $[a,b]$ intervallum tetszőleges $\Phi$ felosztása esetén $s_\Phi(f) - S_\Phi(g)T \le S_\Phi(f) - s_\Phi(g)$. Legyen a $(\Phi_n)$ az $[a,b]$ intervallum felosztásainak egy végtelenül finomodó sorozata. Ennek minden tagjára fennáll az $s_{\Phi_n}(f) - S_{\Phi_n}(g)T \le S_{\Phi_n}(f) - s_{\Phi_n}(g)$ egyenlőtlenség. Figyelembe véve, hogy $\lim_{n\to\infty} s_{\Phi_n}(f) = \lim_{n\to\infty} S_{\Phi_n}(f) = \int_a^b f(x)dx$ és $\lim_{n\to\infty} s_{\Phi_n}(g) = \lim_{n\to\infty} S_{\Phi_n}(g) = \int_a^b g(x)dx$ azt kapjuk, hogy $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \le T \le \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$. Mivel az egyenlőtlenség két szélén álló szám megegyezik, ezért mindenütt egyenlőség van, azaz

$$T = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f-g)(x)dx$$

## IV.12.4. Forgástest térfogata

A térfogatszámítás esetén hasonló módszert alkalmazhatunk, mint az előző pontban tettük. A testek térfogatának meghatározásához a testbe illetve a test köré már ismert térfogatú alakzatokat rajzolunk, ezek térfogatának segítségével a keresett térfogatot alulról illetve felülről becsüljük. Ismertnek vesszük a kocka, a sokszögalapú egyenes hasáb illetve a henger térfogatát: ezek az integrálszámítás ismeretei nélkül is, a sorozatok és a határérték-számítás segítségével is meghatározhatóak illetve definiálhatóak.

**Def.** Legyen $f(x) \geq 0$ és folytonos az $[a,b]$ intervallumon. Forgástestnek nevezzük az $A = \{(x,y,z) \mid a \leq x \leq b, y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$ ponthalmazt.

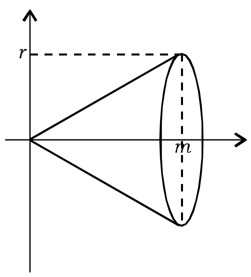
**Megjegyzés:** A definíció szemléletesen azt jelenti, hogy ha az *f* függvény grafikonját az *x* tengely körül megforgatjuk, akkor ez egy felületet ír le; e felület illetve az $x = a$ és $x = b$ egyenletű síkok által közrefogott térrészt nevezzük forgástestnek.

Számítsuk ki a fenti módon definiált forgástest térfogatát!

Vegyük az $[a,b]$ intervallum egy $\Phi : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ felosztását. Mivel *f* folyt $[a,b]$-n, ezért minden $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon létezik maximuma illetve minimuma, ezeket jelölje rendre $M_i$ illetve $m_i$. Ha tekintjük az $x = x_i$ egyenletű síkokat, akkor ezek a forgástestet $x_i - x_{i-1}$ vastagságú „szeletekre" vágják fel. Egy-egy ilyen „szelet" $\Delta V_i$ térfogatát felülről tudjuk becsülni egy őt tartalmazó $x_i - x_{i-1}$ magasságú, $M_i$ alapkör-sugarú henger térfogatával, alulról tudjuk becsülni egy $x_i - x_{i-1}$ magasságú, $m_i$ alapkör-sugarú, a „szelet" által tartalmazott henger térfogatával. Ezeket figyelembe véve a $\Delta V_i$ térfogatra a $m_i^2\pi(x_i - x_{i-1}) \leq \Delta V_i \leq M_i^2\pi(x_i - x_{i-1})$ alsó illetve felső becslést, a forgástest $\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = V$ térfogatára a $\sum_{i=1}^{n} m_i^2\pi(x_i - x_{i-1}) \leq V \leq \sum_{i=1}^{n} M_i^2\pi(x_i - x_{i-1})$ alsó illetve felső becslést kapjuk. Mivel *f* folytonos $[a,b]$-n, ezért $f^2$ is folytonos $[a,b]$-n, tehát itt integrálható. Másrészt $f(x) \geq 0$ miatt igaz, hogy az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon $f^2$ maximuma illetve minimuma megegyezik *f* maximumának illetve minimumának négyzetével, azaz $M_i^2$-tel illetve $m_i^2$-tel. Ekkor a *V*-re kapott alsó illetve felső becslés éppen az $f^2 \cdot \pi$ függvény $\Phi$ felosztáshoz tartozó alsó illetve felső közelítő összege. Mivel a becslés igaz minden $\Phi$ felosztásra és $f^2 \cdot \pi$ integrálható, csak egy olyan szám van, amely megfelelő, tehát $V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)dx$.

**Megjegyzés:** A forgástest térfogatát szemléleten alapuló okoskodással kaptuk meg. A középiskolában ez elfogadható gondolatmenet, noha matematikailag nem teljesen precíz. Itt az integrálszámítás egy alkalmazását láttuk, melynek célja a megszerzett ismeretek felhasználása bizonyos célokra, ebben a szemlélet segítségünkre volt. A továbbiakban többször fogjuk alkalmazni ezt a módszert testek térfogatának kiszámítására.

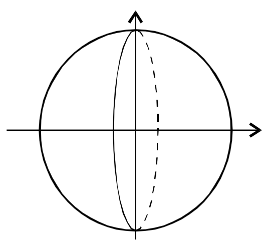
## IV.12.5. Az egyenes körkúp térfogata




Az $r$ alapkör-sugarú, $m$ magasságú egyenes körkúp olyan forgástest, mely az $f(x) = \frac{r}{m}x$ függvény $[0, m]$ intervallumon vett grafikonjának $x$ tengely körüli megforgatásával keletkezik. Ennek megfelelően a térfogatát a $V = \pi \cdot \int_0^m \left(\frac{r}{m}x\right)^2 dx$ kifejezés értéke adja meg.

$$V = \pi \cdot \int_0^m \left(\frac{r}{m}x\right)^2 dx = \pi\frac{r^2}{m^2} \cdot \int_0^m x^2 dx = \pi\frac{r^2}{m^2} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^m = \pi\frac{r^2}{m^2} \cdot \frac{m^3}{3} = \frac{r^2\pi m}{3}$$

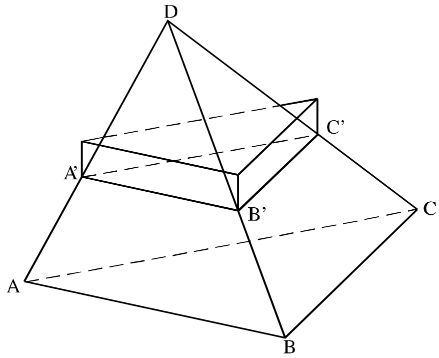
## IV.12.6. A gömb térfogata



Az $R$ sugarú gömb olyan forgástest, mely az $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ függvény $[-R, R]$ intervallumon vett grafikonjának [félkör] $x$ tengely körüli megforgatásával keletkezik. A térfogata:

$$V = \pi \cdot \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx = \pi \cdot \left[R^2 x - \frac{x^3}{R}\right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}R^3\pi$$

## IV.12.7. A gúla térfogata




Állapítsuk meg először egy háromoldalú gúla (tetraéder) térfogatát!

Legyen a gúla alaplapja az $ABC$ háromszög, csúcsa a $D$ pont. Vegyük a gúlának az alaplappal párhuzamos, $D$-től $x$ távolságban levő síkmetszetét. Ez a metszet egy háromszög, amely hasonló az alaplaphoz, a hasonlóság aránya $\frac{x}{m}$, ahol $m$ a gúla $ABC$ alaplaphoz tartozó magassága [ezt a keletkező és az eredeti tetraéder hasonlóságából kapjuk]. Ha a metszetháromszög területét $t(x)$-szel, az alaplap területét $t$-vel jelöljük, akkor $t(x) = t \cdot \left(\frac{x}{m}\right)^2 = t \cdot \frac{x^2}{m^2}$.

Osszuk most fel a gúla magasságát $n$ részre az $X_0 = D, X_1, X_2, \ldots, X_n$ pontokkal [jelölje az $X_iD$ távolságot $x_i$], és tekintsük a gúla ezen osztópontokon átmenő, alaplappal párhuzamos síkmetszeteit. Ezek a síkmetszetek „szeletekre" vágják a gúlát, melyek magassága $x_i - x_{i-1}$. Egy ilyen „szelet" térfogatát felülről becsülhetjük az alaplapjára felfelé állított $x_i - x_{i-1}$ magasságú hasáb térfogatával, mely hasáb tartalmazza a gúla adott szeletét [azért van ilyen, mert a gúla „felfelé keskenyedő"; ez a hasáb a gúlától függően lehet egyenes vagy ferde hasáb]. Ennek a hasábnak a térfogata $t(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$, tehát a gúla térfogatát a $\sum_{i=1}^{n} t(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$ összeggel becsülhetjük felülről. Ehhez hasonlóan egy „szelet" térfogatát a fedőlapjára lefelé állított, a „szelet" belsejében levő egyenes vagy ferde hasáb térfogatával tudjuk alulról becsülni. Ennek megfelelően a gúla térfogatára alsó becslést ad a $\sum_{i=1}^{n} t(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1})$ összeg. Azaz a gúla V térfogatára a

$$\sum_{i=1}^{n} t(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) \le V \le \sum_{i=1}^{n} t(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

egyenlőtlenséget kapjuk, tetszőleges $X_0 = D, X_1, X_2, \ldots, X_\mathrm{n}$ osztópontok esetén, tetszőleges $n$-re. Figyelembe véve, hogy a $t(x) = t \cdot \frac{x^2}{m^2}$ függvény szigorúan monoton nő és integrálható a $[0, m]$ intervallumon, a gúla térfogatára adott alsó illetve felső becslések éppen a $t(x) = t \cdot \frac{x^2}{m^2}$ alsó illetve felső integrálközelítő összegei a $[0, m]$ intervallumon. Mivel csak egy olyan szám van, amely az alsó illetve felső közelítő összegek közé esik, és ez a határozott integrál, ezért

$$V = \int_0^m t(x)dx = \int_0^m t \cdot \frac{x^2}{m^2} dx = \frac{t}{m^2} \cdot \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^m = \frac{1}{3} t \cdot m$$

Ehhez hasonlóan közvetlenül kiszámíthatjuk tetszőleges sokszög alapú gúla térfogatát, de a háromszög alapú gúla térfogatának ismeretében egyszerűbb módon, a sokszög alapú gúlákat háromszög alapú gúlákra darabolva is megadható a térfogatuk.

## IV.13. Az integrálszámítás alkalmazásai. Alakzatok tömegközéppontja

### IV.13.1. Rúd tömegközéppontja

Ha adottak az $x$ tengelyen az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontokban az $m_1, m_2, \ldots, m_n$ tömegpontok, akkor ezek tömegközéppontjának koordinátáját az $x_{tkp} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$ kifejezéssel adhatjuk meg. Mi a helyzet azonban akkor, ha nem tömegpontokról, hanem egy folytonos tömegeloszlású, $l$ hosszúságú rúdról van szó? Legyen a rúd sűrűségfüggvénye $f(x)$ [$f$ folytonos és pozitív a $[0, l]$ intervallumon]. Osszuk fel a „rudat" [azaz a $[0, l]$ intervallumot] $n$ részre az $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = l$ osztópontokkal. A rúd $i$-edik intervallumba eső darabjának tömege $m_i = f(\alpha_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$, ahol $\alpha_i$ valamely $x_{i-1}$ és $x_i$ közé eső szám. A tömegpontrendszer tömegközéppontjának definíciója értelmében a rúd tömegközéppontja [az $m_i$ tömegeket az $\alpha_i$ pontokba helyezve]:

$$x_{tkp} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f(\alpha_i) \cdot (x_i - x_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) \cdot (x_i - x_{i-1})}$$

Mivel $f$ folytonos, ezért a számlálóban az $x \cdot f(x)$-nek, a nevezőben az $f(x)$-nek a $[0, l]$ intervallum egy felosztásához tartozó integrálközelítő összegét találjuk. A rúd illetve a $[0, l]$ intervallum felosztását finomítva a két közelítő összeg eltérése az integráltól egyre kisebb. Tehát a rúd tömegközéppontját az $x_{\text{tkp}} = \frac{\int_0^l x \cdot f(x)dx}{\int_0^l f(x)dx}$ kifejezéssel adhatjuk meg, ahol *l* a rúd hossza, $f(x)$ a rúd sűrűségfüggvénye.

**Példa:**

Számítsuk ki a homogén anyageloszlású rúd tömegközéppontjának koordinátáját!

**Megoldás:**

Az, hogy a rúd homogén eloszlású, annyit jelent, hogy sűrűsége állandó, $f(x) = c$. Ekkor a tömegközéppont koordinátája: $x_{\text{tkp}} = \frac{\int_0^l cxdx}{\int_0^l cdx} = \frac{\frac{l^2}{2}}{l} = \frac{l}{2}$. [Ez persze várható volt, hiszen a rúd szimmetrikus a felezőpontjára.]

## IV.13.2. Síkidom tömegközéppontja

Legyen adva egy *f* függvény, mely az $[a,b]$ intervallumon értelmezett, itt folytonos és pozitív függvény. Határozzuk meg a függvény grafikonja, az $x = a$ és $x = b$ egyenesek valamint az *x* tengely által határolt síkidom tömegközéppontját! [A rúd tömegközéppontjával ellentétben itt most az egyenletes tömegeloszlás esetére számítjuk ki a tömegközéppont koordinátáit.] Vegyük az $[a,b]$ intervallum egy $\Phi : x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ felosztását és legyen $\alpha_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$. Tekintsük az $[x_i - x_{i-1}]$ intervallumokra rajzolt $f(\alpha_i)$ magasságú téglalapokat. Ezek tömegközéppontjainak koordinátái [a homogenitás és a szimmetria miatt] $\left(\alpha_i, \frac{1}{2} f(\alpha_i)\right)$. A tömegközéppontról belátható, hogy ha egy alakzatot több alakzatra bontunk, akkor az egyes részek tömegeit a tömegközéppontjukba összevonva az így kapott tömegpontrendszer tömegközéppontja megegyezik az eredeti alakzat tömegközéppontjával. A tömegközéppont ezen tulajdonságát kihasználva az említett téglalaprendszer tömegközéppontjának koordinátáit az

$$x_{\text{tkp}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f(\alpha_i) \cdot (x_i - x_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) \cdot (x_i - x_{i-1})}, \quad y_{\text{tkp}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f(\alpha_i) \cdot f(\alpha_i) \cdot (x_i - x_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) \cdot (x_i - x_{i-1})}$$

kifejezésekkel adhatjuk meg. [Az egyes részek tömege, mivel a sűrűségük mindenütt ugyanannyi, a területükkel arányos.] A számlálókban az $x \cdot f(x)$ és az $\frac{1}{2} f^2(x)$ integrálközelítő összegei szerepelnek. Ha a felosztást finomítjuk, akkor a közelítő összegekkel kiszámított súlypont értelemszerűen egyre jobban megközelíti a síkidom súlypontját, ennek koordinátáit tehát az

$$x_{\text{tkp}} = \frac{\int_a^b x \cdot f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}, \quad y_{\text{tkp}} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

kifejezésekkel adhatjuk meg.

**Példa:**

Határozzuk meg az $f(x) = 1 - x$ függvény grafikonja és a koordinátatengelyek által határolt háromszög tömegközéppontját!

$$x_{\text{tkp}} = \frac{\int_0^1 x \cdot f(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx} = \frac{\int_0^1 x(1-x)dx}{\int_0^1 (1-x)dx} = \frac{\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1}{\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1} = \frac{1}{3}$$

$$y_{\text{tkp}} = \frac{\int_0^1 \frac{1}{2} f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx} = \frac{\int_0^1 \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1)dx}{\int_0^1 (1-x)dx} = \frac{\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^1}{\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1} = \frac{1}{3}$$

## IV.14. Az integrálszámítás egyéb alkalmazásai

### IV.14.1. Munkavégzés kiszámítása

Legyen egy vízszintesen mozgó testre ható erő $F(x)$ a kiindulási ponttól $x$ távolságban, és legyen $F$ folytonos! Számítsuk ki, hogy a kiindulóponttól $a$ illetve $b$ távolságra levő pontok között mekkora az $F$ erő által végzett munka!

Az $a$ és $b$ közti távolságot [az $x$ tengelyen az $[a,b]$ intervallumot] osszuk fel $x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ osztópontok segítségével. Az $[x_i - x_{i-1}]$ intervallumon végzett $\Delta W_i$ munka az $F$ függvény $[x_i - x_{i-1}]$ intervallumon felvett maximális illetve minimális értékével [ $\min_i F$ illetve $\max_i F$ ] becsülhető:

$$\min_i F \cdot (x_i - x_{i-1}) \le \Delta W_i \le \max_i F \cdot (x_i - x_{i-1})$$

[A $\Delta W_i$ munka nagyobb vagy egyenlő, mint az $x_i - x_{i-1}$ úton $\min_i F$ nagyságú erő által végzett munka, de kisebb vagy egyenlő, mint a $\max_i F$ által végzett munka.]

A teljes W munkavégzésre a $\sum_{i=1}^{n} \min_i F \cdot (x_i - x_{i-1}) \le W \le \sum_{i=1}^{n} \max_i F \cdot (x_i - x_{i-1})$ becslés adható. Mivel a bal- illetve jobboldalon $F$ alsó illetve felső integrálközelítő összege áll, így a korábban már alkalmazott gondolatmenet értelmében $W = \int_a^b F(x)dx$.

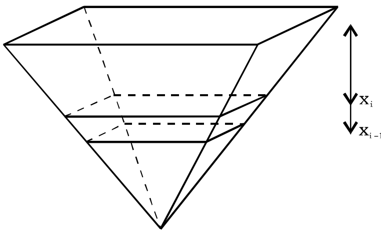
**Példa:**

Számítsuk ki, mekkora munkát végzünk, ha egy 10 m hosszú súlyos kötelet egyenletesen felhúzunk a kútból! [A kötél méterenkénti tömege 3 kg.]

**Megoldás:**

Az általunk kifejtett erő az egyenletes mozgás miatt mindig megegyezik a kútba lógó köteldarab súlyával. Ha ez $x$ hosszúságú [méterben mérve], akkor a súlya [ $g = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ figyelembevételével] $30x$. Tehát a végzett munka: $W = \int_0^{10} 30x dx = \left[15x^2\right]_0^{10} = 1500$ J

A munkavégzésre más feladatot is adhatunk. Számítsuk ki például, hogy mekkora munkát kell végeznünk, hogy kiszivattyúzzunk egy csúcsán álló négyzet alapú gúla alakú víztartályt, melynek alap- és oldaléle egyaránt 1 m hosszú!




Tegyük be a gúlát egy koordinátarendszerbe, melynek origója a gúla alaplapjának középpontja, az $x$ tengely a gúla alaphoz tartozó magasságának egyenesével esik egybe, és pozitív iránya lefelé mutat! A gúla magassága legyen $m$. Osszuk fel a gúla magasságát – a $[0, m]$ intervallumot – $n$ részre az $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = m$ pontokkal. Vegyük a gúla alaplappal párhuzamos síkmetszeteit ezeken a pontokon át, ezek „szeletekre" vágják a gúlát. Számítsuk ki, hogy egy ilyen „szelet" kiemeléséhez mekkora munkát kell végezni!

A „szelet" $\Delta V_i$ térfogata a már korábban szerepelt módon a

$$t_a \cdot \frac{(m - x_i)^2}{m^2} \cdot (x_i - x_{i-1}) \le \Delta V_i \le t_a \cdot \frac{(m - x_{i-1})^2}{m^2} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

egyenlőtlenséggel becsülhető [$t_a$ a gúla alapterülete, $t_a = a^2$]. A $\Delta V_i$ térfogat $\rho \Delta V_i$ tömeget jelent, amelyet valamely $x_i$ és $x_{i-1}$ közé eső távolságra kell felemelni. Tehát a $\rho\Delta V_i$ tömegű „szelet" kiszivattyúzásához szükséges $\Delta W_i$ munkára teljesül a

$$\rho \Delta V_i x_{i-1} g \le \Delta W_i \le \rho \Delta V_i x_i g$$

egyenlőtlenség. Ha figyelembe vesszük a $\Delta V_i$ alsó illetve felső becslését, akkor a

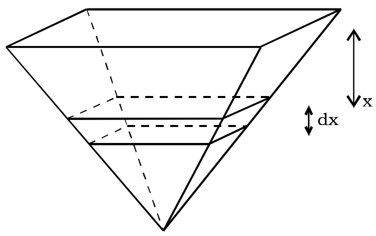
$$\rho g t_a \cdot \frac{(m - x_i)^2}{m^2} \cdot x_{i-1} \cdot (x_i - x_{i-1}) \le \Delta W_i \le \rho g t_a \cdot \frac{(m - x_{i-1})^2}{m^2} \cdot x_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

becslést kapjuk, ezt összegezve a $\Delta V_i$ térfogatokra illetve $\Delta W_i$ munkákra, a teljes munka:

$$\frac{\rho g t_a}{m^2} \sum_{i=1}^{n} (m - x_i)^2 \cdot x_{i-1} \cdot (x_i - x_{i-1}) \le W \le \frac{\rho g t_a}{m^2} \sum_{i=1}^{n} (m - x_{i-1})^2 \cdot x_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

A baloldali kifejezés az $f(x) = \frac{\rho g t_a}{m^2} x(m - x)^2$ függvény alsó, a jobboldali kifejezés ugyanezen függvény felső integrálközelítő összege. A korábban mondottak értelmében tehát $W = \int_0^m \frac{\rho g t_a}{m^2} x(m - x)^2 = \frac{\rho g t_a}{m^2} \cdot \left[ \frac{1}{2} m^2 x^2 - \frac{2}{3} m x^3 + \frac{1}{4} x^4 \right]_0^m = \frac{\rho g t_a m^2}{12}$. Kiszámítható, hogy $m = \frac{\sqrt{2}}{2} a$, ennek felhasználásával $W = \frac{\rho g a^4}{24}$.

**Megjegyzés:** Korábban már esett szó „fizikus módszerek”-ről, így itt is megemlíthetünk egy technikailag egyszerűbb számítási módot. A fentiekből látható volt, hogy a viszonylagos matematikai pontosságra való törekvésünk bonyolítja a becsléseket illetve összegzéseket. A „fizikus gondolatmenet” a fenti feladat megoldására a következő:




Vegyünk az alaplaptól $x$ távolságban egy $dx$ vastagságú [$dx$ „végtelenül kicsiny mennyiség”] réteget. Ennek térfogata $t(x)\cdot dx$ [$t(x)=t_a\dfrac{(m-x)^2}{m^2}$, ahogy azt már az előzőekben láttuk], a felemeléséhez szükséges ún. elemi munkavégzés $dW=t(x)\cdot dx\cdot\rho\cdot g\cdot x$ [$x$ magasságba kell felemelni a $t(x)\cdot dx\cdot\rho$ nagyságú tömeggel rendelkező réteget]. Tehát $dW=t_a\dfrac{(m-x)^2}{m^2}\rho gx\cdot dx$. Mindkét oldalt összegezve [integrálva] a $W=\int_0^m t_a\dfrac{(m-x)^2}{m^2}\rho gxdx$ összefüggést kapjuk, melynek értékét a fentiekben már kiszámítottuk. Ez a módszer láthatóan egyszerűbben hozza ki a helyes eredményt, azonban van benne egy-két olyan gondolati ugrás, amely a szigorúan vett matematikai értékét csökkenti.

## IV.14.2. A radioaktív bomlás

Állapítsuk meg, hogy ha a $t=0$ időpillanatban $m(0)$ tömegű radioaktív anyag áll rendelkezésünkre, akkor $t$ idő elteltével hogyan változik ennek tömege!

Tudjuk, hogy a radioaktív anyagok tömegének változási sebessége [a bomlás mértéke] arányos az anyag tömegével [mivel a bomlás véletlenszerűen vagy bekövetkezik vagy nem; így a másodpercenkénti bomlások száma arányos a részecskék számával, azaz a tömeggel is]. Ezt megállapítva felírhatjuk, hogy $m'(t)=\dfrac{dm(t)}{dt}=c\cdot m(t)$, $c$ konstans, arányossági tényező [$c<0$, mert a tömeg csökken]. Ha $m(t)$-t akarjuk meghatározni, akkor esetleg mindkét oldalt integrálhatjuk. Ekkor $m'(t)$ integrálja $m(t)$-t adja, de a másik oldalon $m(t)$ integrálja jelenik meg. Ez tehát nem tűnik célravezető megoldásnak. Helyette inkább tegyük a következőt:

Osszuk le mindkét oldalt $m(t)$-vel, és utána integráljunk: $\int_0^T\dfrac{m'(t)}{m(t)}dt=\int_0^T cdt$. Felhasználva, hogy

$\frac{m'(t)}{m(t)}$ primitív függvénye $\ln m(t)+c$, azt kapjuk, hogy $\ln m(T)-\ln m(0)=cT$, ahonnan átalakítással az $m(T)=m(0)\cdot e^{\mathrm{cT}}$ egyenlőséghez jutunk.

**Megjegyzés:** Az $\frac{m'(t)}{m(t)}=c$ egyenlet a differenciálegyenletek legegyszerűbb fajtája, most tehát erre találtunk megoldást. Hasonló egyenlet írja le a meleg tárgyak hűlését illetve külső korlátozó tényezőktől mentes populációk szaporodását [pl. baktériumtenyészet] is.

## IV.15. Az improprius integrál

Vannak olyan esetek, amikor valamely fizikai mennyiség összegzését pl. minden 1-nél nagyobb értékre szeretnénk elkészíteni. Az eddigiekben erre nem nyílt mód, hiszen az integrál értékét csak valamely $[a,b]$ intervallumon számítottuk ki, és a most felvetett probléma valamely $a$-ra az $[a,\infty)$ intervallumon való integrálást jelentene. Mód van arra azonban, hogy ilyen típusú integrálokat is meghatározzunk.

**Def.** Az *f* függvényt az $[a,\infty)$ intervallumon impropriusan integrálhatónak nevezzük, ha minden $x>a$ számra *f* integrálható az $[a,x]$ intervallumon, és a $\lim\limits_{x\to\infty}\int_a^x f(t)dt$ határérték létezik és véges. Ekkor ezt a határértéket az *f* függvény $[a,\infty)$ intervallumon vett improprius integráljának nevezzük, és $\int_a^\infty f(t)dt$ -vel jelöljük.

Hasonlóan definiálható a $(-\infty,a]$ intervallumon vett improprius integrál.

**Példa:**

Legyen $f(t)=\frac{1}{t^2}$. Impropriusan integrálható-e az $[1,\infty)$ intervallumon?

Minden $x>1$ esetén *f* integrálható az $[1,x]$ intervallumon, mert folytonos.

$$\lim_{x\to\infty}\int_a^x\frac{1}{t^2}dt=\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{1}{t}\right]_1^x=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}+1\right)=1$$

Tehát *f* impropriusan integrálható az $[1,\infty)$ intervallumon és improprius integrálja 1.

2. Legyen $f(t)=\frac{1}{t}$. Impropriusan integrálható-e az $[1,\infty)$ intervallumon?

Minden $x>1$ esetén *f* integrálható az $[1,x]$ intervallumon, mert folytonos.

$$\lim_{x\to\infty}\int_a^x \frac{1}{t}\,dt=\lim_{x\to\infty}[\ln t]_1^x=\lim_{x\to\infty}(\ln x)=\infty$$

Mivel a fenti határérték nem véges, ezért *f* impropriusan nem integrálható az $[1,\infty)$ intervallumon.

Az improprius integrál fogalmának segítségével ilyen értelemben integrálhatunk a $(-\infty,\infty)$ intervallumon is:

**Def.** Az *f* impropriusan integrálható a $(-\infty,\infty)$ intervallumon, ha értelmezve van **R**-en, minden $[a,b]$ intervallumon integrálható, és léteznek az $\int_0^\infty f(t)dt$ illetve $\int_{-\infty}^0 f(t)dt$ improprius integrálok. Az *f* $(-\infty,\infty)$ intervallumon vett improprius integrálja a két említett improprius integrál összege, jelölése: $\int_{-\infty}^\infty f(t)dt$.

**Megjegyzés:** A definícióban a 0 helyett bármelyik másik valós szám szerepelhet.

Eddig a függvények integrálját azért nem tudtuk értelmezni valamely $[a,\infty)$ intervallumon, mert a függvény úgymond nem volt értelmezve a $+\infty$-ben; azonban a határérték segítségével valamiféleképpen integrálhatóvá tettünk bizonyos függvényeket. Ugyanezt – a korábbiakkal analóg módon – megtehetjük akkor is, ha valamely *a* pontban a függvény nincs értelmezve.

**Def:** Legyen $f:(a,b]\to\mathbf{R}$ függvény. Az *f* függvényt impropriusan integrálhatónak nevezzük az $(a,b]$ intervallumon, ha *f* minden $\varepsilon>0$ esetén integrálható az $[a+\varepsilon,b]$ intervallumon, és létezik a $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(t)dt$ véges határérték. Jelölése: $\int_a^b f(t)dt$.

Hasonlóan definiálható az *f* függvény $[a,b)$ intervallumon vett improprius integrálja.

**Megjegyzés:** Korábban már szerepelt olyan tétel, hogy ha *f* $[a,b]$-n értelmezett, korlátos függvény és minden $\varepsilon>0$ esetén az $[a+\varepsilon,b]$ intervallumon integrálható, akkor az $[a,b]$ intervallumon is integrálható. A mostani definíciónk ennél többet mond, hiszen nem követeltük meg azt, hogy a függvény *a*-ban is értelmezve legyen, valamint azt sem, hogy korlátos legyen az $(a,b]$-n illetve $[a,b)$-n. Bizonyos értelemben véve tehát a korábbi tételünk általánosítása az improprius integrál definíciója.

**Példa:**

1. Impropriusan integrálható-e a $(0,1]$ intervallumon az $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ függvény?

Az *f* függvény minden $1>\varepsilon>0$ számra az $[\varepsilon,1]$ intervallumon integrálható, mert itt folytonos.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right)=2$$

Tehát az *f* függvény impropriusan integrálható a $(0,1]$ intervallumon, és improprius integráljának értéke 2.

2. Impropriusan integrálható-e a $(0,1]$ intervallumon az $f(x)=\dfrac{1}{x}$ függvény?

Az *f* függvény minden $1>\varepsilon>0$ számra az $[\varepsilon,1]$ intervallumon integrálható, mert itt folytonos.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln x\right]_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\ln\varepsilon\right)=+\infty$$

Tehát az *f* függvény nem integrálható impropriusan a $(0,1]$ intervallumon.

Az improprius integrálokat jellemzően a fizikai számításokban [pl. potenciál kiszámítása] illetve a valószínűségszámításban lehet felhasználni. Érdekes alkalmazása még a végtelen sorok konvergenciájával való összefüggésének felhasználása.