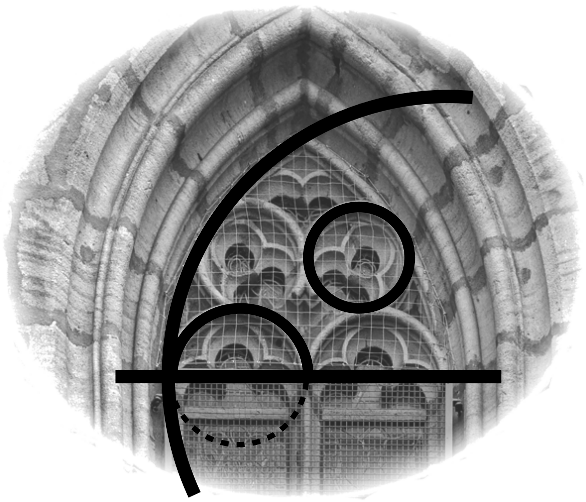
Magyar Eszter, Szoldatics József

Pitagorasz gótikus ablakai



Magyar Eszter
(meszter@apaczai.elte.hu)
ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégium

Szoldatics József
(szolda@fazekas.hu)
Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium

2020. augusztus 31.

Tartalomjegyzék

1. Előszó

A feladatok eredete a történelem ködébe vész el: egyszer csak előbukkant egy papírlap, ábrákkal, melyeken érintkező körök, körívek, szakaszok voltak és ki kellett számolni őket. A kezdeti gyűjtemény bővült az idők során, de nagyon rendezetlen volt.

A használat során praktikusnak tűnt a feladatlap, úgyhogy elhatároztuk, a feladatoknak adunk valami szép keretet, leírjuk a megoldásokat és a gyűjteményt is áttekinthetően. Reméltük, ha elkészítjük e tervünknek megfelelő anyagot, akkor más is jól fogja tudni használni.

A feladatokat zömmel Pitagorasz tételével oldottuk meg, de ahol láttuk, ott adtunk rá további megoldásokat is. Sok esetben még inverzió felhasználásával is tudtunk megoldást adni, ami helyenként hosszabb megoldást eredményezett, de az inverzió tanítása esetén használható.

A feladatokat főként 9. osztálytól érdemes feladni. Megjelöltük őket nehézség szerint a feladat sorszáma után. Erről bővebben a következő fejezetben írunk.

Várhatóan tovább is szeretnénk bővíteni e gyűjteményt. Ha a kedves olvasók közül valaki lát egy új, vagy épp egy meglévő feladatnak megfelelő ablakot, szívesen vesszük, ha elküldi nekünk a képet vagy az ötletet.

Ennek az anyagnak a legfrissebb verziója letölthető a „Matematika Oktatási Portál” (matek.fazekas.hu) honlapról az „Oktatási anyagok / Cikkek” helyről.

Bízunk benne, hogy sokan fogják használni ezt az anyagot!

Budapest, 2020. augusztus 31.

Magyar Eszter, Szoldatics József

2. A feladatokról, jelölésekről

A feladatok nehézségének a jelölésére a következőket alkalmaztuk:

9 **Könnyű feladat**: Kilencedikben már jól megoldható feladat: elsőfokú egyenletre vezet, azonosságokkal és Pitagorasz-tétellel könnyebben megoldható.

10 **Közepes feladat**: Tizedik osztályba szánt feladat, például másodfokú egyenletre vezet, vagy két egyenletes másodfokú egyenletrendszerre.

10+ **Nehéz feladat**: Tizedik osztályban megoldható feladat, de vagy nehéz gondolatot, vagy nehéz rendezési lépéseket tartalmaz, például három ismeretlenes másodfokú egyenletrendszert.

11+ **Még nehezebb feladat**: Tizedik osztályba már nem szánt feladat, vagy nagyon nehéz gondolatot, vagy nem 10. osztályos megoldási eszközt tartalmaz (például deriválást, trigonometriát).

Természetesen ez a besorolás szubjektív, mint ahogyan a feladatok sorrendje is.

Az alábbi táblázatban összegyűjtöttük, hogy az egyes feladatokra milyen módszerek segítségével adtunk megoldást. Bár lehetett volna, de nem alkalmaztunk koordináta-geometriai módszereket.

P = Pitagorasz tételes, akár több módszerrel is
É = Érintkező körös
T = Trigonometrikus, amikor szögfüggvényt kell használni
I = Inverziós, amikor az ábra invertált képét használjuk

Fel.	**P**	**É**	**T**	**I**
1.	2		1	
2.	3			1
3.	1			
4.	2		1	
5.	1	1		1
6.	1			1
7.	1	1		
8.	1			
9.	1			1
10.	1			
11.	1			
12.	1			1
13.	1			1

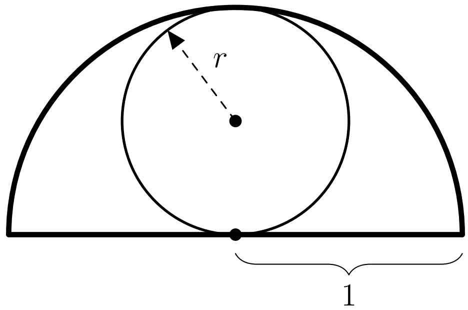
Fel.	**P**	**É**	**T**	**I**
14.	2		1	
15.	1			1
16.	1			
17.	1			
18.	1			
19.	1			
20.	1			
21.	1			
22.	1			
23.	1			
24.	1			1
25.	1			1
26.	1			1

Fel.	**P**	**É**	**T**	**I**
27.	1			
28.	1	1	1	
29.	3		1	
30.	1		1	
31.			1	
32.	1			
33.	1			
34.	1			2
35.	1			1
36.	1			1
37.	1			1

3. Feladatok

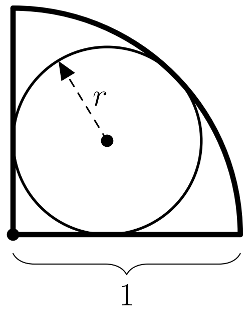
1. feladat (9)

Adott egy egység sugarú félkörcikk. Mekkora annak a körnek a legnagyobb r sugara, amelyik érinti az átmérőt és a körvonalat?



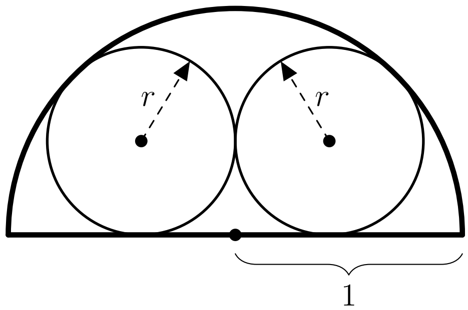
2. feladat (10)

Egy egység sugarú negyedkörcikkbe megrajzolunk egy r sugarú kört, ami érinti a negyedkörívet, és a körcikk sugarait az ábra szerint. Mekkora a kör r sugara?



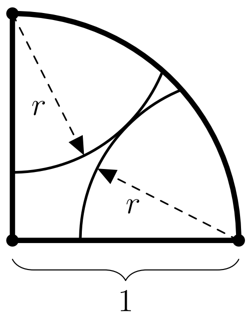
3. feladat (9)

Adott egység sugarú félkör. A félkörbe beírunk két r sugarú kört úgy, hogy azok egymást és a félkört is érintsék az ábra szerint. Mekkora az r sugár értéke?



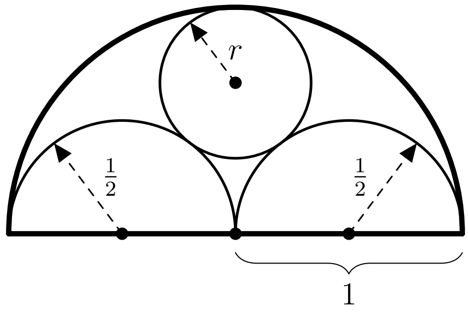
4. feladat (9)

Egy egység sugarú negyedkörbe megrajzolunk két r sugarú egymást érintő körívet az ábra szerint. Mekkora a körív r sugara?



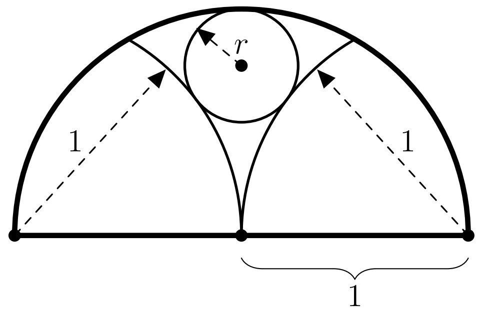
5. feladat (9)

Egy egység sugarú félkörbe megrajzolunk két $\frac{1}{2}$ sugarú félkört az ábra szerint. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a három körívet?



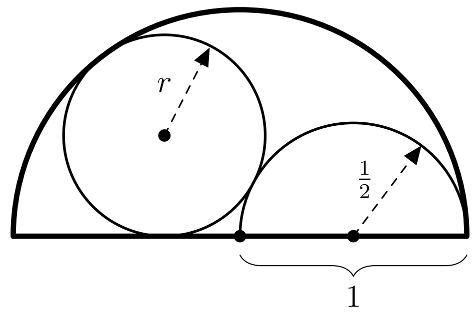
6. feladat (9)

Egy egység sugarú félkörbe megrajzolunk két, egység sugarú körívet az ábra szerint. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a három körívet?



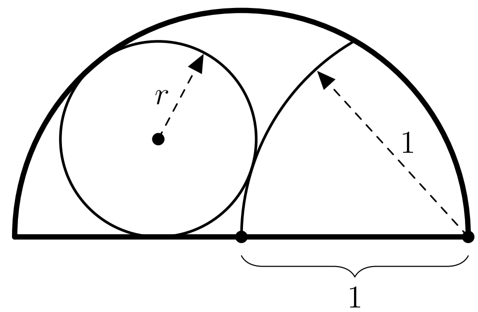
7. feladat (10)

Egy egység sugarú félkörcikkbe megrajzolunk egy $\frac{1}{2}$ sugarú félkört. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a két körívet és a félkörcikk átmérőjét is az ábra szerint?



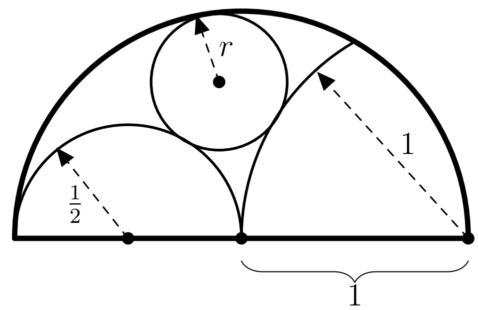
8. feladat (10)

Egy egység sugarú félkörcikkbe megrajzolunk egy egység sugarú körívet az ábra szerint. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a két körívet és a félkörcikk átmérőjét is?



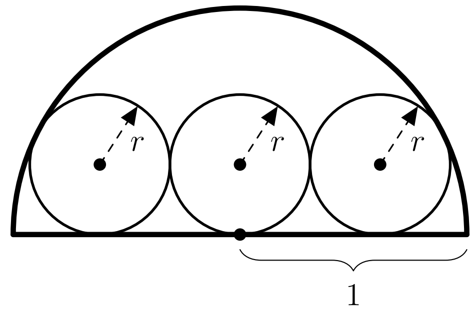
9. feladat (10+)

Egy egység sugarú félkörcikkbe megrajzolunk egy egység és egy $\frac{1}{2}$ sugarú körívet az ábra szerint. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a három körívet?

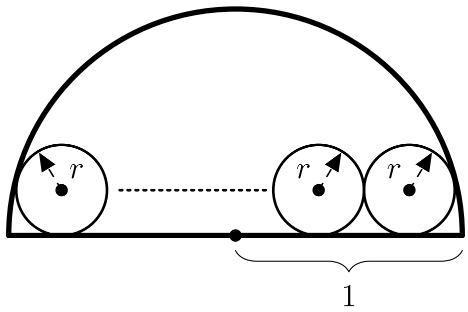


10. feladat (10)

Egy egység sugarú félkörbe megrajzolunk három azonos sugarú, egymást és a félkört illetve átmérőjét is érintő köröket az ábra szerint. Mekkora a körök r sugara?

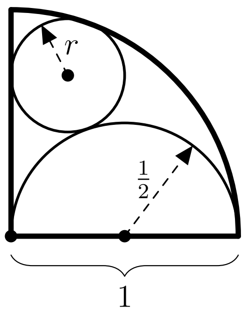


11. feladat (11+)



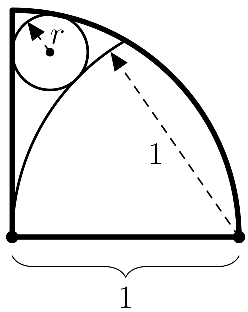
Egy egység sugarú félkörbe megrajzolunk n darab ($n \in \mathbb{N} \geq 3$) azonos sugarú, egymást és a félkört illetve átmérőjét is érintő köröket az ábra szerint. Mekkora a körök r sugara? Mekkora a körök területének és kerületének összege? Mekkora lesz a kerületek és területek összegének határértéke, ha $n \to \infty$?

12. feladat (10)



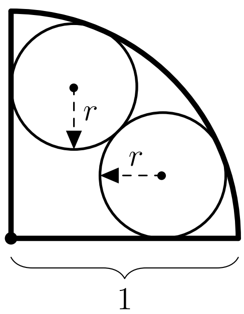
Egy egység sugarú negyedkörcikkbe megrajzolunk egy $\frac{1}{2}$ sugarú félkört. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a negyedkörcikket és a félkörívet is az ábra szerint?

13. feladat (10)



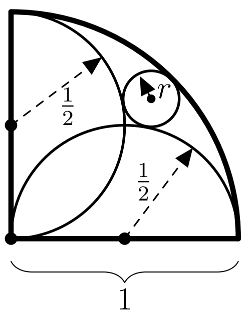
Egy egység sugarú negyedkörcikkbe megrajzolunk egy 1 sugarú körívet. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a negyedkörcikket és a körívet is az ábra szerint?

14. feladat (10+)



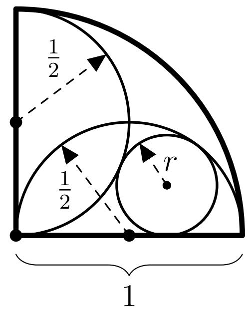
Egy egység sugarú negyedkörbe megrajzolunk két r sugarú kört az ábra szerint úgy, hogy érintik egymást és a negyedkört is. Mekkora e körök r sugara?

15. feladat (10)



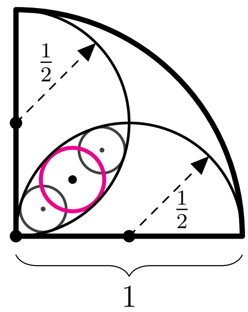
Egy egység sugarú negyedkörcikkbe megrajzolunk két $\frac{1}{2}$ sugarú félkörívet. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a negyedkört és a két félkört az ábra szerint?

16. feladat (10)



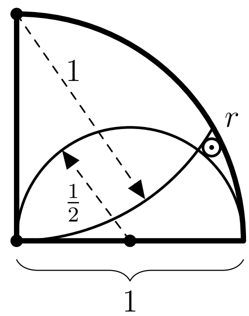
Egy egység sugarú negyedkörbe megrajzolunk két $\frac{1}{2}$ sugarú félkörívet. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti a negyedkörcikk sugarát és a két félkört is az ábra szerint?

17. feladat (10+)



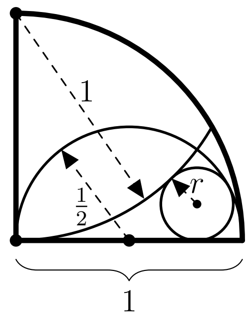
Egy egység sugarú negyedkörbe megrajzolunk két $\frac{1}{2}$ sugarú félkörívet. Mekkora annak a körnek a maximális r sugara, amelyik belülről érinti a két félkört az ábra szerint?

18. feladat (10+)



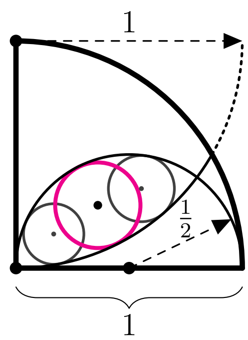
Egy egység sugarú negyedkörbe megrajzolunk egy 1 és egy $\frac{1}{2}$ sugarú körívet. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a negyedkört és a két körívet az ábra szerint?

19. feladat (10)



Egy egység sugarú negyedkörbe megrajzolunk egy 1 és egy $\frac{1}{2}$ sugarú körívet. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti a köríveket és a negyedkörcikk sugarát az ábra szerint?

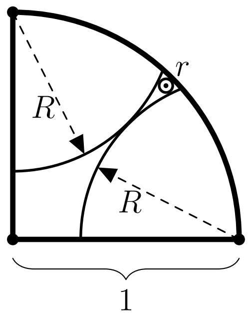
20. feladat (11+)



Egy egység sugarú negyedkörbe megrajzolunk egy 1 és egy $\frac{1}{2}$ sugarú körívet. Mekkora annak a körnek a maximális sugara, amelyik belülről érinti a két körívet az ábra szerint?

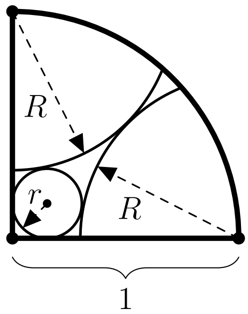
21. feladat (10+)

Egy egység sugarú negyedkörbe megrajzolunk két R sugarú, egymást érintő körívet. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a negyedkört és a két körívet az ábra szerint?



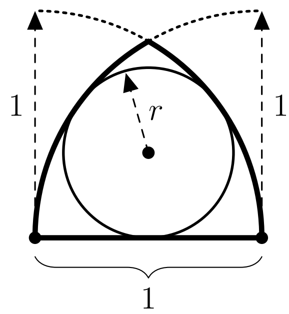
22. feladat (10+)

Egy egység sugarú negyedkörbe megrajzolunk két R sugarú, egymást érintő körívet. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a negyedkörcikk sugarait és a két körívet is az ábra szerint?



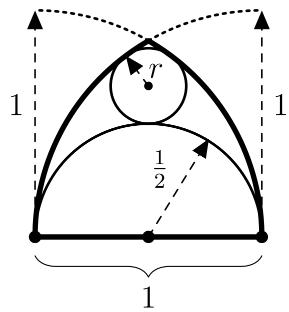
23. feladat (9)

Egy egység hosszú szakasz fölé megrajzolunk két 1 sugarú körívet. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a szakaszt és a két körívet is az ábra szerint?



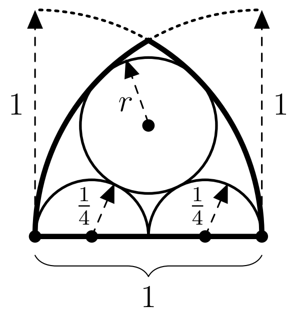
24. feladat (9)

Egy egység hosszú szakasz fölé megrajzolunk két 1 sugarú körívet és egy $\frac{1}{2}$ sugarú félkört. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a félkört és a két körívet is az ábra szerint?

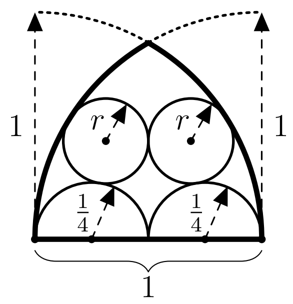


25. feladat (10)

Egy egység hosszú szakasz fölé megrajzolunk két 1 sugarú körívet és két $\frac{1}{4}$ sugarú félkört. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a két félkört és a két körívet is az ábra szerint?

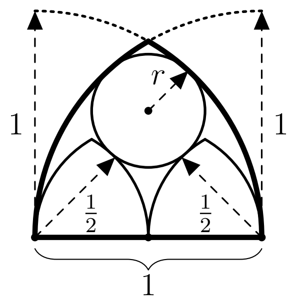


26. feladat (10)



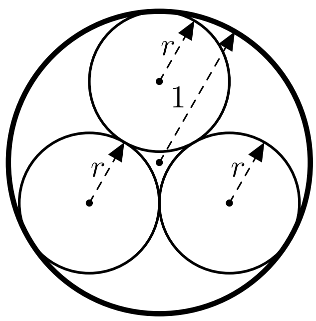
Egy egység hosszú szakasz fölé megrajzolunk két 1 sugarú körívet és két $\frac{1}{4}$ sugarú félkört. Mekkora annak a két egyforma körnek az r sugara, amelyek érintenek egy-egy félkört és körívet, illetve egymást is az ábra szerint?

27. feladat (9)



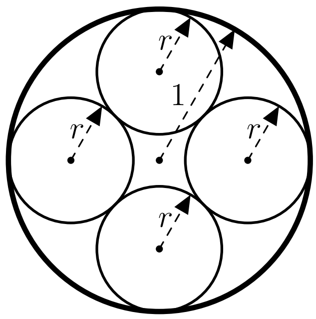
Egy egység hosszú szakasz fölé megrajzolunk két 1 sugarú hatodkörívet, illetve négy, $\frac{1}{2}$ sugarú hatodkörívet. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti a köríveket az ábra szerint?

28. feladat (9)



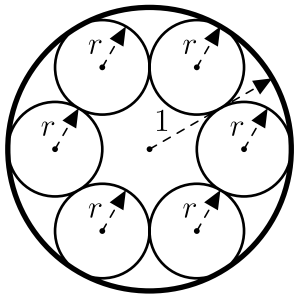
Egy egység sugarú körbe megrajzolunk három, egymást és az egység sugarú kört is érintő egyforma sugarú kisebb kört az ábra szerint. Mekkora a kisebb körök r sugara?

29. feladat (9)



Egy egység sugarú körbe megrajzolunk négy egyforma sugarú kisebb kört, melyek érintik az egység sugarú nagyobb kört és a szomszédosak egymást is az ábra szerint. Mekkora a kisebb körök r sugara?

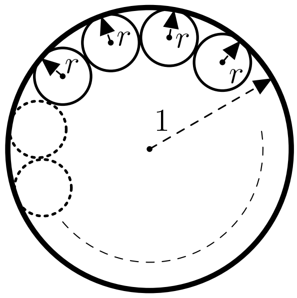
30. feladat (9)



Egy egység sugarú körbe megrajzolunk hat egyforma sugarú kisebb kört, melyek érintik a nagyobb kört illetve a szomszédosak egymást is az ábra szerint. Mekkora a kisebb körök r sugara?

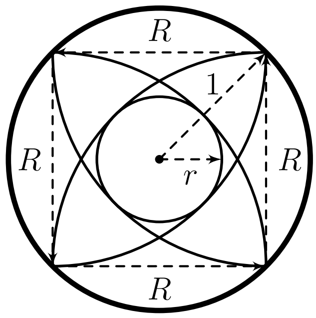
31. feladat (11+)

Egy egység sugarú körbe megrajzolunk n darab ($n \in \mathbb{N}; n \geq 2$) egyforma sugarú kisebb kört, melyek érintik a nagyobb kört illetve a szomszédosak egymást is az ábra szerint. Mekkora a kisebb körök r sugara? Mekkora a körök területének és kerületének összege? Mekkora lesz a kerületek és területek összegének határértéke, ha $n \to \infty$?



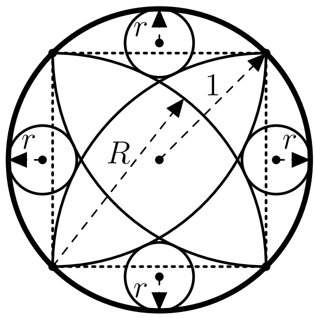
32. feladat (9)

Egy egység sugarú körbe megrajzolunk négy, R sugarú negyedkörívet az ábra szerint. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a négy körívet?



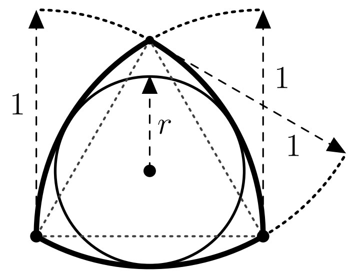
33. feladat (9)

Egy egység sugarú körbe megrajzolunk négy, R sugarú negyedkörívet az ábra szerint. Mekkora annak a négy egyforma kisebb körnek az r sugara, amelyek érintik a berajzolt köríveket?



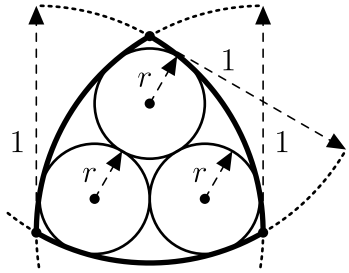
34. feladat (9)

Egy egység oldalú szabályos háromszög csúcsaiból egység sugarú köríveket rajzolva a körök egy íves háromszöget határolnak. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a három körívet az ábra szerint?



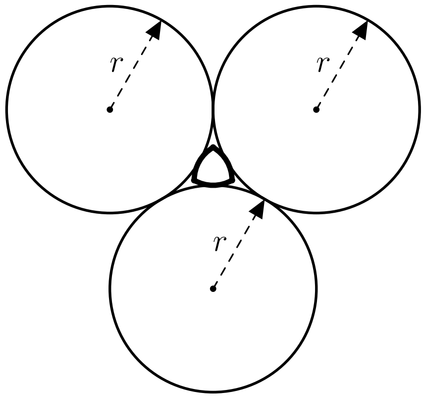
35. feladat (10)

Egy egység oldalú szabályos háromszög csúcsaiból egység sugarú köríveket rajzolva a körök egy íves háromszöget határolnak. Mekkora annak a három egyforma körnek az r sugara, melyek érintenek két körívet és egymást is az ábra szerint?



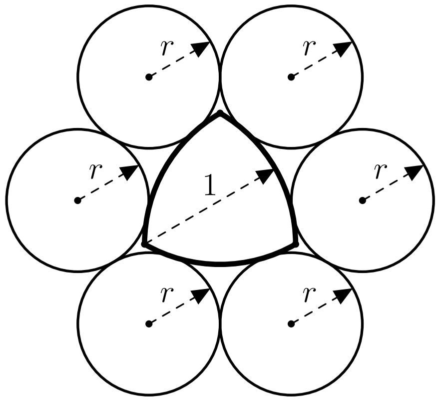
36. feladat (9)

Egy egység oldalú szabályos háromszög csúcsaiból egység sugarú köríveket rajzolva a körök egy íves háromszöget határolnak. Ezt az íves háromszöget három, egyforma sugarú kör kívülről érinti úgy, hogy egymást páronként is érintik az ábra szerint. Mekkora ennek a három egyforma körnek az r sugara?



37. feladat (9)

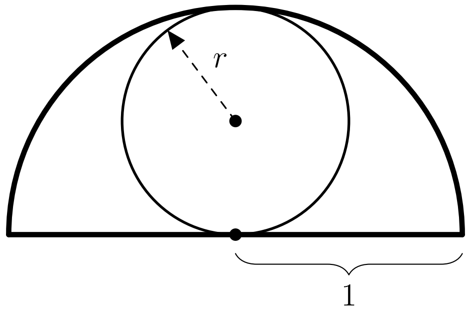
Egy egység oldalú szabályos háromszög csúcsaiból egység sugarú köríveket rajzolva a körök egy íves háromszöget határolnak. Mekkora annak a hat egyforma körnek az r sugara, melyek érintenek egy-egy körívet kívülről és a szomszédosak egymást is az ábra szerint?



4. Megoldások

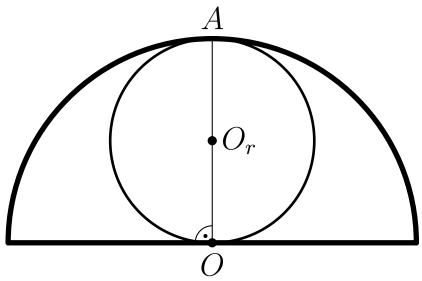
1. feladat (9)

Adott egy egység sugarú félkörcikk. Mekkora annak a körnek a legnagyobb r sugara, amelyik érinti az átmérőt és a körvonalat?



Első megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



Az átmérőre állított OA merőleges hossza a félkör sugara és a keresett kör átmérője, azaz

$$2r = 1$$

A keresett kör sugara:

$$r = \frac{1}{2}$$

Második megoldás

Használjuk a körcikkbe írt kör (5.3.5 fejezet, 107. oldal) összefüggést átrendezett alakban:

$$d^2 = 1 - 2r$$

$$r = \frac{1 - d^2}{2}$$

Ha r maximális, akkor a tört is maximális. Mivel a tört nevezője állandó, ezért a számlálónak kell a lehető legnagyobbnak lennie.

Ha $1 - d^2$ maximális, akkor d^2 minimális.

Mivel $d^2 \geq 0$, ezért $d^2 = 0$ esetén lesz a kifejezés minimális, ekkor $d = 0$.
A keresett kör sugara:

$$r = \frac{1}{2}.$$

Harmadik megoldás

Használjuk a körcikket belülről érintő kör sugarára vonatkozó összefüggést (5.3.4 fejezet, 106. oldal), a körcikk középponti szöge most $\omega = 180°$.

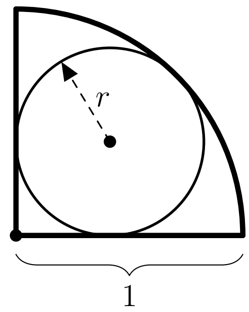
$$r = \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{1 + \sin\frac{\omega}{2}} = \frac{\sin 90°}{1 + \sin 90°} = \frac{1}{2}$$

A keresett kör sugara:

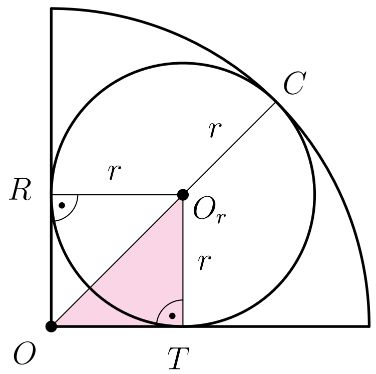
$$r = \frac{1}{2}.$$

2. feladat (10)

Egy egység sugarú negyedkörcikkbe megrajzolunk egy r sugarú kört, ami érinti a negyedkörívet, és a körcikk sugarait az ábra szerint. Mekkora a kör r sugara?



Első megoldás



Használjuk az ábra jelöléseit!

Az ismeretlen kör sugara legyen

$$r = O_rT = O_rR = O_rC.$$

Mivel $OC = 1$, ezért

$$OO_r = 1 - r.$$

A keresett kör O_r középpontja r távolságra van OT és OR szakaszoktól, tehát OO_r a körcikk középponti szögének szögfelezője. Emiatt OTO_r derékszögű háromszög egyenlő szárú is, vagyis

$$OT = r.$$

Az OTO_r derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét felírva és megoldva:

$$r^2 + r^2 = (1-r)^2$$
$$2r^2 = 1 - 2r + r^2$$
$$r^2 + 2r - 1 = 0$$
$$r_1 = -1 + \sqrt{2}; \qquad r_2 = -1 - \sqrt{2}$$

Mivel $r_2 < 0$, ezért ez nem lehet a megoldás.
A keresett kör sugara:

$$r = -1 + \sqrt{2}.$$

Második megoldás

Alkalmazzuk az 1. megoldás ábrájának jelöléseit és megállapításait!

Tudjuk, hogy az OTO_r háromszög egyenlő szárú derékszögű, és így az átfogója a befogó $\sqrt{2}$-szerese. Azaz:

$$1 - r = OO_r = r\sqrt{2}$$
$$1 - r = r\sqrt{2}$$
$$1 = r + r\sqrt{2} = r\left(1 + \sqrt{2}\right)$$
$$r = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = -1 + \sqrt{2}$$

A keresett kör sugara:

$$r = -1 + \sqrt{2}.$$

Harmadik megoldás

Alkalmazzuk az 1. megoldás ábrájának jelöléseit és megállapításait, valamint a körcikkbe írt kör (5.3.5 fejezet, 107. oldal) összefüggését!

Mivel OTO_r derékszögű háromszög egyenlő szárú is, ezért

$$d = OT = r$$

az összefüggés alapján:

$$\begin{aligned} d^2 &= 1 - 2r \\ r^2 &= 1 - 2r \\ r^2 + 2r - 1 &= 0 \\ r_1 = -1 + \sqrt{2}; &\qquad r_2 = -1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Mivel $r_2 < 0$, ezért ez nem lehet a megoldás.
A keresett kör sugara:

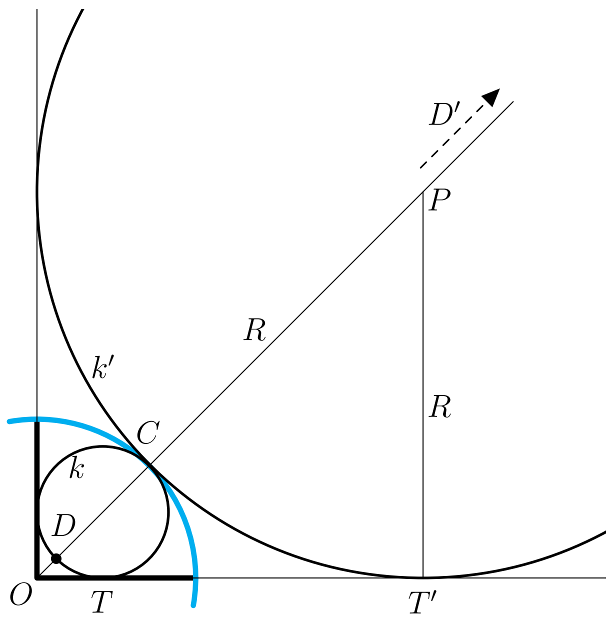
$$r = -1 + \sqrt{2}.$$

Negyedik megoldás

Oldjuk meg inverzióval a feladatot! *(Ezt a megoldást vegyes érzelmekkel közöljük, olyan érzésünk van, mintha „ágyúval lőnénk verébre”. A megoldás még csak nem is egyszerű, de gyakorlásra jó lesz.)*

Az inverzió köre legyen az adott, O középpontú egység sugarú negyedkör köríve.

Használjuk az ábra jelöléseit!



DC a keresett kör egyik átmérője.

Mivel $OT'P$ háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért $OT' = PT' = R$

$$\begin{aligned} OP &= OT' \cdot \sqrt{2} \\ 1 + R &= R \cdot \sqrt{2} \\ 1 &= -R + R \cdot \sqrt{2} \\ 1 &= R \cdot \left(-1 + \sqrt{2}\right) \\ R &= \frac{1}{-1+\sqrt{2}} = \frac{1}{-1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

Így:

$$OD' = 1 + 2R = 1 + 2\left(1 + \sqrt{2}\right) = 3 + 2\sqrt{2}$$

az inverzió tulajdonságai miatt:

$$OD = \frac{1}{OD'} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} \cdot \frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$$

és innen:

$$DC = 1 - OD = 1 - \left(3 - 2\sqrt{2}\right) = -2 + 2\sqrt{2}$$

Mivel DC a keresett kör átmérője, ezért:

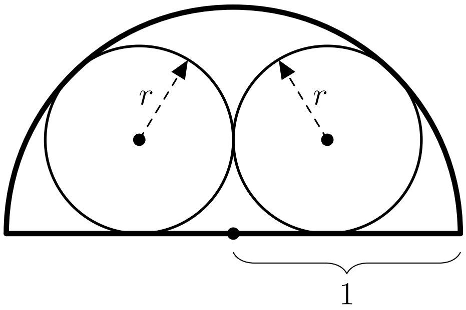
$$r = \frac{DC}{2} = -1 + \sqrt{2}$$

A keresett kör sugara:

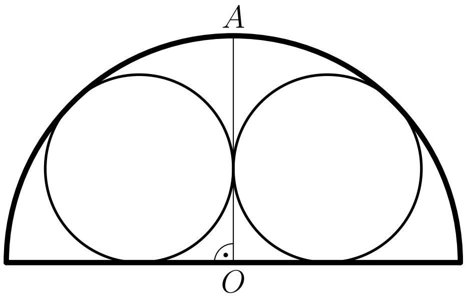
$$r = -1 + \sqrt{2}.$$

3. feladat (9)

Adott egység sugarú félkör. A félkörbe beírunk két r sugarú kört úgy, hogy azok egymást és a félkört is érintsék az ábra szerint. Mekkora az r sugár értéke?



Megoldás



Használjuk az ábra jelöléseit!

Az átmérőre a középpontban állítsunk metőlegest.

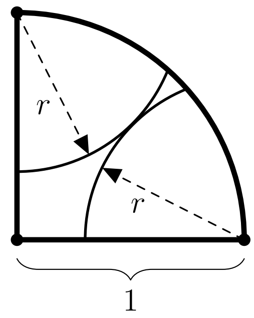
Az OA merőleges a félkört két olyan részre osztja, mint a 2. feladat (12. oldal) ábrája.

A keresett kör sugara:

$$r = -1 + \sqrt{2}.$$

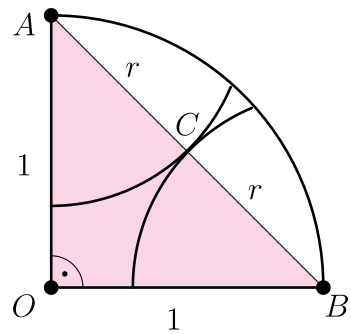
4. feladat (9)

Egy egység sugarú negyedkörbe megrajzolunk két r sugarú egymást érintő körívet az ábra szerint. Mekkora a körív r sugara?



Első megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



Az ismeretlen kör sugara legyen:

$$r = AC = BC.$$

Összekötjük a körívek középpontjait, A és B pontot. Ezen a szakaszon rajta lesz a közös érintési pont is, C.

Emiatt

$$AB = 2r$$

Írjuk fel Pitagorasz tételét AOB derékszögű háromszögben:

$$(2r)^2 = 1^2 + 1^2$$
$$4r^2 = 2$$
$$r^2 = \frac{1}{2}$$
$$r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad r_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

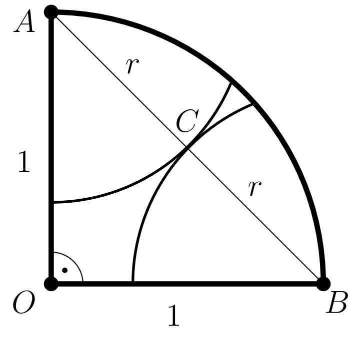
Mivel r_2 negatív, ezért nem megoldás.

A keresett kör sugara:

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Második megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



Az ismeretlen kör sugara legyen:

$$r = AC = BC.$$

Összekötjük a körívek középpontjait A és B pontot. Ezen a szakaszon rajta lesz a közös érintési pont is, C.

Emiatt

$$AB = 2r$$

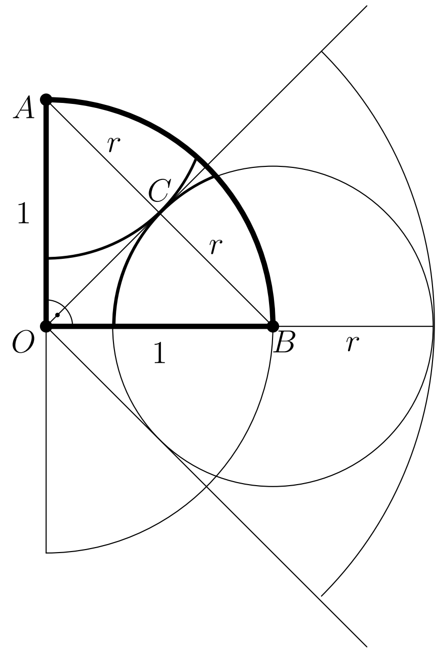
Mivel AOB háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért átfogója a befogójának $\sqrt{2}$-szerese, vagyis:

$$AB = \sqrt{2} = 2r$$
$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

A keresett kör sugara:

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Harmadik megoldás



Tükrözzük a negyedkört a vízsintes sugárra és a jobb oldali kört rajzoljuk meg! Használjuk az ábra jelöléseit!

Az ismeretlen kör sugara legyen r.

Ha meghúzzuk a kör érintőit, akkor azok 90°-os szöget zárnak be.

A körív sugara most $1 + r$.

Használjuk a körcikket belülről érintő kör sugarára vonatkozó összefüggést (5.3.4 fejezet, 106. oldal), a körcikk középponti szöge most $\omega = 90°$.

Az összefüggés egységnyi sugár esetén adja meg a beírt kör sugarát, ami

$$\rho_{\text{beírt}} = \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{1+\sin\frac{\omega}{2}} = \frac{\sin 45°}{1+\sin 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

Az esetünkben nem egység sugarú körcikkünk van, hanem $1+r$ sugarú, illetve a körcikkbe írt kör sugara pedig r, tehát:

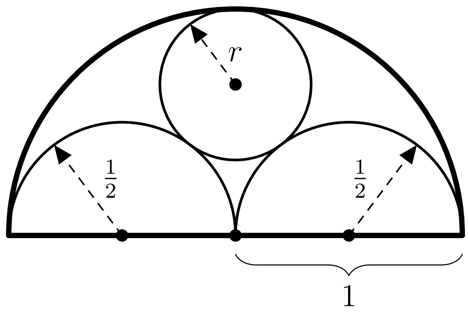
$$r = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \cdot (1+r)$$
$$r\left(2+\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}\,(1+r)$$
$$2r + r\sqrt{2} = \sqrt{2} + r\sqrt{2}$$
$$2r = \sqrt{2}$$
$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

A keresett kör sugara:

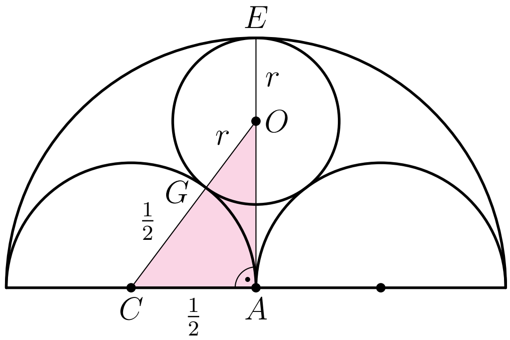
$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5. feladat (9)

Egy egység sugarú félkörbe megrajzolunk két $\frac{1}{2}$ sugarú félkört az ábra szerint. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a három körívet?



Első megoldás



Használjuk az ábra jelöléseit!

Az ismeretlen kör sugara legyen

$$r = OE = OG.$$

Összekötjük az O és C pontokat. Ez a szakasz átmegy a G ponton is.

Az AE szakasz merőleges a CA szakaszra a szimmetria miatt.

Mivel $CG = \frac{1}{2}$, ezért

$$OC = \frac{1}{2} + r,$$

és $AE = 1$, ezért

$$OA = 1 - r.$$

Írjunk fel OCA háromszögben Pitagorasz-tételt, majd rendezzük!

$$\left(\frac{1}{2} + r\right)^2 = (1-r)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{4} + r + r^2 = 1 - 2r + r^2 + \frac{1}{4}$$

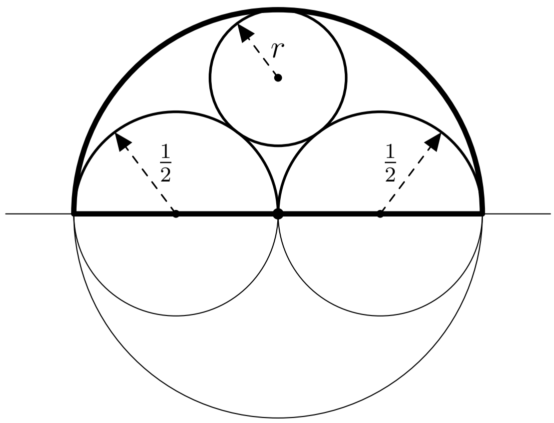
$$3r = 1$$

$$r = \frac{1}{3}$$

A keresett kör sugara:

$$r = \frac{1}{3}.$$

Második megoldás



Használjuk az érintkező körök tételét (5.3.2 fejezet, 103. oldal)!

Ha az egységsugarú félkör átmérőjére tengelyesen tükrözzük a félköríveket, négy, egymást páronként érintő kört kapunk.

A sugaraik rendre:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, r$$

Az érintkező körök tétele szerint:

$$\left(-\frac{1}{1}+\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{r}\right)^2 = 2\left[\left(-\frac{1}{1}\right)^2+\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2\right]$$

$$\left(-1+2+2+\frac{1}{r}\right)^2 = 2\left(1+4+4+\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\left(3+\frac{1}{r}\right)^2 = 2\left(9+\frac{1}{r^2}\right)$$

$$9+\frac{6}{r}+\frac{1}{r^2} = 18+\frac{2}{r^2}$$

$$0 = \frac{1}{r^2}-\frac{6}{r}+9$$

$$0 = \left(\frac{1}{r}-3\right)^2$$

$$0 = \frac{1}{r}-3$$

$$r = \frac{1}{3}$$

A keresett kör sugara:

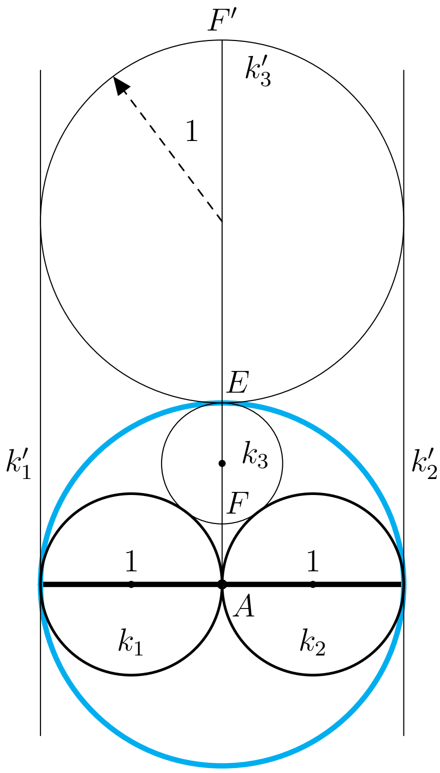
$$r = \frac{1}{3}.$$

Harmadik megoldás

Használjunk inverziót!

Az inverzió alapköre legyen az adott, A középpontú egység sugarú kör.

A feladat ábráját erre a körre invertálva (és az egyes alakzatok képét vesszővel jelölve) kapjuk a mellékelt ábrát.



A k_3' kör átmérője k_1' és k_2' távolsága, azaz 2 egység.

Így a keresett kör invertált képének F' pontja 3 egység távolságra van az inverzió pólusától, azaz $AF' = 3$.

A keresett kis kör F pontja eredeti helyén $AF = \frac{1}{AF'} = \frac{1}{3}$ távolságra volt a pólustól.

Így a keresett kör átmérője:

$$EF = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

A keresett kör sugara:

$$r = \frac{1}{3}.$$

Megjegyzés

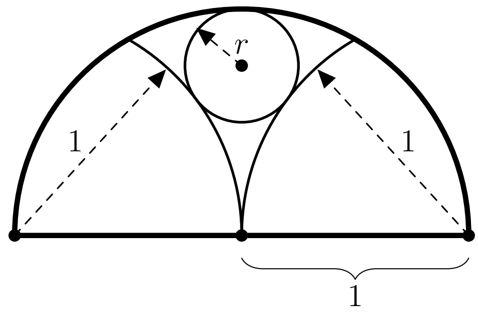
A feladat ihletője a következő boltív volt:

Saint-Étienne katedrális,
Bourges (Franciaország)[1]

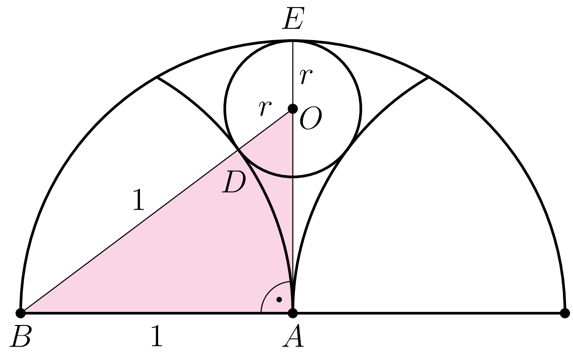
[1]Andrew Tallon képe: http://mappinggothic.org/image/44567

6. feladat (9)

Egy egység sugarú félkörbe megrajzolunk két, egység sugarú körívet az ábra szerint. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a három körívet?



Első megoldás



Használjuk az ábra jelöléseit!

Az ismeretlen kör sugara legyen

$$r = OE = OD.$$

Összekötjük az O és B pontokat. Ez a szakasz átmegy a D ponton is.

Az AE szakasz merőleges a BA szakaszra a szimmetria miatt.

Mivel $BD = 1$, ezért

$$OB = 1 + r,$$

és $AE = 1$, ezért

$$OA = 1 - r.$$

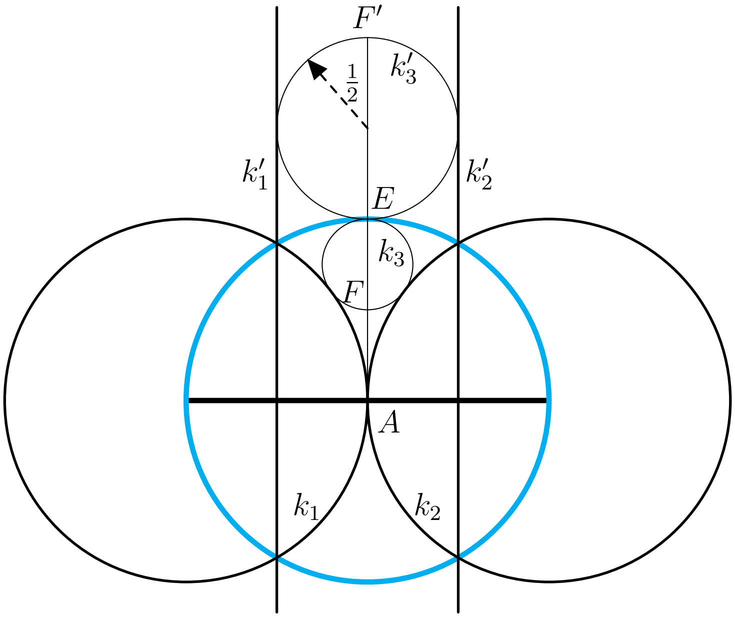
Írjunk fel OBA háromszögben Pitagorasz-tételt, majd rendezzük!

$$\begin{aligned}
(1-r)^2 + 1^2 &= (1+r)^2 \\
1 - 2r + r^2 + 1 &= 1 + 2r + r^2 \\
1 &= 4r \\
r &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

A keresett kör sugara:

$$r = \frac{1}{4}.$$

Második megoldás



Oldjuk meg inverzióval!

Az inverzió alapköre legyen az adott, A középpontú egység sugarú kör.

A feladat ábráját erre a körre invertálva (és az egyes alakzatok képét vesszővel jelölve) kapjuk a mellékelt ábrát.

A k_1' és k_2' párhuzamos egyenesek távolsága $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Tehát az invertált kör átmérője 1.

Így pedig a keresett kör invertált képének F' pontja 2 egység távolságra van az inverzió pólusától, azaz $AF' = 2$.

A keresett kis kör F pontja tehát eredeti helyén

$$AF = \frac{1}{AF'} = \frac{1}{2}$$

távolságra volt a pólustól.

Így a keresett kis kör átmérője:

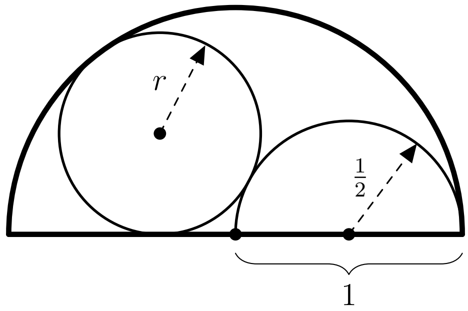
$$EF = AE - AF = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

A keresett kör sugara:

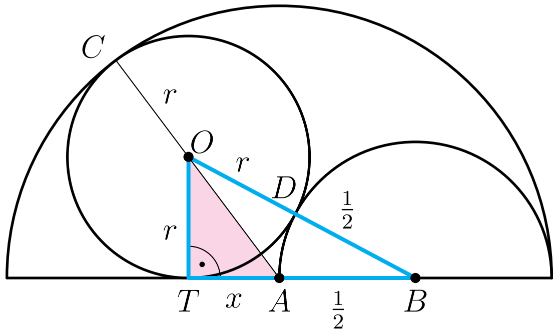
$$r = \frac{1}{4}.$$

7. feladat (10)

Egy egység sugarú félkörcikkbe megrajzolunk egy $\frac{1}{2}$ sugarú félkört. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a két körívet és a félkörcikk átmérőjét is az ábra szerint?



Első megoldás



Használjuk az ábra jelöléseit!

Az ismeretlen kör sugara legyen

$$r = OT = OD = OC.$$

Összekötjük az O és B pontokat. Ez a szakasz átmegy a D ponton is.

Összekötjük az O és A pontokat is. E szakasz meghosszabbítása átmegy a C ponton is.

Az OT sugár pedig merőleges TB érintőre.

Mivel $BD = \frac{1}{2}$, ezért

$$OB = r + \frac{1}{2},$$

és $AC = 1$, ezért

$$OA = 1 - r.$$

Vezessünk be még egy változót, legyen:

$$x = TA.$$

És írjunk fel most már két Pitagorasz-tételt: OTA és OTB derékszögű háromszögekben!

$$\begin{cases} x^2 + r^2 = (1-r)^2 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + r^2 = \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Felbontva a zárójeleket:

$$\begin{cases} x^2 + r^2 = 1 - 2r + r^2 & (1) \\ x^2 + x + \frac{1}{4} + r^2 = r^2 + r + \frac{1}{4} & (2) \end{cases}$$

(2)-ből (1)-et kivonva és rendezve:

$$x + \frac{1}{4} = r + \frac{1}{4} - 1 + 2r$$
$$x = 3r - 1$$

Ezt visszahelyettesítve (1)-be:

$$\begin{aligned}(3r-1)^2+r^2&=1-2r+r^2\\ 9r^2-6r+1+r^2&=1-2r+r^2\\ 9r^2-4r&=0\\ r\,(9r-4)&=0\\ r_1=0;\qquad r_2&=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

amelyekhez:

$$x_1=-1;\qquad x_2=\frac{1}{3}$$

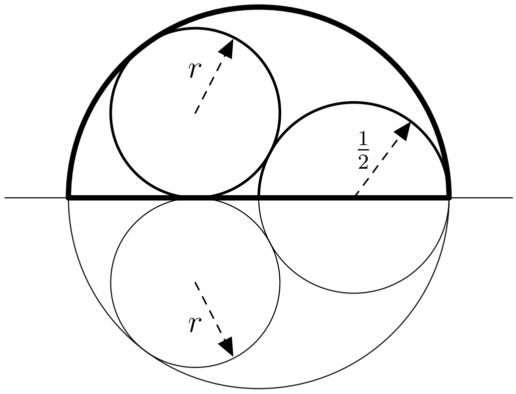
Mivel $r=0$, ezért ez nem lehet a megoldás. Az eset elfajuló kör (az ábra jobb alsó sarkában).

A keresett kör sugara:

$$r=\frac{4}{9}.$$

Második megoldás

Tükrözzük az ábrát az egységsugarú félkör átmérőjére és használjuk az érintkező körök tételét (5.3.2 fejezet, 103. oldal)!



Látható a négy kör, melyek egymást páronként érintik. A sugaraik rendre:

$$1,\ \frac{1}{2},\ r,\ r.$$

Az érintkező körök tétele szerint:

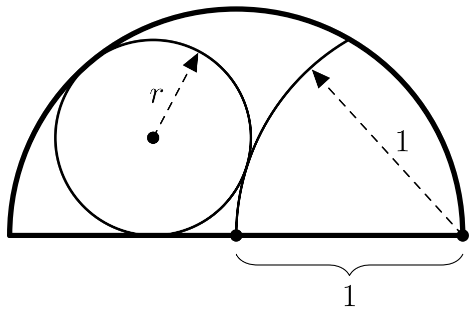
$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{1}+\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\right)^2&=2\left[\left(-\frac{1}{1}\right)^2+\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2\right]\\ \left(-1+2+\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\right)^2&=2\left(1+4+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2}\right)\\ \left(1+\frac{2}{r}\right)^2&=2\left(5+\frac{2}{r^2}\right)\\ 1+\frac{4}{r}+\frac{4}{r^2}&=10+\frac{4}{r^2}\\ \frac{4}{r}&=9\\ r&=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

A keresett kör sugara:

$$r=\frac{4}{9}.$$

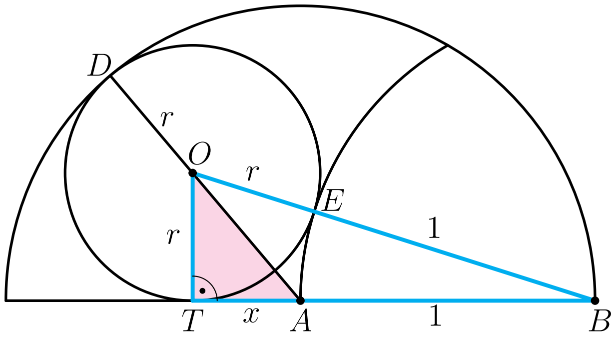
8. feladat (10)

Egy egység sugarú félkörcikkbe megrajzolunk egy egység sugarú körívet az ábra szerint. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a két körívet és a félkörcikk átmérőjét is?



Megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



Az ismeretlen kör sugara legyen

$$r = OE = OD = OF.$$

Összekötjük az O és B pontokat. Ez a szakasz átmegy az E ponton is.

Összekötjük az O és A pontokat is. E szakasz meghosszabbítása átmegy a D ponton is.

Az OT sugár pedig merőleges TB érintőre.

Mivel $BE = 1$, ezért

$$OB = r + 1,$$

és $AD = 1$, ezért

$$OA = 1 - r.$$

Vezessünk be még egy változót:

$$x = TA.$$

Mivel $AB = 1$, ezért

$$TB = x + 1.$$

És írjunk fel most már két Pitagorasz-tételt: OTA és OFB derékszögű háromszögekben!

$$\begin{cases} x^2 + r^2 = (1 - r)^2 \\ (x + 1)^2 + r^2 = (r + 1)^2 \end{cases}$$

Felbontva a zárójeleket:

$$\begin{cases} x^2 + r^2 = 1 - 2r + r^2 & (1) \\ x^2 + 2x + 1 + r^2 = r^2 + 2r + 1 & (2) \end{cases}$$

(2)-ből (1)-et kivonva és rendezve:

$$2x + 1 = 4r$$

$$x = 2r - \frac{1}{2}$$

Ezt visszahelyettesítve (1)-be:

$$\left(2r-\frac{1}{2}\right)^2+r^2=1-2r+r^2$$
$$4r^2-2r+\frac{1}{4}+r^2=1-2r+r^2$$
$$4r^2=\frac{3}{4}$$
$$r^2=\frac{3}{16}$$
$$r_1=\frac{\sqrt{3}}{4};\qquad r_2=-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

amelyekhez

$$x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2};\qquad x_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$$

Mivel $r_2<0$, ezért ez nem lehet a megoldás.

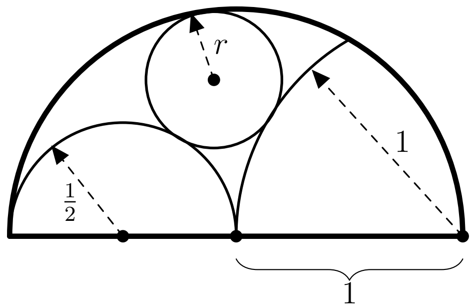
A keresett kör sugara:

$$r=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

.

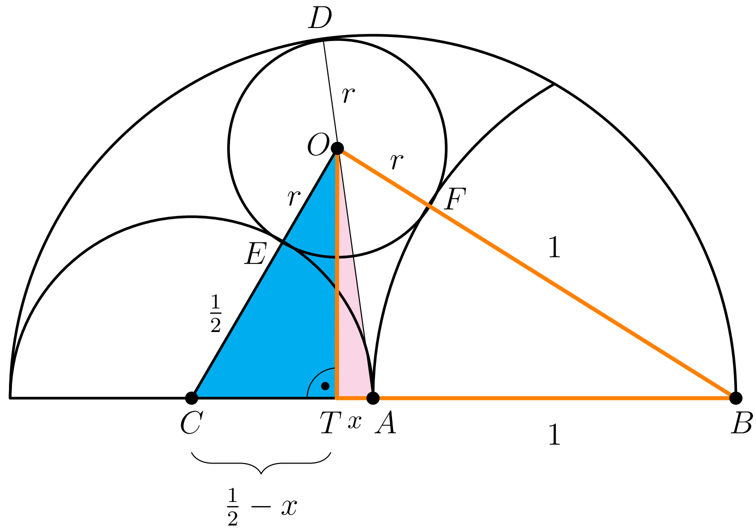
9. feladat (10+)

Egy egység sugarú félkörcikkbe megrajzolunk egy egység és egy $\frac{1}{2}$ sugarú körívet az ábra szerint. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a három körívet?



Első megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



Az ismeretlen kör sugara legyen

$$r = OD = OE = OF.$$

Összekötjük az O és B pontokat. Ez a szakasz átmegy az F ponton is.

Összekötjük az O és A pontokat is. E szakasz meghosszabbítása átmegy a D ponton is.

Összekötjük az O és C pontokat is. E szakasz pedig átmegy az E ponton is.

Állítsunk merőlegest a keresett kör középpontjából a félkör átmérőjére, így OT merőleges lesz CB-re.

Mivel $BF = 1$, ezért

$$OB = r + 1,$$

és $AD = 1$, ezért

$$OA = 1 - r.$$

Továbbá mivel $CE = \frac{1}{2}$, ezért

$$OC = r + \frac{1}{2}.$$

Vezessünk be most célszerűen még két változót, legyen:

$$x = TA \text{ és } m = OT.$$

Így mivel $CA = \frac{1}{2}$, ezért

$$CT = \frac{1}{2} - x.$$

Írjunk fel most már ezekkel három Pitagorasz-tételt: ATO, CTO és OTB derékszögű háromszögekben!

$$\begin{cases} x^2+m^2=(1-r)^2 \\ \left(\frac{1}{2}-x\right)^2+m^2=\left(r+\frac{1}{2}\right)^2 \\ (x+1)^2+m^2=(r+1)^2 \end{cases}$$

Felbontva a zárójeleket:

$$\begin{cases} x^2+m^2=1-2r+r^2 & (1) \\ \frac{1}{4}-x+x^2+m^2=r^2+r+\frac{1}{4} & (2) \\ x^2+2x+1+m^2=r^2+2r+1 & (3) \end{cases}$$

A (2)-ből és (3)-ból rendre kivonva az (1)-t, kapjuk az alábbiakat:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}-x=3r-\frac{3}{4} & (4) \\ 2x+1=4r & (5) \end{cases}$$

A (4) kétszeresét az (5)-höz hozzáadva:

$$\frac{3}{2}=10r-\frac{3}{2}$$
$$3=10r$$
$$r=\frac{3}{10}$$

Visszahelyettesítve a kapott r értéket (5)-be:

$$x=\frac{1}{10}$$

Visszahelyettesítve r és x értékét (1)-be:

$$m^2=\frac{12}{25}$$

$$m_1=\frac{2\sqrt{3}}{5}; \qquad m_2=-\frac{2\sqrt{3}}{5}$$

Mivel $m_2<0$, ezért ez nem lehet a megoldás.

A keresett kör sugara:

$$r=\frac{3}{10}.$$

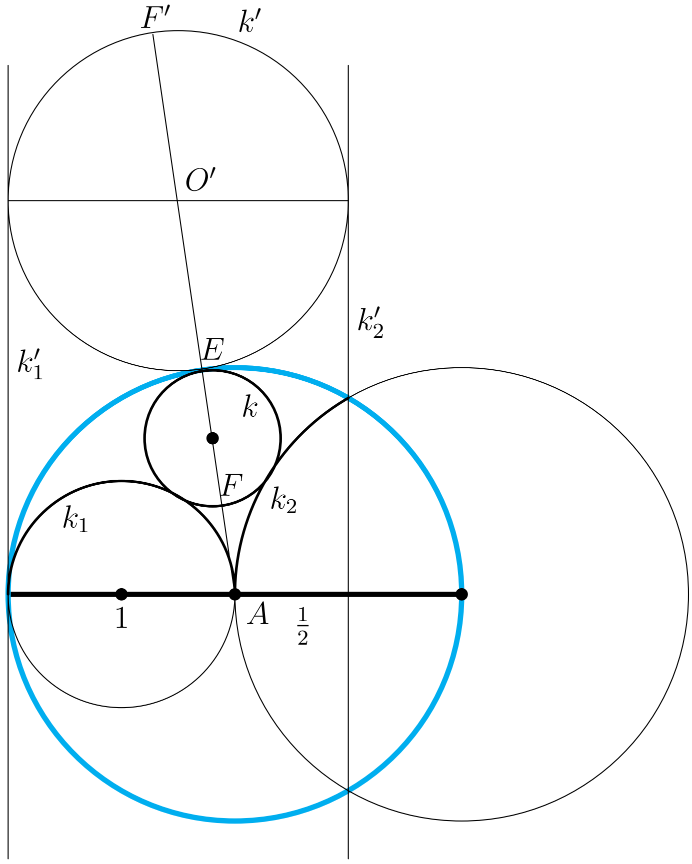
.

Második megoldás

Oldjuk meg inverzióval!

Az inverzió alapköre legyen az adott, A középpontú, egység sugarú (fél)kör.

A feladat ábráját erre a körre invertálva (és az egyes alakzatok képét vesszővel jelölve) kapjuk a mellékelt ábrát.



A keresett kör invertált képének, k'-nek átmérője k'_1 és k'_2 távolsága, azaz $1,5$ egység.

A keresett kör invertált képének, k'-nek F' pontja tehát $1+EF'$ távolságra van az inverzió pólusától, A-tól, azaz: azaz

$$AF' = 1 + 1,5 = 2,5 = \frac{5}{2}.$$

Így a keresett k kör F pontjának távolsága az eredeti helyén a pólustól:

$$AF = \frac{1}{AF'} = \frac{2}{5}.$$

Így a keresett k kör átmérője:

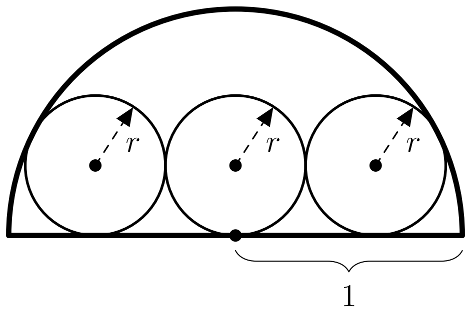
$$EF = AE - AF = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5},$$

A keresett kör sugara:

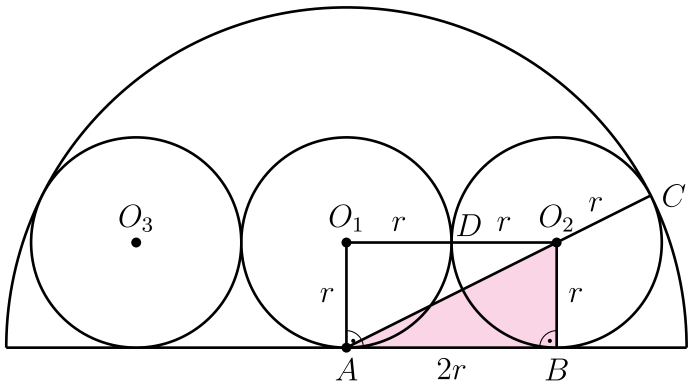
$$r = \frac{3}{10}.$$

10. feladat (10)

Egy egység sugarú félkörbe megrajzolunk három azonos sugarú, egymást és a félkört illetve átmérőjét is érintő köröket az ábra szerint. Mekkora a körök r sugara?



Megoldás



Használjuk az ábra jelöléseit!

Az ismeretlen kör sugara legyen:

$$r = O_1A = O_1D = \\ = O_2D = O_2B = O_2C.$$

Összekötjük az O_1 és O_2 pontokat. Ez a szakasz átmegy a D ponton is.

Összekötjük az A és O_2 pontokat is. E szakasz meghosszabbítása átmegy a C ponton is.

Mivel $AC = 1$, ezért

$$AO_2 = 1 - r.$$

O_1A és O_2B merőleges AB érintőre és mindkettő r hosszúságú, vagyis ABO_2O_1 négyszög téglalap. Ebből következően:

$$AB = O_1O_2 = 2r.$$

Írjuk fel Pitagorasz tételét az ABO_2 háromszögben és rendezzük!

$$(2r)^2 + r^2 = (1 - r)^2$$
$$5r^2 = 1 - 2r + r^2$$
$$0 = -4r^2 - 2r + 1$$
$$r_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}; \qquad r_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$$

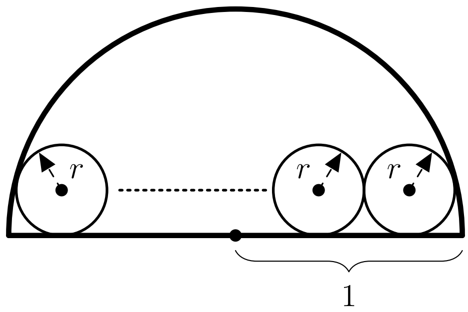
Mivel $r_2 < 0$, ezért ez nem lehet a megoldás.

A keresett körök sugara:

$$r = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

11. feladat (11+)

Egy egység sugarú félkörbe megrajzolunk n darab ($n \in \mathbb{N} \geq 3$) azonos sugarú, egymást és a félkört illetve átmérőjét is érintő köröket az ábra szerint. Mekkora a körök r sugara? Mekkora a körök területének és kerületének összege? Mekkora lesz a kerületek és területek összegének határértéke, ha $n \to \infty$?



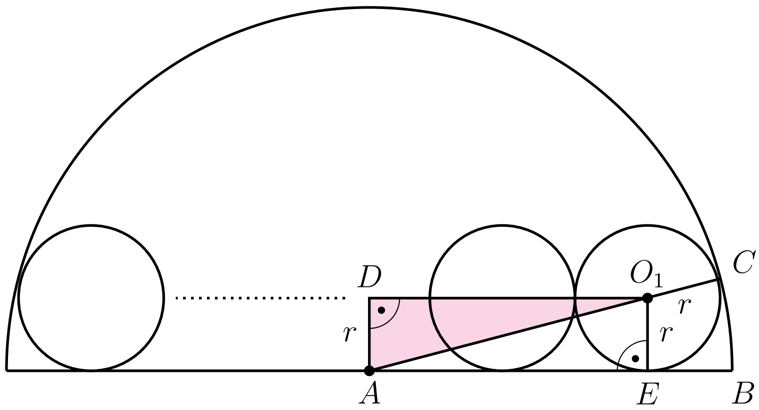
Megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!

Az ismeretlen kör sugara legyen:

$$r = O_1C = O_1E$$

Húzzunk párhuzamost O_1 ponton keresztül a félkör átmérőjével.



O_1E érintő merőleges a félkör átmérőjére. Állítsunk merőlegest A pontban is az átmérőre! Összekötjük az A és O_1 pontokat is. E szakasz meghosszabbítása átmegy a C ponton is. Mivel $AC = 1$, ezért

$$AO_1 = 1 - r.$$

A DO_1 távolságra

$$DO_1 = nr - r,$$

és

$$AD = O_1E = r.$$

Írjuk fel Pitagorasz tételét az ADO_1 derékszögű háromszögben és rendezzük!

$$\begin{aligned} (nr - r)^2 + r^2 &= (1 - r)^2 \qquad (n \geq 3) \\ [(n-1)\,r]^2 + r^2 &= (1 - r)^2 \\ (n-1)^2 \cdot r^2 - 2nr^2 + r^2 + r^2 &= 1 - 2r + r^2 \\ (n-1)^2 \cdot r^2 + 2r - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$r_1 = \frac{-1 + \sqrt{(n-1)^2 + 1}}{(n-1)^2}; \qquad r_2 = \frac{-1 - \sqrt{(n-1)^2 + 1}}{(n-1)^2}$$

Mivel $r_2 < 0$, ezért ez nem lehet a megoldás.

A keresett körök sugara:

$$r = \frac{-1 + \sqrt{(n-1)^2 + 1}}{(n-1)^2}.$$

A keresett körök kerületeinek összege:

$$K_n = \sum K = n \cdot 2r\pi = n \cdot 2\pi \cdot \frac{-1 + \sqrt{(n-1)^2+1}}{(n-1)^2} =$$
$$= 2\pi \cdot \frac{-n + n\sqrt{(n-1)^2+1}}{(n-1)^2} = 2\pi \cdot \frac{-n + n\sqrt{n^2-2n+2}}{n^2-2n+1}$$

A keresett körök területeinek összege pedig:

$$T_n = \sum T = n \cdot r^2\pi = n \cdot \pi \cdot \left(\frac{-1 + \sqrt{(n-1)^2+1}}{(n-1)^2}\right)^2 =$$
$$= n \cdot \pi \cdot \frac{(n-1)^2 + 2 - 2\sqrt{(n-1)^2+1}}{(n-1)^4} =$$
$$= \pi \cdot \frac{n^3 - 2n^2 + 3n - 2n\sqrt{n^2-2n+2}}{n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1}$$

Nézzük most, hogy mi történik $n \to \infty$ esetén! Kezdjük K_n értékével:

$$\lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty} 2\pi \cdot \frac{-n + n\sqrt{n^2-2n+2}}{n^2-2n+1} = \lim_{n\to\infty} 2\pi \cdot \frac{\frac{-n+n\sqrt{n^2-2n+2}}{n^2}}{\frac{n^2-2n+1}{n^2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} 2\pi \cdot \frac{-\frac{1}{n} + \sqrt{1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}}}{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = 2\pi \cdot \frac{-0 + \sqrt{1-0+0}}{1-0+0} = 2\pi$$
$$\lim_{n\to\infty} K_n = 2\pi$$

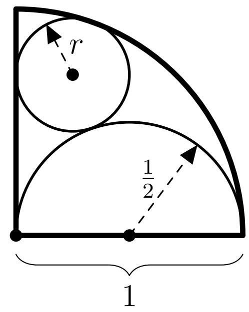
Azt az érdekes dolgot kaptuk, hogy a keresett körök kerületének összegének a határértéke megegyezik az eredeti kör kerületével.

Folytassuk T_n értékével!

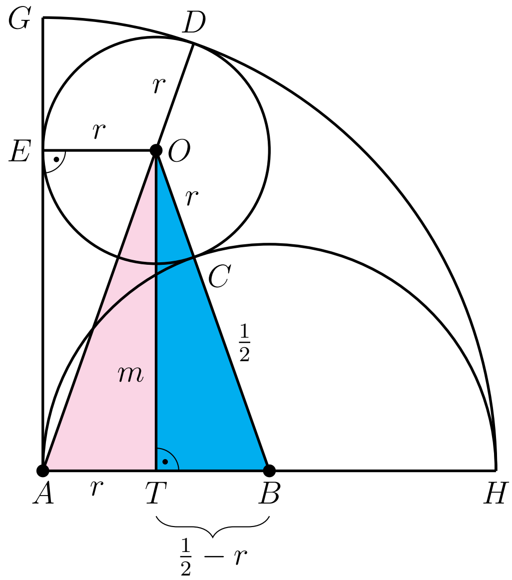
$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \pi \cdot \frac{n^3 - 2n^2 + 3n - 2n\sqrt{n^2-2n+2}}{n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1} = \lim_{n\to\infty} \pi \cdot \frac{\frac{n^3-2n^2+3n-2n\sqrt{n^2-2n+2}}{n^4}}{\frac{n^4-4n^3+6n^2-4n+1}{n^4}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \pi \cdot \frac{\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3} - 2\sqrt{\frac{1}{n^4} - \frac{2}{n^5} + \frac{2}{n^6}}}{1 - \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2} - \frac{4}{n^3} + \frac{1}{n^4}} = \pi \cdot \frac{0 - 0 + 0 - 2\sqrt{0-0+0}}{1-0+0-0+0} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} T_n = 0$$

12. feladat (10)

Egy egység sugarú negyedkörcikkbe megrajzolunk egy $\frac{1}{2}$ sugarú félkört. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a negyedkörcikket és a félkörívet is az ábra szerint?



Első megoldás



Használjuk az ábra jelöléseit!

Az ismeretlen kör sugara legyen

$$r = OC = OD = OE.$$

OE sugár merőleges AG érintőre.

Összekötjük az B és O pontokat. Ez a szakasz átmegy a C ponton is.

Összekötjük az A és O pontokat is. E szakasz meghosszabbítása átmegy a D ponton is.

Mivel $AD = 1$, ezért

$$AO = 1 - r,$$

és $BC = \frac{1}{2}$, ezért

$$BO = r + \frac{1}{2}.$$

Állítsunk merőlegest a keresett kör O középpontjából a félkör AH átmérőjére, így OT merőleges lesz AH-ra. Vezessünk be új változót, legyen

$$m = OT.$$

Az $ATOE$ négyszögben három belső szög derékszög, ezért a négyszög téglalap. Így

$$AT = r.$$

Továbbá mivel $AB = \frac{1}{2}$, ezért

$$TB = \frac{1}{2} - r.$$

Írjunk akkor föl egy-egy Pitagorasz-tételt ATO és BTO derékszögű háromszögekben!

$$\begin{cases} r^2 + m^2 = (1-r)^2 \\ \left(\frac{1}{2} - r\right)^2 + m^2 = \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Felbontva a zárójeleket:

$$\begin{cases} r^2 + m^2 = 1 - 2r + r^2 & (1) \\ \dfrac{1}{4} - r + r^2 + m^2 = r^2 + r + \dfrac{1}{4} & (2) \end{cases}$$

A (2)-ből kivonva az (1)-t és átrendezve kapjuk:

$$\frac{1}{4} - r = 3r - \frac{3}{4}$$
$$1 = 4r$$
$$r = \frac{1}{4}$$

Visszahelyettesítve r értékét (1)-be:

$$m^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}$$
$$m_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad m_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

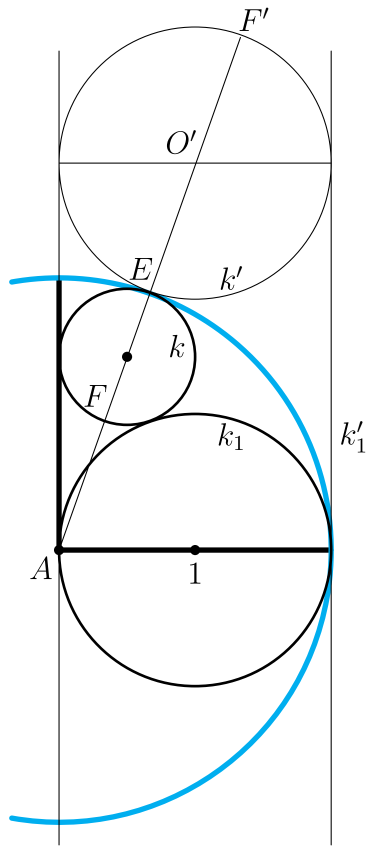
Mivel $m_2 < 0$, ezért ez nem lehet a megoldás.

A keresett kör sugara:

$$r = \frac{1}{4}.$$

Második megoldás

Oldjuk meg inverzióval!



Az inverzió alapköre legyen az adott, A középpontú egység sugarú negyedkör köríve. A feladat ábráját erre a körre invertálva (és az egyes alakzatok képét vesszővel jelölve) kapjuk a mellékelt ábrát.

A keresett kör invertált képének átmérője 1.

Így pedig a keresett kör invertált képének F' pontja $1 + 1 = 2$ egység távolságra van az inverzió pólusától, azaz

$$AF' = 2.$$

A keresett kis kör F pontja tehát eredeti helyén

$$AF = \frac{1}{AF'} = \frac{1}{2}$$

távolságra volt a pólustól.

Így a keresett kis kör átmérője:

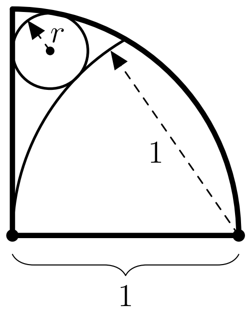
$$EF = AE - AF = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

A keresett kör sugara:

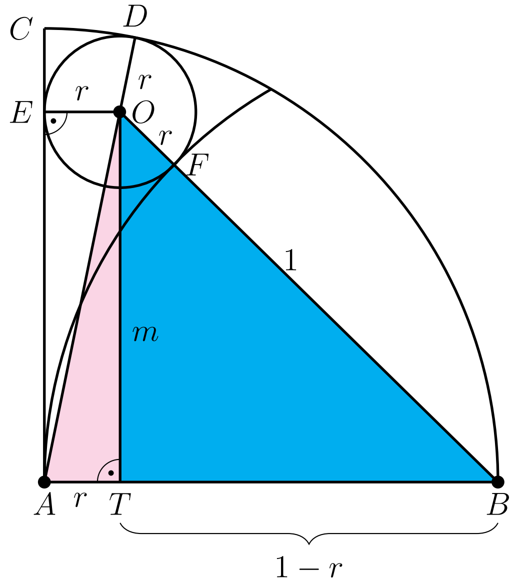
$$r = \frac{1}{4}.$$

13. feladat (10)

Egy egység sugarú negyedkörcikkbe megrajzolunk egy 1 sugarú körívet. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a negyedkörcikket és a körívet is az ábra szerint?



Első megoldás



Használjuk az ábra jelöléseit!

Az ismeretlen kör sugara legyen

$$r = OD = OE = OF.$$

OE sugár merőleges AC érintőre.

Összekötjük a B és O pontokat. Ez a szakasz átmegy az F ponton is.

Összekötjük az A és O pontokat is. E szakasz meghosszabbítása átmegy a D ponton is.

Mivel $AD = 1$, ezért

$$AO = 1 - r,$$

és $BF = 1$, ezért

$$BO = r + 1.$$

Állítsunk merőlegest a keresett kör O középpontjából a félkör AB átmérőjére, így OT merőleges lesz AB-re. Vezessünk be új változót, legyen

$$m = OT.$$

Az $ATOE$ négyszögben három belső szög derékszög, ezért a négyszög téglalap. Így:

$$AT = r.$$

Továbbá mivel $AB = 1$, ezért

$$TB = 1 - r.$$

Írjunk akkor föl egy-egy Pitagorasz-tételt ATO és BTO derékszögű háromszögekben!

$$\begin{cases} r^2 + m^2 = (1-r)^2 \\ (1-r)^2 + m^2 = (r+1)^2 \end{cases}$$

Felbontva a zárójeleket:

$$\begin{cases} r^2 + m^2 = 1 - 2r + r^2 & (1) \\ 1 - 2r + r^2 + m^2 = r^2 + 2r + 1 & (2) \end{cases}$$

A (2)-ből kivonva az (1)-t és rendezve, kapjuk

$$\begin{aligned} 1 - 2r &= 4r \\ 1 &= 6r \\ r &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve r értékét (1)-be:

$$m^2 = 1 - 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$m_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}; \qquad m_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Mivel $m_2 < 0$, ezért ez nem lehet a megoldás.

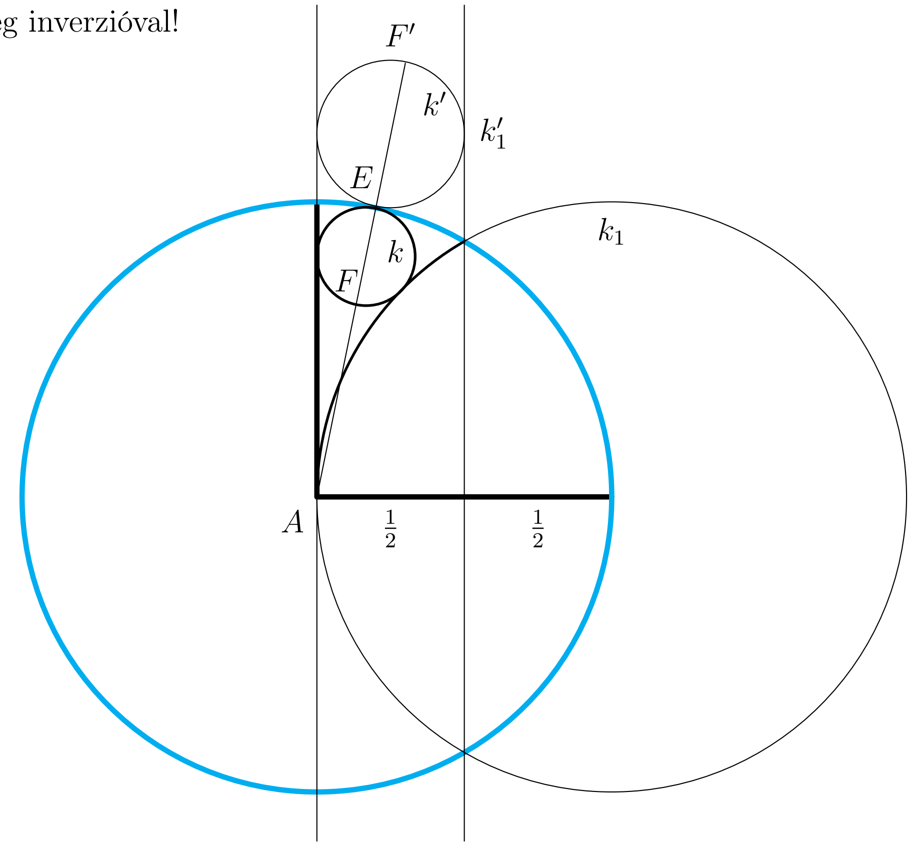
A keresett kör sugara:

$$r = \frac{1}{6}.$$

.

Második megoldás

Oldjuk meg inverzióval!



Az inverzió alapköre legyen az adott, A középpontú egység sugarú (negyed)kör. A feladat ábráját erre a körre invertálva (és az egyes alakzatok képét vesszővel jelölve) kapjuk a mellékelt ábrát.

A keresett kör inverz képének átmérője $0,5$.

Így pedig a keresett kör invertált képének F' pontja $1+0,5=1,5$ egység távolságra van az inverzió pólusától, azaz

$$AF' = 1,5 = \frac{3}{2}.$$

A keresett kis kör F pontja tehát eredeti helyén

$$AF = \frac{1}{AF'} = \frac{2}{3}$$

távolságra volt a pólustól.

Így a keresett kis kör átmérője:

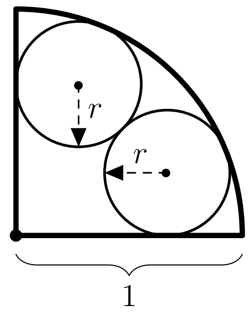
$$EF = AE - AF = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

A keresett kör sugara:

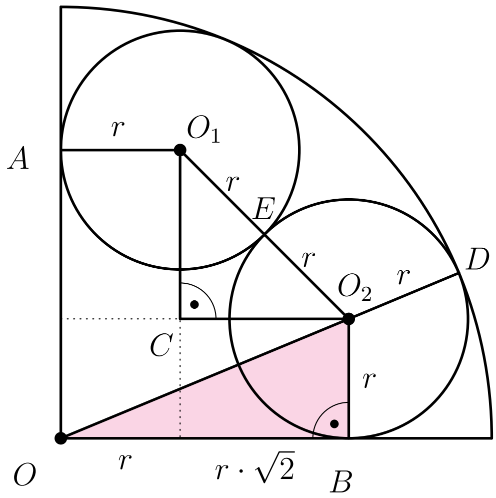
$$r = \frac{1}{6}.$$

14. feladat (10+)

Egy egység sugarú negyedkörbe megrajzolunk két r sugarú kört az ábra szerint úgy, hogy érintik egymást és a negyedkört is. Mekkora e körök r sugara?



Első megoldás



Használjuk az ábra jelöléseit!

Az ismeretlen kör sugara legyen:

$$r = O_1A = O_1E = O_2E = O_2B.$$

Összekötjük az O_1 és O_2 pontokat. E szakaszon rajta van az E pont is.

Az O_1A és O_2B sugarak pedig rendre merőlegesek OA és OB érintőkre.

Húzzunk párhuzamost O_1 és O_2 középpontokon keresztül a negyedkör sugaraival!

O_1CO_2 háromszög derékszögű, egyenlő szárú és $O_1O_2 = 2r$, innen

$$CO_2 = \frac{O_1O_2}{\sqrt{2}} = r \cdot \sqrt{2}.$$

Mivel $OD = 1$, ezért

$$OO_2 = 1 - r,$$

és mivel CO_2 párhuzamos OB és AO_1 szakaszokkal, ezért

$$OB = r + r\sqrt{2}.$$

Az OBO_2 háromszögben Pitagorasz tételét felírva és megoldva:

$$\left(r + r\sqrt{2}\right)^2 + r^2 = (1 - r)^2 = 1 - 2r + r^2$$

$$\left(3 + 2\sqrt{2}\right) r^2 + 2r - 1 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\left(3 + 2\sqrt{2}\right)}}{2\left(3 + 2\sqrt{2}\right)} = \frac{-1 \pm \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{3 + 2\sqrt{2}}$$

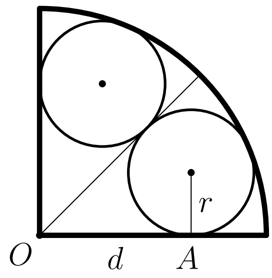
$$r_1 = \frac{-1 + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{3 + 2\sqrt{2}} \qquad r_2 = \frac{-1 - \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{3 + 2\sqrt{2}}$$

Mivel $r_2 < 0$, ezért ez nem lehet a megoldás.

A keresett kör sugara:

$$r = \frac{-1 + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{3 + 2\sqrt{2}}.$$

Második megoldás



Használjuk az ábra jelöléseit!

Meghúzzuk a derékszög szögfelezőjét. A szimmetria miatt mind a két kör egy 45°-os körcikkbe van írva.

Az első megoldás alapján:

$$d = r + r\sqrt{2}$$

Alkalmazzuk a körcikkbe írt kör (5.3.5 fejezet, 107. oldal) összefüggést:

$$d^2 = 1 - 2r \quad \text{illetve} \quad d = r + r\sqrt{2}$$

$$\left(r + r\sqrt{2}\right)^2 = 1 - 2r$$

$$\left(3 + 2\sqrt{2}\right) r^2 + 2r - 1 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\left(3 + 2\sqrt{2}\right)}}{2\left(3 + 2\sqrt{2}\right)} = \frac{-1 \pm \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{3 + 2\sqrt{2}}$$

$$r_1 = \frac{-1 + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{3 + 2\sqrt{2}} \qquad r_2 = \frac{-1 - \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{3 + 2\sqrt{2}}$$

Mivel $r_2 < 0$, ezért ez nem lehet a megoldás.

A keresett kör sugara:

$$r = \frac{-1 + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{3 + 2\sqrt{2}}.$$

Harmadik megoldás

Használjuk a körcikk és érintő köre (5.3.4 fejezet, 106. oldal) összefüggést $\omega = 45°$ szögre, illetve, hogy $\sin 22,5° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

$$r = \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{1 + \sin\frac{\omega}{2}} = \frac{\sin 22,5°}{1 + \sin 22,5°} = \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2 + \sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

A keresett sugár tehát:

$$r = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2 + \sqrt{2-\sqrt{2}}}.$$

Megjegyzés

A megoldások során keresett sugárra kétfélének látszó értéket kaptunk:

$$r = \frac{-1 + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{3 + 2\sqrt{2}} \qquad \text{és} \qquad r = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2 + \sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

A következőekben megmutatjuk, hogy a fenti két érték egyenlő.

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}} &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\cdot\frac{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2-\sqrt{2}}-\left(2-\sqrt{2}\right)}{2+\sqrt{2}} \\
&= \frac{2\sqrt{2-\sqrt{2}}-\left(2-\sqrt{2}\right)}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \\
&= \frac{2\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(2+\sqrt{2}\right)-\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)^2} = \\
&= \frac{2\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}-(4-2)}{6+4\sqrt{2}} = \\
&= \frac{2\sqrt{4+2\sqrt{2}}-2}{6+4\sqrt{2}} = \frac{-1+2\left(\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)}{2\left(3+2\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}-1}{3+2\sqrt{2}} =
\end{aligned}$$

vagyis:

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{-1+\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{3+2\sqrt{2}}$$

És ezt akartuk bizonyítani.

Még egy megjegyzés

Az alábbiakban megmutatjuk ugyanezt a jobb oldalról kezdve (más, nehezebb lépéseket végrehajtva, de rövidebb úton megoldva). Közben felhasználjuk, hogy:

$$2-\sqrt{2} = \left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2}{2+\sqrt{2}}.$$

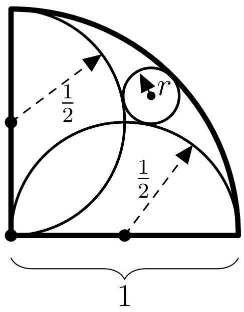
$$\begin{aligned}
\frac{-1+\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{3+2\sqrt{2}} &= \frac{-1+\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)}}{2\left(2+\sqrt{2}\right)-1} = \frac{-1+\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)}}{\left(\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)}-1\right)\left(\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)}+1\right)} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)}+1} = \frac{1}{\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)}+1}\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \\
&= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)}\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2(4-2)}+\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \\
&= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}
\end{aligned}$$

megkaptuk tehát innen is:

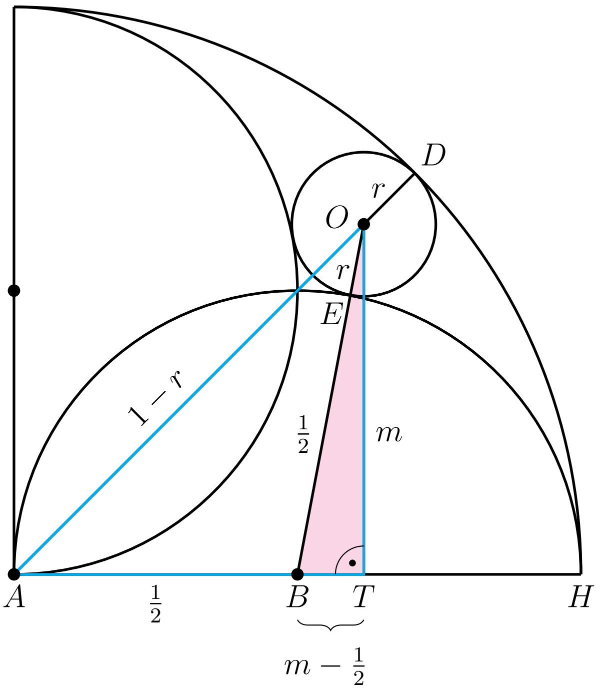
$$\frac{-1+\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

15. feladat (10)

Egy egység sugarú negyedkörcikkbe megrajzolunk két $\frac{1}{2}$ sugarú félkörívet. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a negyedkört és a két félkört az ábra szerint?



Megoldás



Használjuk az ábra jelöléseit!

Az ismeretlen kör sugara legyen

$$r = OD = OE.$$

Mivel negyedkörcikk és a két berajzolt félkör is szimmetrikus a körcikk középponti szögének szögfelezőjére, ezért a szögfelező a keresett kis körnek szimmetriatengelye, vagyis az A pontot és O pontot összekötő szakasz a szögfelező. E szakasz meghosszabbítása átmegy D ponton is.

Összekötjük az O és B pontokat. Ez a szakasz átmegy az E ponton is.

Mivel $AD = 1$, ezért

$$AO = 1 - r,$$

és $BE = \frac{1}{2}$, ezért

$$BO = r + \frac{1}{2}.$$

Állítsunk merőlegest a keresett kör O középpontjából a félkör AH átmérőjére, így OT merőleges lesz AH-ra. Vezessünk be új változót, legyen

$$m = OT.$$

Mivel AO szögfelező, ezért ATO háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, tehát

$$AT = OT = m.$$

Továbbá mivel $AB = \frac{1}{2}$, ezért

$$BT = m - \frac{1}{2}.$$

Írjunk akkor föl egy-egy Pitagorasz-tételt ATO és BTO derékszögű háromszögekben!

$$\begin{cases} m^2 + m^2 = (1-r)^2 \\ \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + m^2 = \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Felbontva a zárójeleket:

$$\begin{cases} 2m^2 = 1 - 2r + r^2 & (1) \\ m^2 - m + \frac{1}{4} + m^2 = r^2 + r + \frac{1}{4} & (2) \end{cases}$$

A (2)-ből kivonva az (1)-t, és rendezve:

$$-m + \frac{1}{4} = 3r - \frac{3}{4}$$
$$1 - 3r = m \qquad (3)$$

Ekkor (3)-at visszahelyettesítve (1)-be:

$$2\left(1-3r\right)^2 = 1 - 2r + r^2$$
$$2 - 12r + 18r^2 = 1 - 2r + r^2$$
$$17r^2 - 10r + 1 = 0$$

$$r_1 = \frac{5-2\sqrt{2}}{17}; \qquad r_2 = \frac{5+2\sqrt{2}}{17}$$

és (3)-ból

$$m_1 = 1 - 3 \cdot \frac{5-2\sqrt{2}}{17} = \frac{2+6\sqrt{2}}{17}; \qquad m_2 = 1 - 3 \cdot \frac{5+2\sqrt{2}}{17} = \frac{2-6\sqrt{2}}{17}$$

Mivel $m_2 < 0$, ezért ez nem lehet a megoldás. (Ebben az esetben a kör a félkörívek és negyedkörívek meghosszabbítását érintené az ábrán kívül.)

A keresett kör sugara:

$$r = \frac{5-2\sqrt{2}}{17}.$$

.

2. Megoldás

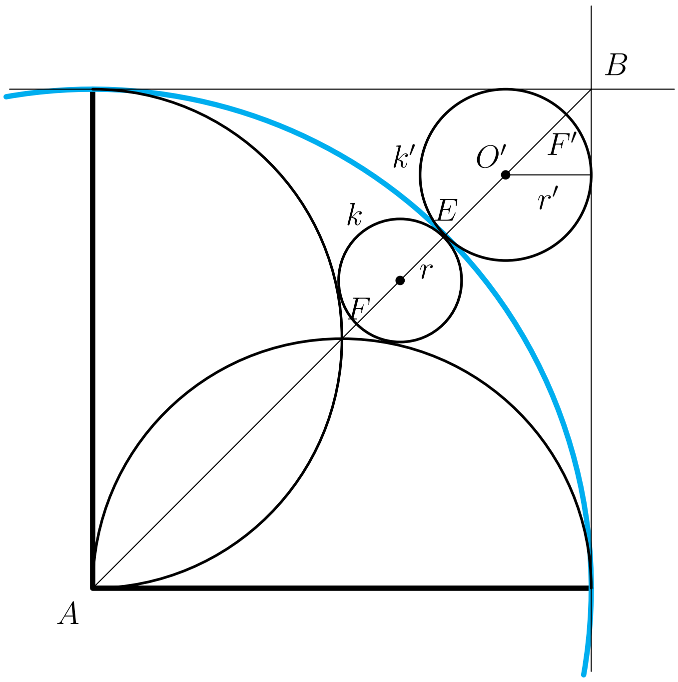
Oldjuk meg inverzióval!

Az inverzió alapköre legyen az adott, A középpontú egység sugarú negyedkör.

A feladat ábráját erre a körre invertálva (és az egyes alakzatok képét vesszővel jelölve) kapjuk a mellékelt ábrát.

Legyen az invertált kör sugara r'.

Az eredeti kör egyik átmérője FE, az invertált köré pedig $F'E$.



Használjuk, hogy:

$$AB = AE + EO' + OB'$$

Mivel

$$AE = 1, EO' = r' \text{ és } OB' = r' \cdot \sqrt{2}$$

ezért

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1 + r' + r' \cdot \sqrt{2} \\
\sqrt{2} - 1 &= r'\left(1 + \sqrt{2}\right) \\
r' &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = 3 - 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

A keresett kör invertált képének, k'-nek F' pontja tehát $1 + 2r'$ távolságra van az inverzió pólusától, A-tól, azaz:

$$AF' = 1 + 2r' = 1 + 2\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = 7 - 4\sqrt{2}.$$

Így a keresett k kör F pontjának távolsága az eredeti helyén a pólustól:

$$AF = \frac{1}{AF'} = \frac{1}{7-4\sqrt{2}} = \frac{1}{7-4\sqrt{2}} \cdot \frac{7+4\sqrt{2}}{7+4\sqrt{2}} = \frac{7+4\sqrt{2}}{17}.$$

Így a keresett kis kör átmérője:

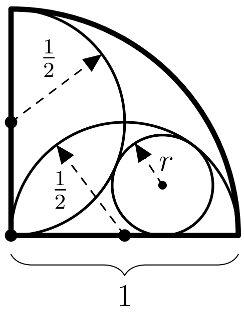
$$EF = 1 - AF = 1 - \frac{7+4\sqrt{2}}{17} = \frac{10-4\sqrt{2}}{17} = \frac{2(5-2\sqrt{2})}{17}.$$

A keresett kör sugara:

$$r = \frac{EF}{2} = \frac{5-2\sqrt{2}}{17}.$$

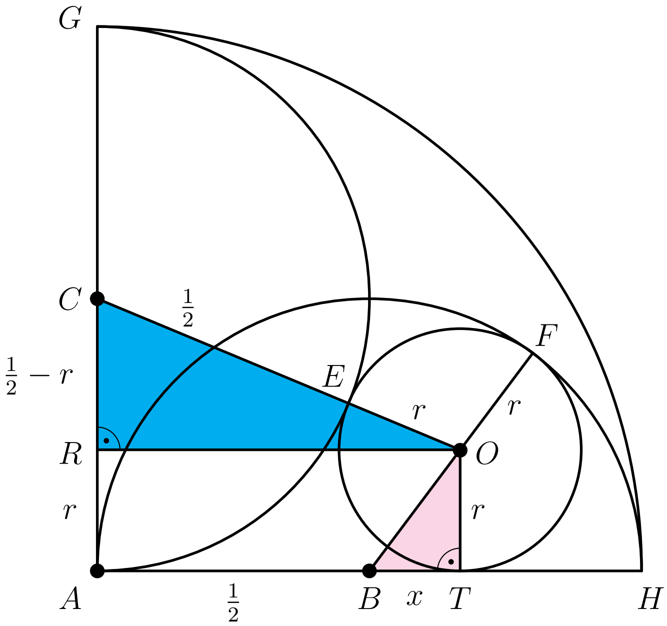
16. feladat (10)

Egy egység sugarú negyedkörbe megrajzolunk két $\frac{1}{2}$ sugarú félkörívet. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti a negyedkörcikk sugarát és a két félkört is az ábra szerint?



Megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



Az ismeretlen kör sugara legyen

$$r = OE = OF = OT.$$

Összekötjük az O és C pontokat. Ez a szakasz átmegy az E ponton is.

Összekötjük az B és O pontokat is. E szakasz meghosszabbítása átmegy az F ponton is.

Az OT sugár merőleges AH érintőre.

Mivel $BF = \frac{1}{2}$, ezért

$$BO = \frac{1}{2} - r,$$

és mivel $CE = \frac{1}{2}$, ezért

$$CO = r + \frac{1}{2}.$$

Állítsunk merőlegest a keresett kör O középpontjából a negyedkör AG sugarára, így OR merőleges lesz AC-re.

Az $ATOR$ négyszögben három belső szög derékszög, vagyis a négyszög téglalap. Tehát

$$AR = OT = r.$$

Vezessünk be új változót, legyen

$$x = BT.$$

Ekkor mivel $AB = \frac{1}{2}$, ezért

$$AT = RO = x + \frac{1}{2}.$$

Továbbá mivel $CA = \frac{1}{2}$ és $RA = OT = r$, ezért

$$CR = \frac{1}{2} - r.$$

Írjunk akkor föl egy-egy Pitagorasz-tételt BTO és CRO derékszögű háromszögekben!

$$\begin{cases} x^2 + r^2 = \left(\frac{1}{2} - r\right)^2 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - r\right)^2 = \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Felbontva a zárójeleket:

$$\begin{cases} x^2 + r^2 = \frac{1}{4} - r + r^2 & (1) \\ x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - r + r^2 = r^2 + r + \frac{1}{4} & (2) \end{cases}$$

A (2)-ből kivonva az (1)-t és rendezve, kapjuk:

$$\frac{1}{2} + x - r = 2r$$

$$x = 3r - \frac{1}{2} \qquad (3)$$

Visszahelyettesítve (3)-t (1)-be:

$$\left(3r - \frac{1}{2}\right)^2 + r^2 = \frac{1}{4} - r + r^2$$

$$9r^2 - 3r + \frac{1}{4} + r^2 = \frac{1}{4} - r + r^2$$

$$9r^2 - 2r = 0$$

$$r \cdot (9r - 2) = 0$$

$$r_1 = \frac{2}{9}; \qquad r_2 = 0$$

(3)-ból

$$x_1 = 3 \cdot \frac{2}{9} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}; \qquad x_2 = 3 \cdot 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

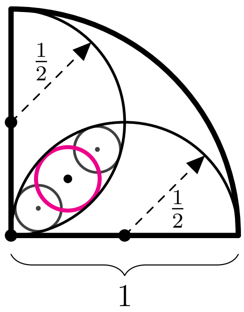
Mivel $r_2 = 0$, ezért ez nem lehet a megoldás. A megoldás elfajuló kör az ábra bal alsó sarkában.

A keresett kör sugara:

$$r = \frac{2}{9}.$$

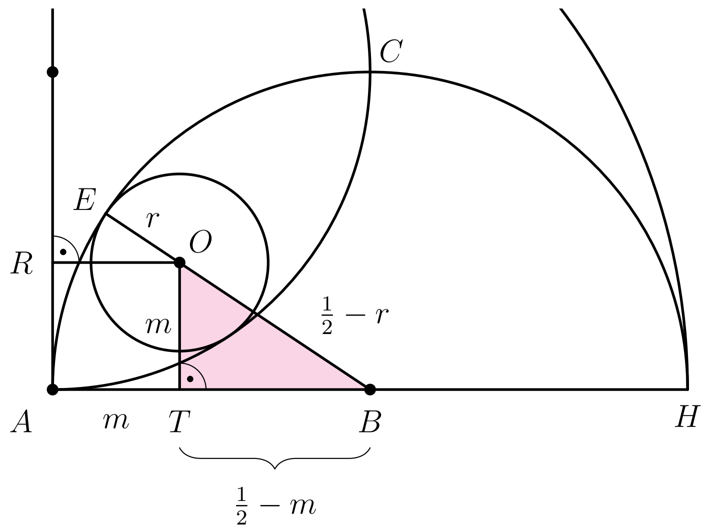
17. feladat (10+)

Egy egység sugarú negyedkörbe megrajzolunk két $\frac{1}{2}$ sugarú félkörívet. Mekkora annak a körnek a maximális r sugara, amelyik belülről érinti a két félkört az ábra szerint?



(Az alábbi animált kép jól szemlélteti a feladatot.)

Megoldás



Használjuk az ábra jelöléseit!nl Rajzoljunk be egy olyan kört, ami mindkét félkörívet belülről érinti, legyen ennek középpontja O pont.

Mivel a negyedkörcikk és a két berajzolt körív is szimmetrikus a körcikk középponti szögének szögfelezőjére, ezért a szögfelező a kis körnek is szimmetriatengelye, vagyis az A pontot és O pontot összekötő szakasz a szögfelező. (És hasonló okokból ezen van rajta a két félkörív metszéspontja is, C.)

Az ismeretlen kör sugara legyen:

$$r = OE$$

Összekötjük B és O pontokat. E szakasz meghosszabbításán rajta van E pont.

Állítsunk merőlegest a kis kör középpontjából a félkörcikk átmérőjére, így OT merőleges lesz AB-re.

Vezessünk be még egy változót, legyen:

$$m = OT.$$

Mivel AO szögfelező, ezért

$$AT = OT = m.$$

Tekintettel arra, hogy O pont az AC szakasz pontja, ezért

$$0 < m < \frac{1}{2}.$$

És mivel $EB = AB = \frac{1}{2}$, ezért

$$OB = \frac{1}{2} - r$$

illetve

$$TB = \frac{1}{2} - m.$$

Írjunk hát föl egy Pitagorasz-tételt OTB derékszögű háromszögben és rendezzük!

$$\left(\frac{1}{2}-r\right)^2=\left(\frac{1}{2}-m\right)^2+m^2$$
$$\left(\frac{1}{2}-r\right)^2=2m^2-m+\frac{1}{4}$$
$$\left(\frac{1}{2}-r\right)^2=2\left(m-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$$

Mivel $2\left(m-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}>0$ és $0<r<\frac{1}{2}$, ezért

$$\frac{1}{2}-r=\sqrt{2\left(m-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}}$$

ahonnan:

$$r=\frac{1}{2}-\sqrt{2\left(m-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}}$$

Ez a kifejezés akkor lesz maximális, ha a négyzetgyökjeles kifejezés, és így a gyökjel alatti kifejezés is minimális. Mivel

$$\left(m-\frac{1}{4}\right)^2\geq 0$$

ezért a négyzetgyökjel alatt álló másodfokú kifejezésre teljesül, hogy:

$$2\left(m-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}\geq 2\cdot 0+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

Tehát a négyzetgyök alatti kifejezés akkor lesz minimális $\left(\frac{1}{8}\right)$, ha $m=\frac{1}{4}$. Ekkor pedig

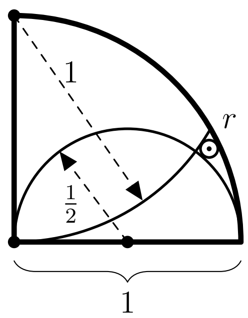
$$r=\frac{1}{2}-\sqrt{2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Tehát a maximális sugarú beírható kör sugara:

$$r=\frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

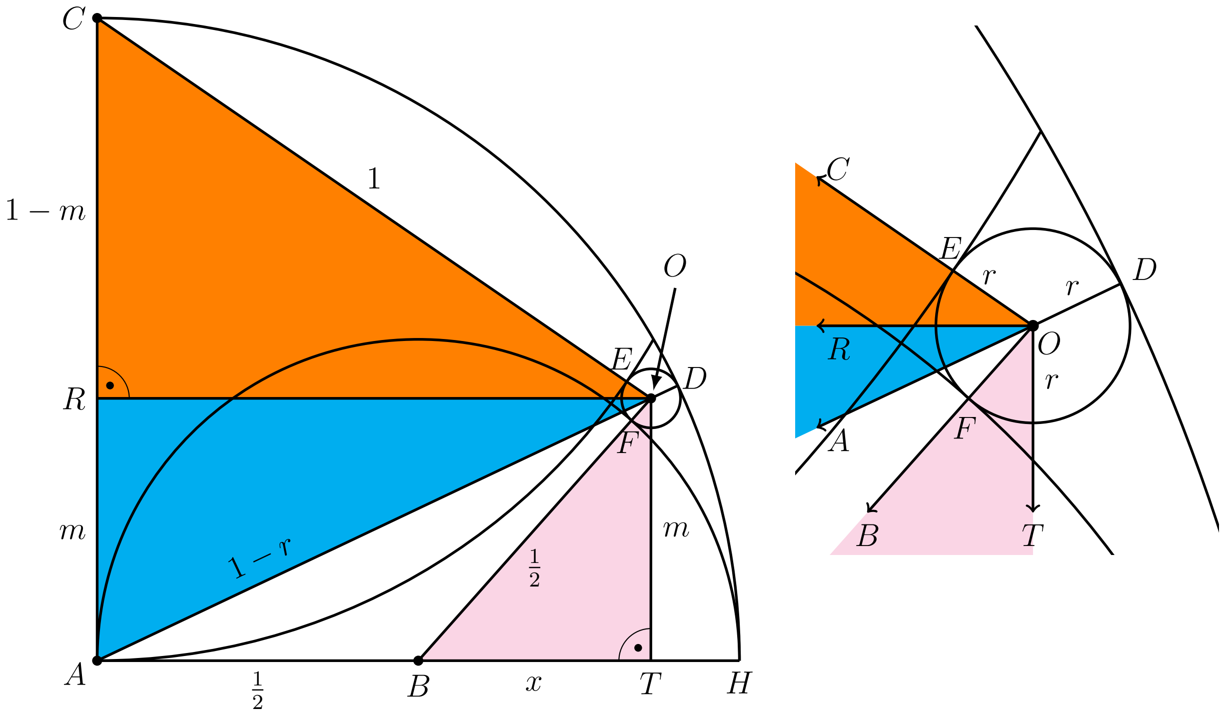
18. feladat (10+)

Egy egységnyi sugarú negyedkörbe megrajzolunk egy 1 és egy $\frac{1}{2}$ sugarú körívet. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a negyedkört és a két körívet az ábra szerint?



Megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



Az ismeretlen kör sugara legyen

$$r = OD = OE = OF.$$

Összekötjük az O és B pontokat. Ez a szakasz átmegy az F ponton is.

Összekötjük az O és C pontokat. Ez a szakasz átmegy az E ponton is.

Összekötjük az O és A pontokat is. E szakasz meghosszabbítása átmegy a D ponton is.

Mivel $CE = 1$, ezért

$$OC = r + 1,$$

és $AD = 1$, ezért

$$OA = 1 - r.$$

Továbbá mivel $BF = \frac{1}{2}$, ezért

$$OB = r + \frac{1}{2}.$$

Állítsunk merőlegest a keresett kör középpontjából a negyedkörcikk sugaraira, így OT merőleges lesz AH-ra, illetve OR pedig AC-re.

Az $ATOR$ négyszögben három belső szög derékszög, ezért a négyszög téglalap.

Vezessünk be most célszerűen még két változót:

$$x = BT \quad \text{és} \quad m = OT.$$

Így

$$RO = AT = x + \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad CR = 1 - RA = 1 - OT = 1 - m.$$

Írjunk fel most már ezekkel három Pitagorasz-tételt: BTO, ATO és CRO derékszögű háromszögekben!

$$\begin{cases} x^2 + m^2 = \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + m^2 = (1 - r)^2 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (1 - m)^2 = (r + 1)^2 \end{cases}$$

Felbontva a zárójeleket:

$$\begin{cases} x^2 + m^2 = r^2 + r + \frac{1}{4} & (1) \\ x^2 + x + \frac{1}{4} + m^2 = 1 - 2r + r^2 & (2) \\ x^2 + x + \frac{1}{4} + 1 - 2m + m^2 = r^2 + 2r + 1 & (3) \end{cases}$$

A (2)-ből kivonva az (1)-et, aztán átrendezve kapjuk az alábbiakat:

$$x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - 3r$$
$$x = \frac{1}{2} - 3r \qquad (4)$$

A (3)-ból kivonva a (2)-t, aztán átrendezve kapjuk:

$$1 - 2m = 4r$$
$$m = \frac{1}{2} - 2r \qquad (5)$$

a (4) és (5) kifejezéseket visszahelyettesítve (1)-be:

$$\left(\frac{1}{2} - 3r\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 2r\right)^2 = r^2 + r + \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{4} - 3r + 9r^2 + \frac{1}{4} - 2r + 4r^2 = r^2 + r + \frac{1}{4}$$
$$12r^2 - 6r - \frac{1}{4} = 0$$

$$r_1 = \frac{3-\sqrt{6}}{12}; \qquad r_2 = \frac{3+\sqrt{6}}{12}$$

(5)-ből

$$m_1 = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{3-\sqrt{6}}{12} = \frac{\sqrt{6}}{6};$$
$$m_2 = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{3+\sqrt{6}}{12} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$$

(4)-ből

$$x_1 = \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{3-\sqrt{6}}{12} = \frac{-1+\sqrt{6}}{4};$$
$$x_2 = \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{3+\sqrt{6}}{12} = \frac{-1-\sqrt{6}}{4}$$

Mivel $m_2 < 0$ és $x_2 < 0$, ezért ez nem lehet a megoldás. (Ebben az esetben a kör a körívek és negyedkörív meghosszabbítását érintené az ábrán kívül.)

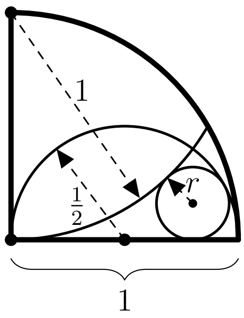
A keresett kör sugara:

$$r = \frac{3-\sqrt{6}}{12}.$$

.

19. feladat (10)

Egy egység sugarú negyedkörbe megrajzolunk egy 1 és egy $\frac{1}{2}$ sugarú körívet. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti a köríveket és a negyedkörcikk sugarát az ábra szerint?



Megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!

Az ismeretlen kör sugara legyen

$$r = OE = OF = OT.$$

Összekötjük az O és C pontokat. Ez a szakasz átmegy az F ponton is.

Összekötjük az B és O pontokat is. E szakasz meghosszabbítása átmegy az E ponton is.

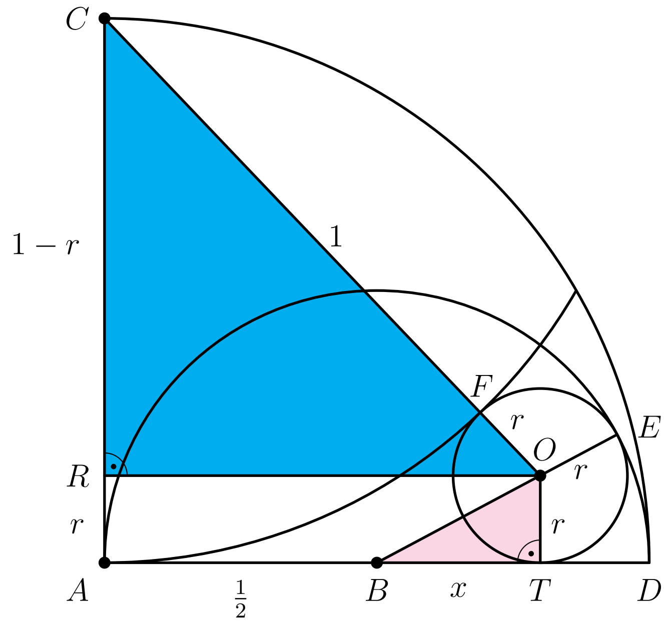
Az OT sugár merőleges AD érintőre.

Mivel $BE = \frac{1}{2}$, ezért

$$BO = \frac{1}{2} - r,$$

és $CF = 1$, ezért

$$CO = r + 1.$$



Állítsunk merőlegest a keresett kör O középpontjából a negyedkörcikk AC sugarára, így OR merőleges lesz AC-re.

Az $ATOR$ négyszögben három belső szög derékszög, vagyis a négyszög téglalap. Tehát

$$AR = OT = r.$$

Vezessünk be új változót, legyen

$$x = BT.$$

Ekkor mivel $AB = \frac{1}{2}$, ezért

$$RO = AT = x + \frac{1}{2}.$$

Írjunk akkor föl egy-egy Pitagorasz-tételt BTO és CRO derékszögű háromszögekben!

$$\begin{cases} x^2 + r^2 = \left(\frac{1}{2} - r\right)^2 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (1-r)^2 = (r+1)^2 \end{cases}$$

Felbontva a zárójeleket:

$$\begin{cases} x^2 + r^2 = \frac{1}{4} - r + r^2 & (1) \\ x^2 + x + \frac{1}{4} + 1 - 2r + r^2 = r^2 + 2r + 1 & (2) \end{cases}$$

A (2)-ből kivonva az (1)-t, kapjuk

$$\frac{5}{4} + x - 2r = \frac{3}{4} + 3r$$

$$x = 5r - \frac{1}{2} \qquad (3)$$

Visszahelyettesítve (3)-t (1)-be:

$$\left(5r - \frac{1}{2}\right)^2 + r^2 = \frac{1}{4} - r + r^2$$

$$25r^2 - 5r + \frac{1}{4} + r^2 = \frac{1}{4} - r + r^2$$

$$25r^2 - 4r = 0$$

$$r \cdot (25r - 4) = 0$$

$$r_1 = \frac{4}{25}; \qquad r_2 = 0$$

(3)-ból

$$x_1 = 5 \cdot \frac{4}{25} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}; \qquad x_2 = 5 \cdot 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

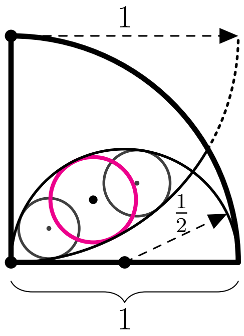
Mivel $r_2 = 0$, ezért ez nem lehet a megoldás. (A megoldás elfajuló kör az ábra bal alsó sarkában.)

A keresett kör sugara:

$$r = \frac{4}{25}.$$

20. feladat (11+)

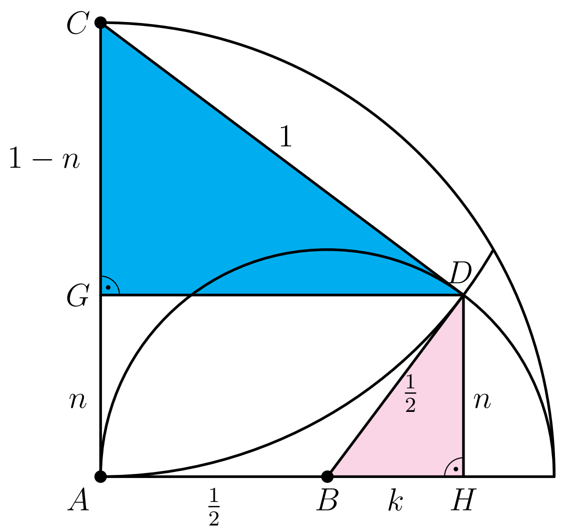
Egy egység sugarú negyedkörbe megrajzolunk egy 1 és egy $\frac{1}{2}$ sugarú körívet. Mekkora annak a körnek a maximális sugara, amelyik belülről érinti a két körívet az ábra szerint?



(Az alábbi animált kép jól szemlélteti a feladatot.)

Megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



Határozzuk meg elsőként D pontnak, a két körív metszéspontjának távolságát a negyedkörcikk sugaraitól!

Kössük össze D pontot B-vel és C-vel.

Állítsunk merőlegest D-ből a negyedkörcikk sugaraira, így OH merőleges lesz AB-re és DG pedig AC-re.

Vezessünk be két változót az ismeretlen távolságokra, legyen:

$$n = DH \text{ és } k = BH.$$

A keletkezett $AHDG$ négyszög három szöge derékszög, vagyis téglalap.
És mivel $BD = \frac{1}{2}$ és $CD = 1$, ezért

$$CG = 1 - GA = 1 - DH = 1 - n \text{ és } GD = AH = \frac{1}{2} + k.$$

Írjunk föl két Pitagorasz tételt DHB és CGD derékszögű háromszögekben!

$$\begin{cases} k^2 + n^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + (1-n)^2 = 1^2 \end{cases}$$

Felbontva a zárójelet

$$\begin{cases} k^2 + n^2 = \frac{1}{4} & (1) \\ k^2 + k + \frac{1}{4} + 1 - 2n + n^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

A (2)-ből kivonva (1)-et és rendezve:

$$k + \frac{5}{4} - 2n = \frac{3}{4}$$

$$k = 2n - \frac{1}{2} \qquad (3)$$

(3)-at visszahelyettesítve (1)-be:

$$\left(2n-\frac{1}{2}\right)^2+n^2=\frac{1}{4}$$
$$4n^2-2n+\frac{1}{4}+n^2=\frac{1}{4}$$
$$5n^2-2n=0$$
$$n\cdot(5n-2)=0$$

$$n_1=\frac{2}{5}; \qquad n_2=0$$

(3)-ból

$$k_1=2\cdot\frac{2}{5}-\frac{1}{2}=\frac{3}{10}; \qquad k_2=2\cdot 0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

Mivel n_2 és k_2 a két körív másik metszéspontját határozza meg, ezért D távolsága a a negyedkörcikk sugaraitól:

$$DG=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}=\frac{4}{5}$$
$$DH=\frac{2}{5}.$$

Rajzoljunk akkor tehát be egy olyan kört, ami mindkét körívet belülről érinti, legyen ennek középpontja O pont.

Az ismeretlen kör sugara legyen:

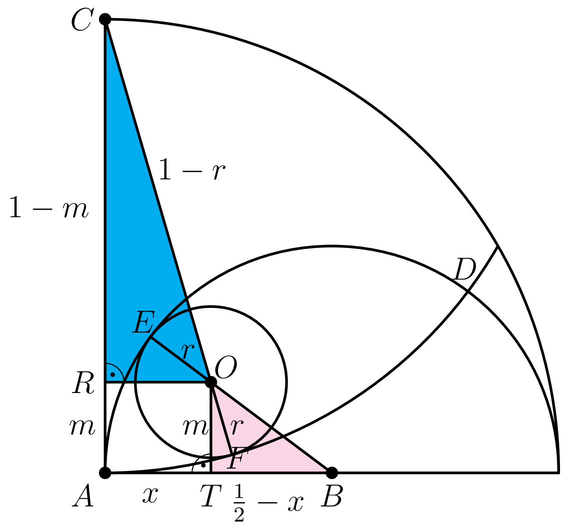
$$r=OE=OF.$$

Összekötjük B és O pontokat. E szakasz meghosszabbításán rajta van E pont.

Összekötjük C és O pontokat is, e szakasz meghosszabbításán pedig rajta van F pont.

Állítsunk merőlegest a keresett kör középpontjából a negyedkörcikk sugaraira, így OT merőleges lesz AB-re, és OR pedig AC-re.

Vezessünk be még két változót, legyen:



$$m=OT \text{ és } x=AT.$$

Ekkor $ATOR$ négyszögben három belső szög derékszög, vagyis a négyszög téglalap. Tehát

$$AR=OT=m, \text{ illetve } RO=AT=x.$$

Mivel O pont a két körív között van, ezért távolsága a negyedkörcikk sugaraitól legfeljebb D pont távolsága, azaz

$$0\leq m\leq\frac{2}{5} \text{ és } 0\leq x\leq\frac{4}{5}.$$

És mivel $EB = AB = \frac{1}{2}$, ezért
$$OB = \frac{1}{2} - r$$
illetve
$$TB = \frac{1}{2} - x.$$
Továbbá mivel $CF = 1$, ezért
$$CO = 1 - r.$$
Írjunk föl két Pitagorasz-tételt OTB és CRO derékszögű háromszögekben!
$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + m^2 = \left(\frac{1}{2} - r\right)^2 \\ x^2 + (1-m)^2 = (1-r)^2 \end{cases}$$
Felbontva a zárójeleket:
$$\begin{cases} \frac{1}{4} - x + x^2 + m^2 = \frac{1}{4} - r + r^2 & (1) \\ x^2 + 1 - 2m + m^2 = 1 - 2r + r^2 & (2) \end{cases}$$
Az (1)-ből kivonva (2)-t és átrendezve:
$$-\frac{3}{4} - x + 2m = -\frac{3}{4} + r$$
$$x = 2m - r \qquad (3)$$
(3)-at visszahelyettesítve (2)-be és átrendezve:
$$\begin{aligned} (2m-r)^2 + 1 - 2m + m^2 &= 1 - 2r + r^2 \\ 4m^2 - 4mr + r^2 + 1 - 2m + m^2 &= 1 - 2r + r^2 \\ 5m^2 - 2m &= 4mr - 2r \\ 5m^2 - 2m &= r \cdot (4m - 2) \end{aligned}$$
mivel $0 \leq m \leq \frac{2}{5}$, ezért $4m - 2 \neq 0$, tehát
$$r = \frac{5m^2 - 2m}{4m - 2}.$$
Keressük meg, mikor lesz r értéke maximális m-től függően!

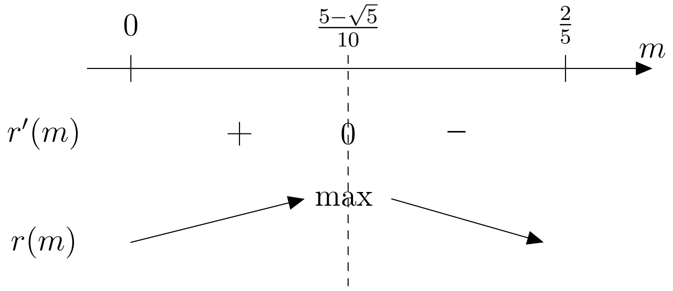
A megoldás befejezése deriválással:

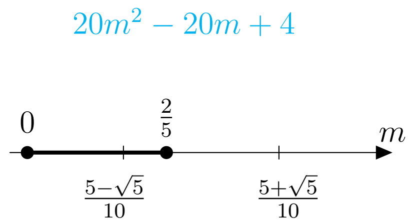
Tekintsük $r(m) = \frac{5m^2-2m}{4m-2}$ függvényt, ahol $m \in \left[0; \frac{2}{5}\right]$.
$$\begin{aligned} r'(m) &= \frac{(10m-2)\cdot(4m-2) - (5m^2-2m)\cdot 4}{(4m-2)^2} = \\ &= \frac{40m^2 - 20m - 8m + 4 - 20m^2 + 8m}{(4m-2)^2} = \frac{20m^2 - 20m + 4}{(4m-2)^2} \end{aligned}$$

Keressük meg, mikor pozitív a derivált!

$$\frac{20m^2-20m+4}{(4m-2)^2}=0$$
$$20m^2-20m+4=0$$
$$m_1=\frac{5-\sqrt{5}}{10}\in\left[0;\frac{2}{5}\right];\qquad m_2=\frac{5+\sqrt{5}}{10}\notin\left[0;\frac{2}{5}\right]$$

Készítsünk előjeltáblázatot a deriváltfüggvényhez!





Tehát az $r(m)$ függvénynek maximuma van

$$m=\frac{5-\sqrt{5}}{10}\text{ esetén.}$$

Ekkor visszahelyettesítve m értékét $r(m)=\frac{5m^2-2m}{4m-2}$ függvénybe:

$$r=\frac{5\cdot\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)^2-2\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{10}}{4\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{10}-2}=\frac{\frac{25-10\sqrt{5}+5}{20}-\frac{5-\sqrt{5}}{5}}{\frac{10-2\sqrt{5}-10}{5}}=\frac{\frac{30-10\sqrt{5}-20+4\sqrt{5}}{20}}{-\frac{2\sqrt{5}}{5}}=$$
$$=\frac{10-6\sqrt{5}}{20}\cdot\left(-\frac{5}{2\sqrt{5}}\right)=-\frac{5-3\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$$

Tehát a maximális beírható kör sugara:

$$r=\frac{3-\sqrt{5}}{4}.$$

A megoldás befejezése elemi úton:

Alakítsuk át a kapott $\frac{5m^2-2m}{4m-2}$ kifejezést, az egyszerűség kedvéért vezessünk be új változót, legyen

$$y=\frac{1}{2}-m\qquad\text{azaz}\qquad m=\frac{1}{2}-y.$$

Mivel $0\le m\le\frac{2}{5}$, ezért $\frac{1}{10}\le y\le\frac{1}{2}$.

Ekkor

$$r=\frac{5m^2-2m}{4m-2}=\frac{5\left(\frac{1}{2}-y\right)^2-2\left(\frac{1}{2}-y\right)}{4\cdot\left(\frac{1}{2}-y\right)-2}=\frac{\frac{5}{4}-5y+5y^2-1+2y}{2-4y-2}=$$
$$=\frac{5y^2-3y+\frac{1}{4}}{-4y}=-\frac{5}{4}y+\frac{3}{4}-\frac{1}{16y}=\frac{3}{4}-\left(\frac{5}{4}y+\frac{1}{16y}\right)$$

Az r értéke úgy lesz maximális, ha a zárójelen belüli érték minimális.
Használjuk a számtani és mértani közép közti összefüggést az $\frac{5}{4}y$ és az $\frac{1}{16y}$ pozitív tagokra.

$$\frac{5}{4}y + \frac{1}{16y} \geq 2\sqrt{\frac{5}{4}y \cdot \frac{1}{16y}} = 2\sqrt{\frac{5}{64}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

Tehát $\frac{5}{4}y + \frac{1}{16y}$ minimális értéke $\frac{\sqrt{5}}{4}$, és az egyenlőség akkor teljesül, ha a két tag egyenlő:

$$\begin{aligned} \frac{5}{4}y &= \frac{1}{16y} \\ y^2 &= \frac{1}{20} \qquad \text{és mivel } y > 0 \\ y &= \sqrt{\frac{1}{20}} = \frac{\sqrt{5}}{10} \end{aligned}$$

Ekkor viszont:

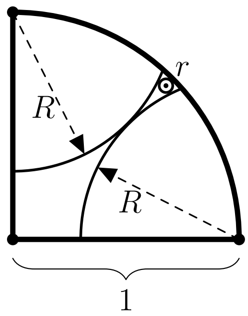
$$m = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \in \left[0; \frac{2}{5}\right]$$

És a maximális sugat megkapjuk a zárójeles kifejezés minimumértékével:

$$r = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}.$$

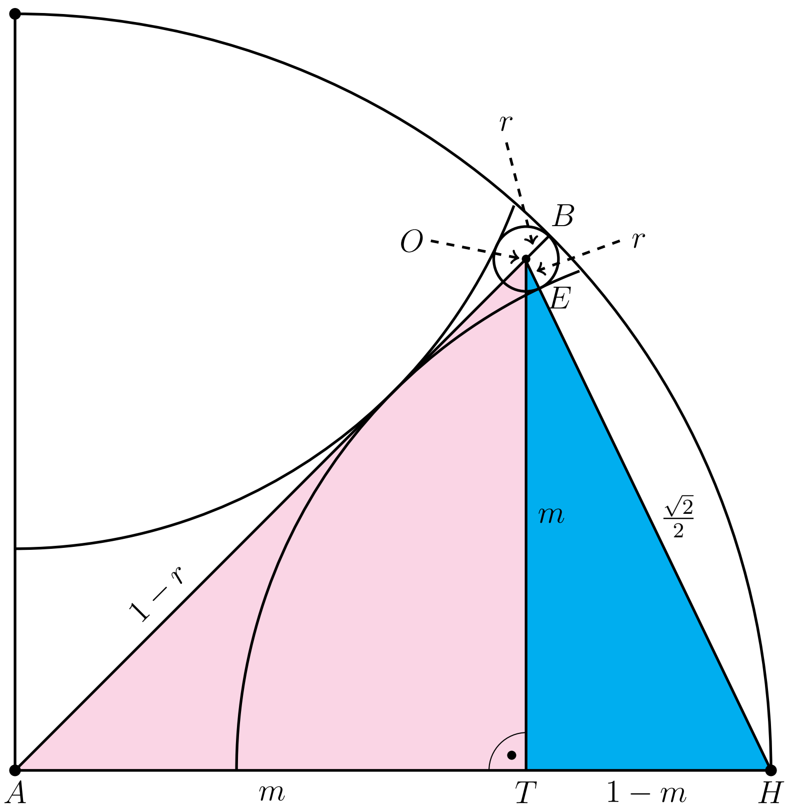
21. feladat (10+)

Egy egység sugarú negyedkörbe megrajzolunk két R sugarú, egymást érintő körívet. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a negyedkört és a két körívet az ábra szerint?



Megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



A nagyobb körívek sugarát (R) már korábban, a 4. feladat megoldásában (16. oldal) megkaptuk:

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Az ismeretlen kör sugara legyen

$$r = OB = OE.$$

Mivel a negyedkörcikk és a két berajzolt körív is szimmetrikus a körcikk középponti szögének szögfelezőjére, ezért a szögfelező a keresett kis körnek is szimmetriatengelye, vagyis az A pontot és O pontot összekötő szakasz a szögfelező. E szakasz meghosszabbítása átmegy a B ponton is.

Összekötjük az O és H pontokat. Ez a szakasz átmegy az E ponton is.

Mivel $AB = 1$, ezért

$$AO = 1 - r,$$

és $EH = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ezért

$$OH = r + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Állítsunk merőlegest a keresett kör középpontjából a negyedkörcikk sugarára, így OT merőleges lesz AH-ra. Vezessünk be egy új változót, legyen:

$$m = OT.$$

Mivel AO szögfelező, ezért ATO háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, tehát

$$AT = OT = m.$$

Ekkor viszont, mivel $AH = 1$, ezért

$$TH = 1 - m.$$

Írjunk föl egy-egy Pitagorasz-tételt ATO és HTO derékszögű háromszögekben!

$$\begin{cases} m^2 + m^2 = (1-r)^2 \\ (1-m)^2 + m^2 = \left(r + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Felbontva a zárójeleket:

$$\begin{cases} 2m^2 = 1 - 2r + r^2 & (1) \\ 1 - 2m + m^2 + m^2 = r^2 + \sqrt{2} \cdot r + \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

A (2)-ből kivonva az (1)-et, aztán átrendezve kapjuk az alábbiakat:

$$1 - 2m = \left(\sqrt{2} + 2\right) r - \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{-\sqrt{2} - 2}{2} \cdot r + \frac{3}{4} \qquad (3)$$

a (3) kifejezést visszahelyettesítve (1)-be:

$$2 \cdot \left(\frac{-\sqrt{2} - 2}{2} \cdot r + \frac{3}{4}\right)^2 = 1 - 2r + r^2$$

$$2 \cdot \left(\frac{2 + 4\sqrt{2} + 4}{4} \cdot r^2 + \frac{-3\sqrt{2} - 6}{4} \cdot r + \frac{9}{16}\right) = 1 - 2r + r^2$$

$$\frac{6 + 4\sqrt{2}}{2} \cdot r^2 + \frac{-6 - 3\sqrt{2}}{2} \cdot r + \frac{9}{8} = 1 - 2r + r^2$$

$$\frac{4 + 4\sqrt{2}}{2} \cdot r^2 + \frac{-2 - 3\sqrt{2}}{2} \cdot r + \frac{1}{8} = 0$$

$$\left(16 + 16\sqrt{2}\right) r^2 + \left(-8 - 12\sqrt{2}\right) r + 1 = 0$$

$$\begin{aligned}
r_{1,2} &= \frac{8+12\sqrt{2} \pm \sqrt{\left(-8-12\sqrt{2}\right)^2 - 4\cdot\left(16+16\sqrt{2}\right)\cdot 1}}{32+32\sqrt{2}} = \\
&= \frac{8+12\sqrt{2} \pm \sqrt{64+192\sqrt{2}+288-64-64\sqrt{2}}}{32+32\sqrt{2}} = \\
&= \frac{8+12\sqrt{2} \pm \sqrt{288+128\sqrt{2}}}{32+32\sqrt{2}} = \\
&= \frac{8+12\sqrt{2} \pm \sqrt{\left(16+4\sqrt{2}\right)^2}}{32+32\sqrt{2}} = \frac{8+12\sqrt{2} \pm \left(16+4\sqrt{2}\right)}{32+32\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Amiből

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{8+12\sqrt{2}+\left(16+4\sqrt{2}\right)}{32+32\sqrt{2}} = \frac{24+16\sqrt{2}}{32+32\sqrt{2}} = \frac{3+2\sqrt{2}}{4+4\sqrt{2}} = \\
&= \frac{3+2\sqrt{2}}{4+4\sqrt{2}} \cdot \frac{4-4\sqrt{2}}{4-4\sqrt{2}} = \frac{12-12\sqrt{2}+8\sqrt{2}-8\cdot 2}{16-16\cdot 2} = \frac{-4-4\sqrt{2}}{-16} = \frac{1+\sqrt{2}}{4};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_2 &= \frac{8+12\sqrt{2}-\left(16+4\sqrt{2}\right)}{32+32\sqrt{2}} = \frac{-8+8\sqrt{2}}{32+32\sqrt{2}} = \frac{-1+\sqrt{2}}{4+4\sqrt{2}} = \\
&= \frac{-1+\sqrt{2}}{4+4\sqrt{2}} \cdot \frac{4-4\sqrt{2}}{4-4\sqrt{2}} = \frac{-4+4\sqrt{2}+4\sqrt{2}-4\cdot 2}{16-16\cdot 2} = \frac{-12+8\sqrt{2}}{-16} = \frac{3-2\sqrt{2}}{4};
\end{aligned}$$

Tehát:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{4}; \qquad r_2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{4}$$

(3)-ból

$$\begin{aligned}
m_1 &= \frac{-\sqrt{2}-2}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2-3\sqrt{2}}{8}; \\
m_2 &= \frac{-\sqrt{2}-2}{2} \cdot \frac{3-2\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4+\sqrt{2}}{8}
\end{aligned}$$

Mivel $m_1 < 0$, ezért ez nem lehet a megoldás. (Ebben az esetben a kör a körívek és illetve a negyedkörív meghosszabbítását érintené az ábrán kívül.)

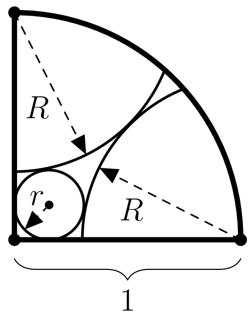
A keresett kör sugara:

$$r = \frac{3-2\sqrt{2}}{8}.$$

.

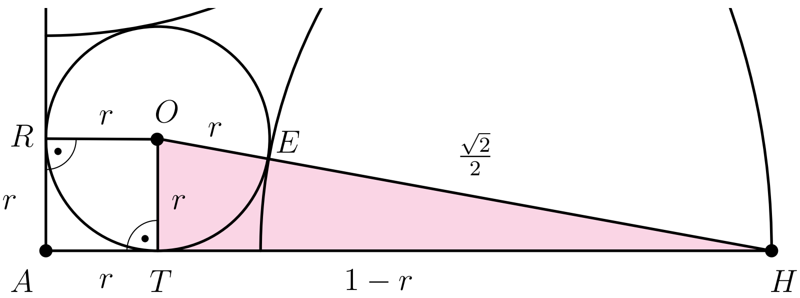
22. feladat (10+)

Egy egység sugarú negyedkörbe megrajzolunk két R sugarú, egymást érintő körívet. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a negyedkörcikk sugarait és a két körívet is az ábra szerint?



Megoldás

Nézzük a feladat szempontjából fontos részt kiemeltük. Használjuk az ábra jelöléseit!



A nagyobb körívek sugarát (R) már korábban, a 4. feladat megoldásában (16. oldal) megkaptuk:

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vezessünk be változót az ismeretlen kör sugarára, legyen:

$$r = OE = OT = OR.$$

Összekötjük az O és H pontokat. Ez a szakasz átmegy az E ponton is.

Az OR sugár merőleges AR érintőre, OT sugár pedig AH érintőre. Az $ATOR$ négyszögben három belső szög derékszög, és két szomszédos oldala $OR = OT$ sugár hosszúságú, vagyis a négyszög négyzet.

Emiatt $AT = r$ és mivel $AH = 1$, ezért

$$TH = 1 - r.$$

Mivel $HE = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ezért

$$OH = r + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Írjunk föl egy Pitagorasz-tételt HTO derékszögű háromszögben és rendezzük!

$$(1-r)^2 + r^2 = \left(r + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$
$$1 - 2r + r^2 + r^2 = r^2 + \sqrt{2}\cdot r + \frac{1}{2}$$
$$r^2 + \left(-2-\sqrt{2}\right) r + \frac{1}{2} = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{2+\sqrt{2} \pm \sqrt{\left(-2-\sqrt{2}\right)^2 - 4\cdot 1\cdot \frac{1}{2}}}{2} = \frac{2+\sqrt{2} \pm \sqrt{2+4\sqrt{2}+4-2}}{2} =$$
$$= \frac{2+\sqrt{2} \pm \sqrt{4+4\sqrt{2}}}{2}$$

Tehát:

$$r_1 = \frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{4+4\sqrt{2}}}{2}; \qquad r_2 = \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{4+4\sqrt{2}}}{2}$$

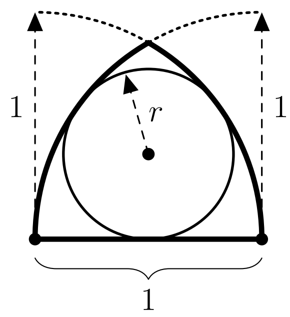
Mivel $r_1 > 1$, ezért ez nem lehet a megoldás. (Ebben az esetben a kör a körívek és negyedkörcikk sugarainak meghosszabbítását érintené az ábrán kívül.)

A keresett kör sugara:

$$r = \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{4+4\sqrt{2}}}{2}.$$

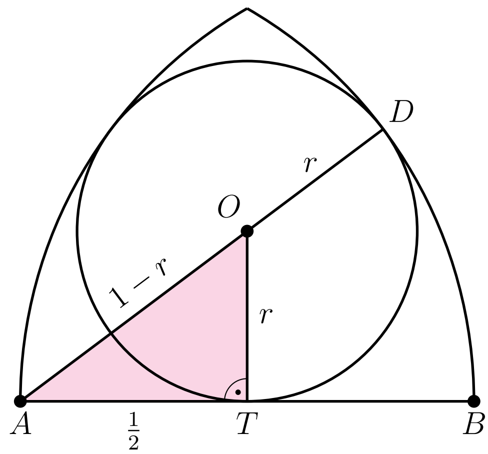
23. feladat (9)

Egy egység hosszú szakasz fölé megrajzolunk két 1 sugarú körívet. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a szakaszt és a két körívet is az ábra szerint?



Megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



Az ismeretlen kör sugara legyen

$$r = OT = OD.$$

OT sugár merőleges AB érintőre.

Összekötjük az A és O pontokat is. E szakasz meghosszabbítása átmegy a D ponton is.

Mivel $AD = 1$, ezért

$$AO = 1 - r.$$

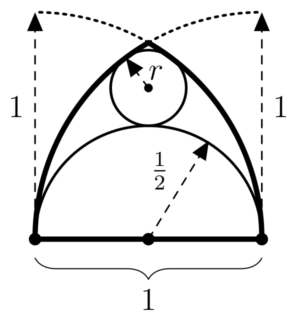
Írjunk fel ATO háromszögben Pitagorasz-tételt, majd rendezzük!

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right)^2 + r^2 &= (1-r)^2 \\
\frac{1}{4} + r^2 &= 1 - 2r + r^2 \\
2r &= \frac{3}{4} \\
r &= \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

A keresett kör sugara:

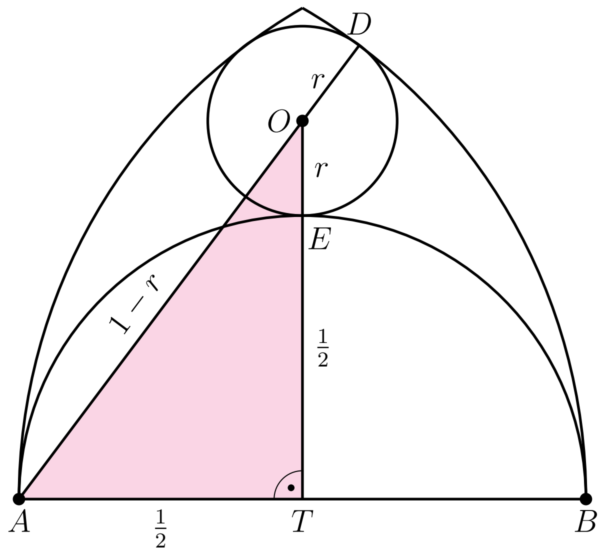
$$r = \frac{3}{8}.$$

24. feladat (9)



Egy egység hosszú szakasz fölé megrajzolunk két 1 sugarú körívet és egy $\frac{1}{2}$ sugarú félkört. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a félkört és a két körívet is az ábra szerint?

Első megoldás



Használjuk az ábra jelöléseit!

Az ismeretlen kör sugara legyen

$$r = OD = OE.$$

OT sugár merőleges AB érintőre.

Összekötjük az A és O pontokat is. E szakasz meghosszabbítása átmegy a D ponton is.

Összekötjük O és T pontokat. Ez a szakasz átmegy az E ponton is.

Mivel $AD = 1$, ezért

$$AO = 1 - r.$$

És $TE = \frac{1}{2}$, ezért

$$OT = r + \frac{1}{2}.$$

Írjunk fel hát ATO háromszögben Pitagorasz-tételt, majd rendezzük!

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 = (1-r)^2$$

$$\frac{1}{4} + r^2 + r + \frac{1}{4} = 1 - 2r + r^2$$

$$3r = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{1}{6}$$

A keresett kör sugara:

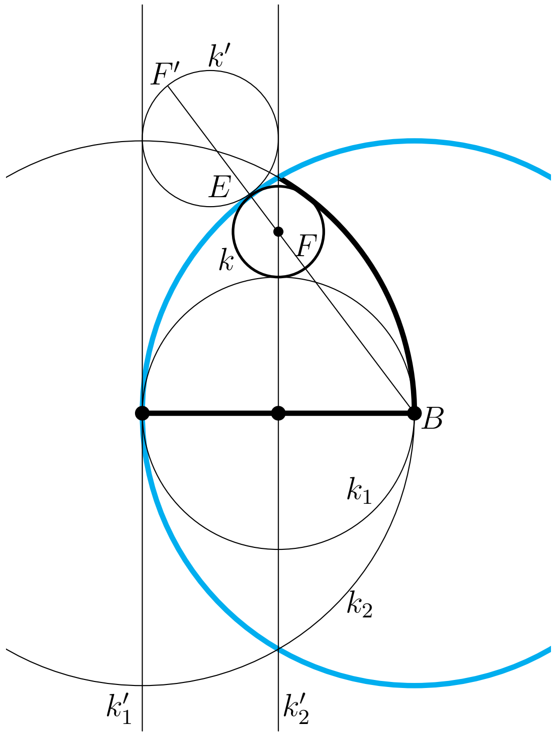
$$r = \frac{1}{6}.$$

Második megoldás

Használjunk inverziót!

Az inverzió alapköre legyen a B középpontú, egység sugarú kör.

A feladat ábráját erre a körre invertálva (és az egyes alakzatok képét vesszővel jelölve) kapjuk a mellékelt ábrát.



A k_1' és k_2' párhuzamos egyenesek távolsága $\frac{1}{2}$ egység.

Tehát az invertált kör átmérője $\frac{1}{2}$ egység.

Így pedig a keresett kör invertált képének F' pontja $\frac{3}{2}$ egység távolságra van az inverzió pólusától, azaz $BF' = \frac{3}{2}$.

A keresett kis kör F pontja tehát eredeti helyén

$$BF = \frac{1}{BF'} = \frac{2}{3}$$

távolságra volt a pólustól.

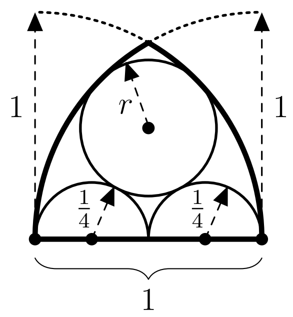
Így a keresett kis kör átmérője:

$$EF = BE - BF = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

A keresett kör sugara:

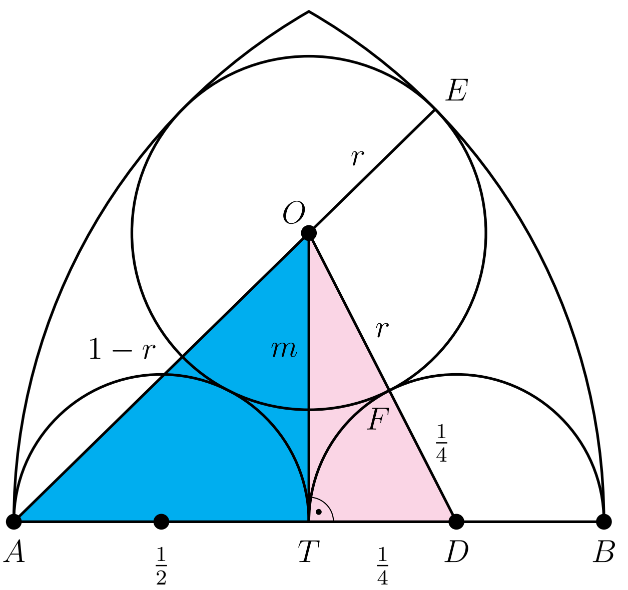
$$r = \frac{EF}{2} = \frac{1}{6}.$$

25. feladat (10)



Egy egység hosszú szakasz fölé megrajzolunk két 1 sugarú körívet és két $\frac{1}{4}$ sugarú félkört. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a két félkört és a két körívet is az ábra szerint?

Első megoldás



Használjuk az ábra jelöléseit!

Az ismeretlen kör sugara legyen

$$r = OE = OF.$$

Összekötjük az O és D pontokat. Ez a szakasz átmegy az F ponton is.

Összekötjük az A és O pontokat is. E szakasz meghosszabbítása átmegy az E ponton is.

Mivel $AE = 1$, ezért

$$AO = 1 - r,$$

és $DF = \frac{1}{4}$, ezért

$$OD = r + \frac{1}{4}.$$

Állítsunk merőlegest a keresett kör O középpontjából az AB szakaszra, így OT merőleges lesz AB-re. Vezessünk be új változót, legyen

$$m = OT.$$

Írjunk akkor föl egy-egy Pitagorasz-tételt DTO és ATO derékszögű háromszögekben!

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + m^2 = \left(r + \dfrac{1}{4}\right)^2 \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + m^2 = (1-r)^2 \end{cases}$$

Felbontva a zárójeleket:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{16} + m^2 = r^2 + \dfrac{1}{2}r + \dfrac{1}{16} & (1) \\ \dfrac{1}{4} + m^2 = 1 - 2r + r^2 & (2) \end{cases}$$

A (2)-ből kivonva az (1)-t, kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{3}{16} &= \frac{15}{16} - \frac{5}{2}r \\ \frac{5}{2}r &= \frac{12}{16} \\ r &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve r értékét (1)-be:

$$\begin{aligned} m^2 &= \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \frac{3}{20} = \frac{6}{25} \\ m_1 &= \frac{\sqrt{6}}{5}; \qquad \left(m_2 = -\frac{\sqrt{6}}{5} < 0\right) \end{aligned}$$

A keresett kör sugara:

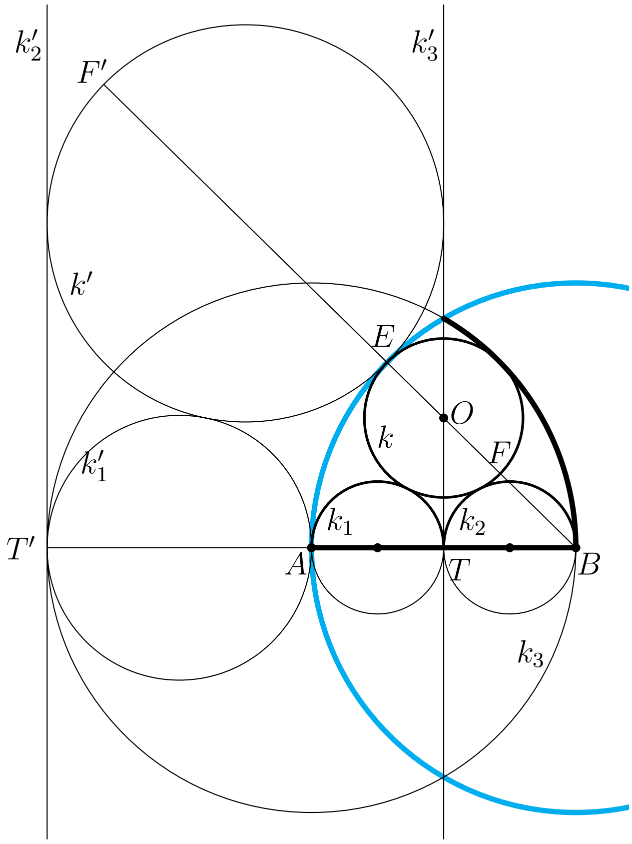
$$r = \frac{3}{10}.$$

.

Második megoldás

Használjunk inverziót!

Az inverzió alapköre legyen az adott, B középpontú egység sugarú kör. A feladat ábráját erre a körre invertálva (és az egyes alakzatok képét vesszővel jelölve) kapjuk a mellékelt ábrát.



Mivel $T'B = 2$ egység ezért a k' kör átmérője, azaz k_2' és k_3' távolsága így $1,5 = \frac{3}{2}$ egység.

A keresett kör invertált képének, k'-nek F' pontja tehát $1 + EF'$ távolságra van az inverzió pólusától, B-től, azaz:

$$BF' = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

Így a keresett k kör F pontjának távolsága az eredeti helyén a pólustól:

$$BF = \frac{1}{BF'} = \frac{2}{5}.$$

Így a keresett kör átmérője:

$$EF = BE - BF = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

A keresett kör sugara:

$$r = \frac{EF}{2} = \frac{3}{10}.$$

Megjegyzés

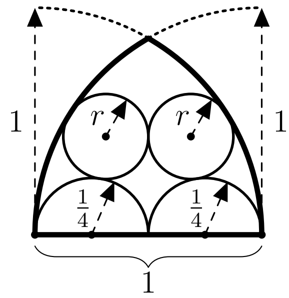
A feladat ihletője a következő ablak volt:

Városháza,
Bécs (Ausztria)[2]

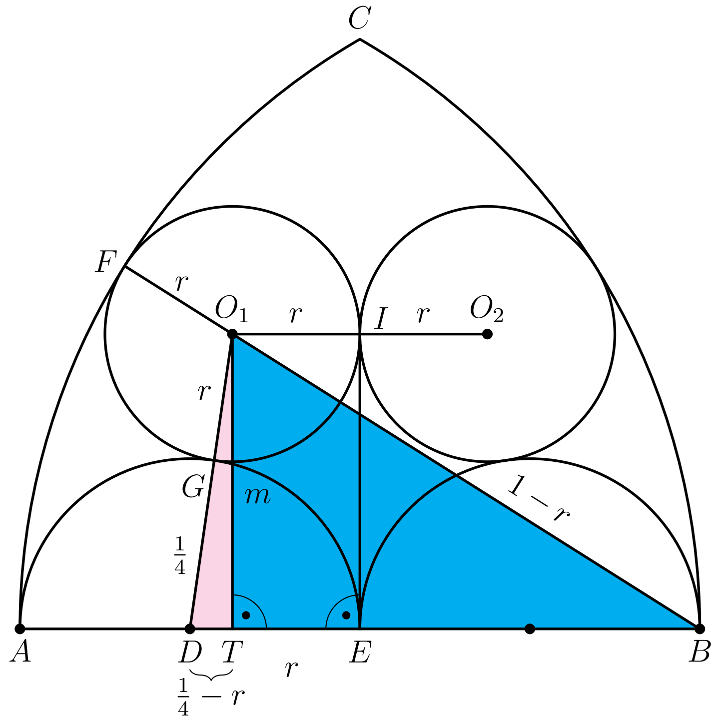
[2] Andrew Bossi képe a Wikimedia Commons-ról:
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2679850
https://pixels.com/featured/city-hall-vienna-neo-gothic-building-facade-wien-rathaus-unesco-world-heritage-site-austria-glen-sterling.html

26. feladat (10)

Egy egység hosszú szakasz fölé megrajzolunk két 1 sugarú körívet és két $\frac{1}{4}$ sugarú félkört. Mekkora annak a két egyforma körnek az r sugara, amelyek érintenek egy-egy félkört és körívet, illetve egymást is az ábra szerint?



Első megoldás



Használjuk az ábra jelöléseit!

Az ismeretlen kör sugara legyen:

$$r = O_1F = O_1G = O_1I = O_2I.$$

Összekötjük az O_1 és O_2 pontokat. Ez a szakasz átmegy az I ponton is.

Összekötjük az B és O_1 pontokat is. E szakasz meghosszabbítása átmegy az F ponton is.

Összekötjük az D és O_1 pontokat is. Ez a szakasz átmegy a G ponton is.

Mivel az EC egyenesre az eredeti ábra tengelyszimmetrikus, ezért a keresett két kör is szimmetrikus lesz EC tengelyre, vagyis IE szakasz merőleges O_1O_2-re és AB-re is.

Mivel $DG = \frac{1}{4}$, ezért

$$DO_1 = r + \frac{1}{4},$$

és $BF = 1$, ezért

$$BO_1 = 1 - r.$$

Állítsunk merőlegest O_1 középpontból AB-re, így O_1T merőleges lesz DE-re.

Az $TEIO_1$ négyszögben három belső szög derékszög, ezért a négyszög téglalap. Mivel $DE = \frac{1}{4}$, emiatt:

$$DT = DE - TE = \frac{1}{4} - r$$

Ebből következően, mivel $EB = \frac{1}{2}$, ezért

$$TB = r + \frac{1}{2}.$$

Vezessünk be most célszerűen még egy változót:

$$m = O_1T.$$

Írjunk akkor föl egy-egy Pitagorasz-tételt DTO_1 és BTO_1 derékszögű háromszögekben!

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{4} - r\right)^2 + m^2 = \left(r + \frac{1}{4}\right)^2 \\ \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 + m^2 = (1-r)^2 \end{cases}$$

Felbontva a zárójeleket:

$$\begin{cases} \frac{1}{16} - \frac{1}{2}r + r^2 + m^2 = r^2 + \frac{1}{2}r + \frac{1}{16} & (1) \\ r^2 + r + \frac{1}{4} + m^2 = 1 - 2r + r^2 & (2) \end{cases}$$

A (2)-ből kivonva az (1)-t, kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{3}{16} + \frac{3}{2}r &= \frac{15}{16} - \frac{5}{2}r \\ 4r &= \frac{12}{16} \\ r &= \frac{3}{16} \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve r értékét (1)-be:

$$m^2 = \frac{3}{16}$$

$$m_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}; \qquad \left(m_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4} < 0\right)$$

A keresett kör sugara:

$$r = \frac{3}{16}.$$

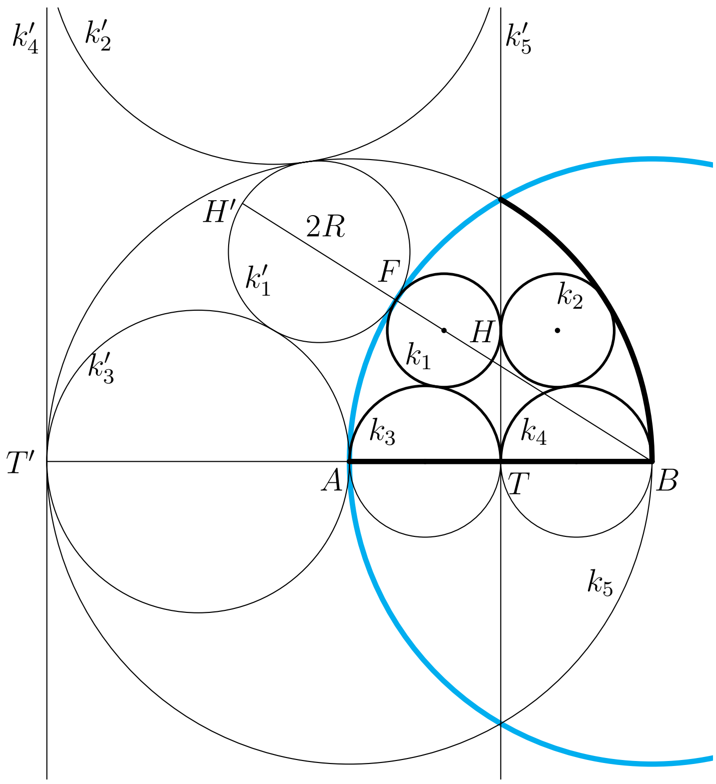
.

Második megoldás

Használjunk inverziót!

Az inverzió alapköre legyen az adott, B középpontú egység sugarú kör.

A feladat ábráját erre a körre invertálva (és az egyes alakzatok képét vesszővel jelölve) kapjuk a mellékelt ábrát.



Vegyük észre, hogy a kapott ábra a 9. feladat ábrája (A középpontú egységsugarú félkörívvel), és használjuk fel, hogy a feladat megoldása alapján (27. oldal) k_1' sugara:

$$R = \frac{3}{10}.$$

Ezért a k_1' kör átmérője

$$FH' = 2R = \frac{3}{5}.$$

A keresett kör invertált képének, k_1'-nek H' pontja tehát $1+FH'$ távolságra van az inverzió pólusától, B-től, azaz:

$$BH' = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}.$$

Így a keresett k_1 kör H pontjának távolsága az eredeti helyén a pólustól:

$$BH = \frac{1}{BH'} = \frac{5}{8}.$$

Így a keresett kör átmérője:

$$FH = BF - BH = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}.$$

$$FH = \frac{3}{8} = 2r$$

A keresett kör sugara:

$$r = \frac{3}{16}.$$

Megjegyzés

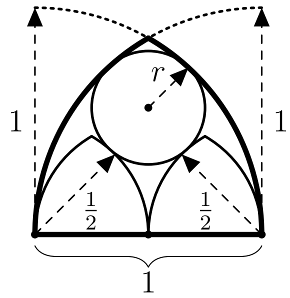
A feladat ihletője a következő ablak volt:

Sankt Michael templom
Fürth (Németország)[3]

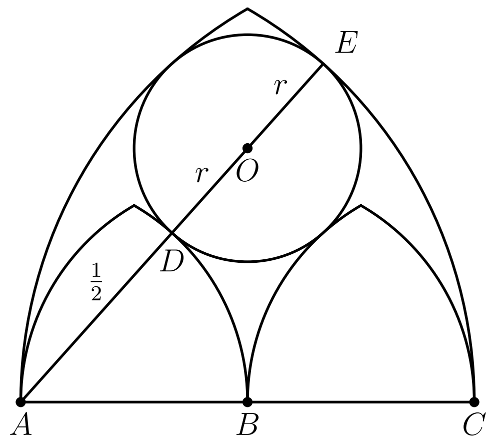
[3]Magyar Eszter fotója

27. feladat (9)

Egy egység hosszú szakasz fölé megrajzolunk két 1 sugarú hatodkörívet, illetve négy, $\frac{1}{2}$ sugarú hatodkörívet. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti a köríveket az ábra szerint?



Megoldás



Használjuk az ábra jelöléseit!
Az ismeretlen kör sugara legyen

$$r = OD = OE.$$

Összekötjük O és A pontot. Az érintkező körök tulajdonságai alapján az AO szakaszon illetve meghosszabbításán rajta van a D illetve E pont is. Mivel $AE = 1$ és $AD = \frac{1}{2}$, ezért

$$DE = AE - AD = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Az DE szakasz a keresett kör átmérője, vagyis sugara ennek fele:

$$r = \frac{DE}{2} = \frac{1}{4}$$

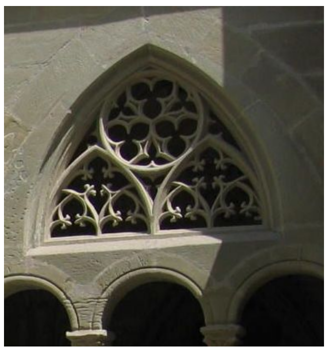
A keresett kör sugara:

$$r = \frac{1}{4}.$$

Megjegyzés

A feladat ihletői a következő ablakok voltak:

Notre Dame[4]
Párizs (Franciaország)



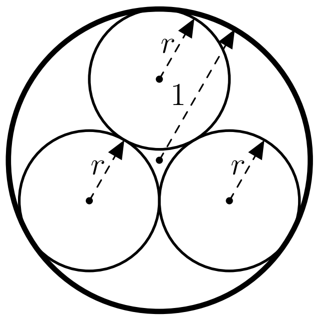
Apátság Hauterive-ben[5]
(Svájc)

[4]Stephen Murray képe:
http://mappinggothic.org/image/47182

[5]Kép az apátság honlapjáról:
https://www.abbaye-hauterive.ch/la-communaute/notre-vie/photos-et-videos/preau-du-cloitre

28. feladat (9)

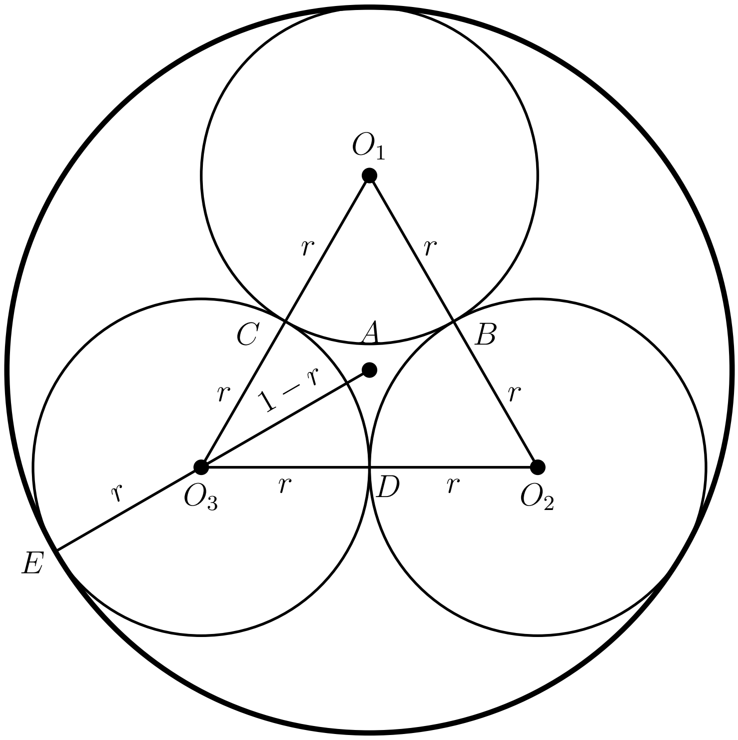
Egy egység sugarú körbe megrajzolunk három, egymást és az egység sugarú kört is érintő egyforma sugarú kisebb kört az ábra szerint. Mekkora a kisebb körök r sugara?



(Lásd még: hármaskaréj, 5.4. fejezet, 109. oldal.)

Első megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



Az ismeretlen körök sugara legyen:

$$r = O_1C = O_1B = O_2B = O_2D = O_3C = O_3D = O_3E.$$

Az O_1O_2, O_2O_3 és O_3O_1 szakaszokon rendre rajta van B, D illetve C pont, ebből következően:

$$O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1 = 2r.$$

Tehát $O_1O_2O_3$ háromszög szabályos háromszög.

Mivel az ábra 120°-ban forgásszimmetrikus az egység sugarú nagyobb kör középpontjára, ezért a kisebb körök középpontjai által meghatározott $O_1O_2O_3$ szabályos háromszög középpontja épp a nagy, egységsugarú kör középpontja lesz.

Mivel $AE = 1$, ezért

$$AO_3 = 1 - r.$$

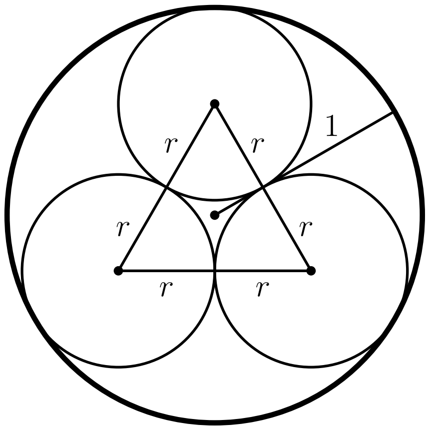
Másrészről az AO_3 szakasz az $O_1O_2O_3$ ($2r$ oldalú) szabályos háromszög magasságának $\frac{2}{3}$ része. Tehát:

$$\begin{aligned}
AO_3 = 1 - r &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2r \\
1 - r &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot r \\
1 &= \frac{2\sqrt{3}+3}{3} \cdot r \\
r &= \frac{3}{2\sqrt{3}+3} \\
r &= \frac{3}{2\sqrt{3}+3} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}-3} = 2\sqrt{3} - 3
\end{aligned}$$

A keresett körök sugara:

$$r = 2\sqrt{3} - 3.$$

Második megoldás



Használjuk az érintkező körök tételét (5.3.2 fejezet, 103. oldal)!

Látható a négy kör, melyek egymást páronként érintik.

A sugaraik rendre:

$$r,\ r,\ r \text{ és } 1.$$

Az érintkező körök tétele szerint:

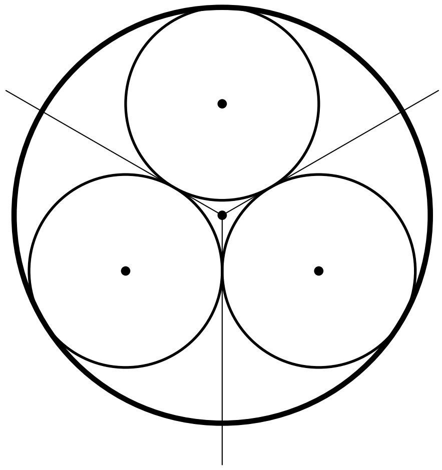
$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} - \frac{1}{1}\right)^2 &= 2 \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{1^2}\right) \\
\left(\frac{3}{r} - 1\right)^2 &= 2 \cdot \left(\frac{3}{r^2} + 1\right) \\
\frac{9}{r^2} - \frac{6}{r} + 1 &= \frac{6}{r^2} + 2 \\
9 - 6r + r^2 &= 6 + 2r^2 \\
0 &= r^2 + 6r - 3 \\
r_1 = 2\sqrt{3} - 3 \qquad r_2 &= -2\sqrt{3} - 3
\end{aligned}$$

Mivel $r_2 < 0$, ezért ez nem lehet a megoldás.

A keresett körök sugara:

$$r = 2\sqrt{3} - 3.$$

Harmadik megoldás



Húzzuk be a kisebb körök közös érintőit! Felhasználhatjuk a körcikket belülről érintő kör sugarára vonatkozó összefüggést (5.3.4 fejezet, 106. oldal), ahol most a körcikk középponti szöge $\omega = 120°$ lesz.

$$r = \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{1+\sin\frac{\omega}{2}} = \frac{\sin 60°}{1+\sin 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

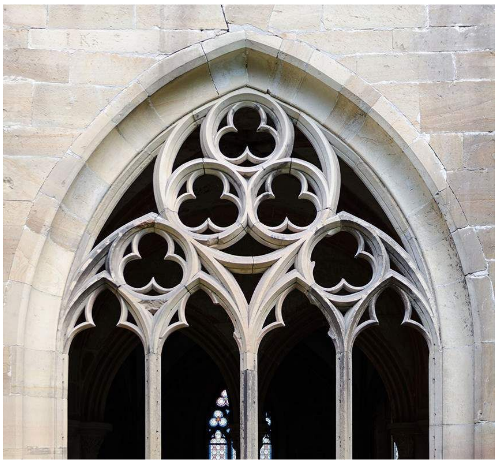
$$= \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}-3$$

A keresett körök sugara:

$$r = 2\sqrt{3}-3.$$

Megjegyzés

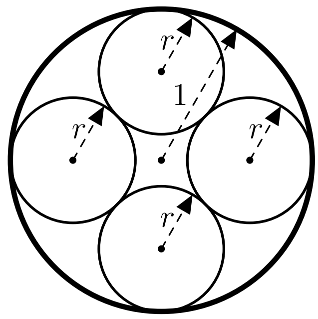
A feladat ihletője a következő boltív volt:



Maulbronn-i kolostor,
(Németország)[6]

[6]kép az apátság honlapjáról:
https://www.kloster-maulbronn.de/start#impression-images-5

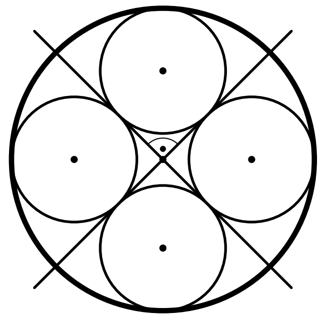
29. feladat (9)



Egy egység sugarú körbe megrajzolunk négy egyforma sugarú kisebb kört, melyek érintik az egység sugarú nagyobb kört és a szomszédosak egymást is az ábra szerint. Mekkora a kisebb körök r sugara?

(Lásd még: négyeskaréj, 5.4. fejezet, 109. oldal.)

Első megoldás



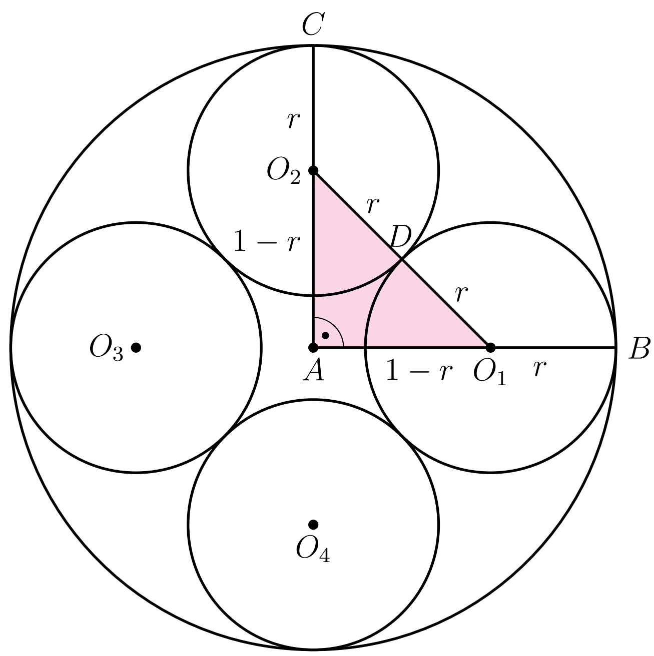
Ha behúzzuk a szomszédos kisebb körök közös érintőit, akkor a két merőleges egyenes a kört pont olyan negyedkörökre osztja, mint a 2. feladat ábrája (12. oldal).

A keresett kör sugara:

$$r = -1 + \sqrt{2}.$$

Második megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



Az ismeretlen körök sugara legyen:

$$r = O_1B = O_1D = O_2D = O_2C.$$

Összekötjük az O_1 és O_2 pontokat. Ez a szakasz átmegy a D ponton is.

Összekötjük az A és O_1 illetve az A és O_2 pontokat is. Ezen szakaszok meghosszabbítása rendre átmegy a B illetve C pontokon is.

Mivel az ábra 90°-ban forgásszimmetrikus a nagy kör középpontjára, ezért a kisebb körök középpontjai által meghatározott $O_1O_2O_3O_4$ négyszög négyzet és középpontja épp a nagy kör középpontja lesz. Tehát AB és AC merőleges egymásra.

Mivel $AB = AC = 1$ ezért

$$AO_1 = AO_2 = 1 - r.$$

Írjunk föl egy Pitagorasz-tételt O_2AO_1 derékszögű háromszögben és rendezzük!

$$\begin{aligned}(1-r)^2 + (1-r)^2 &= (2r)^2\\ 1 - 2r + r^2 + 1 - 2r + r^2 &= 4r^2\\ 0 &= 2r^2 + 4r - 2\\ r_1 = \sqrt{2} - 1; \qquad r_2 &= -\sqrt{2} - 1\end{aligned}$$

Mivel $r_2 < 0$, ezért ez nem lehet a megoldás.

A keresett körök sugara:

$$r = \sqrt{2} - 1.$$

Harmadik megoldás

Használjuk az előző ábra jelöléseit és megállapításait!

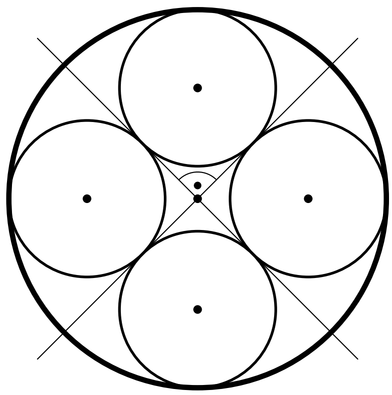
Mivel O_2AO_1 háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért átfogója a befogójának $\sqrt{2}$-szerese, vagyis:

$$\begin{aligned}2r &= (1-r)\cdot\sqrt{2}\\ 2r &= \sqrt{2} - \sqrt{2}r\\ r\left(2+\sqrt{2}\right) &= \sqrt{2}\\ r &= \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{4-2} = \sqrt{2}-1\end{aligned}$$

A keresett körök sugara:

$$r = \sqrt{2} - 1.$$

Negyedik megoldás



Használjuk a körcikket belülről érintő kör sugarára vonatkozó összefüggést (5.3.4 fejezet, 106. oldal), a körcikk középponti szöge most $\omega = 90°$.

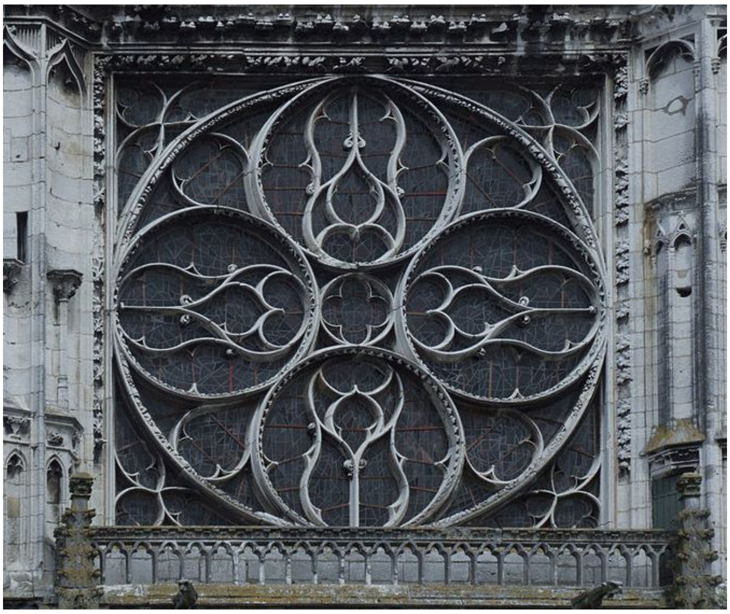
$$\begin{aligned}r &= \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{1+\sin\frac{\omega}{2}} = \frac{\sin 45°}{1+\sin 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} =\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1\end{aligned}$$

A keresett körök sugara:

$$r = \sqrt{2} - 1.$$

Megjegyzés

A feladat ihletője a következő ablak volt:

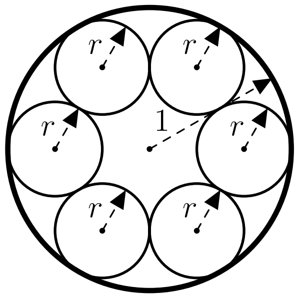


Notre Dame
Vernon (Franciaország)[7]

[7]Mattana képe a Wikimedia Commons-ról:
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3313132

30. feladat (9)

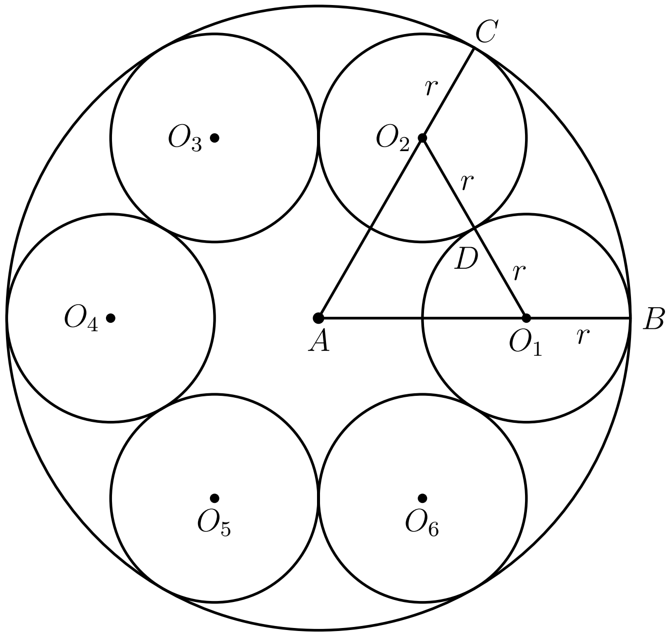
Egy egység sugarú körbe megrajzolunk hat egyforma sugarú kisebb kört, melyek érintik a nagyobb kört illetve a szomszédosak egymást is az ábra szerint. Mekkora a kisebb körök r sugara?



(Lásd még: hatoskaréj, 5.4. fejezet, 110. oldal.)

1. megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



Az ismeretlen körök sugara legyen:

$r = O_1B = O_1D = O_2D = O_2C.$

Összekötjük az O_1 és O_2 pontokat. Ez a szakasz átmegy a D ponton is.

Összekötjük az A és O_1 illetve az A és O_2 pontokat is. Ezen szakaszok meghosszabbítása rendre átmegy a B illetve C ponton is.

Mivel az ábra 60°-ban forgásszimmetrikus a nagy kör középpontjára, ezért a kisebb körök középpontjai által meghatározott $O_1O_2O_3O_4O_5O_6$ sokszög szabályos hatszög és középpontja épp a nagy kör középpontja lesz.

Tehát AB és AC szakasz 60°-os szöget zár be.

Mivel $AB = 1$, és $AC = 1$ ezért

$$AO_1 = AO_2 = 1 - r.$$

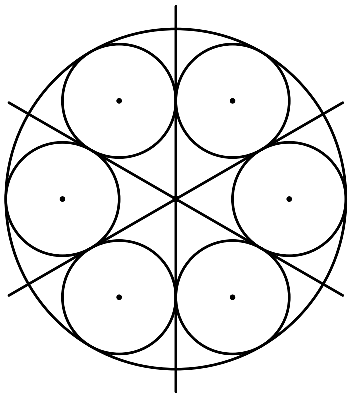
Tehát AO_1O_2 háromszög egyenlő szárú és csúcsszöge 60°, így szabályos. Emiatt

$$\begin{aligned} AO_1 &= O_1O_2 \\ 1 - r &= 2r \\ 1 &= 3r \\ r &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

A keresett körök sugara:

$$r = \frac{1}{3}.$$

2. megoldás



Húzzuk be a szomszédos körök közös érintőit! Ezek hat egyforma körcikkre bontják az eredeti kört az ábra szeint.

Használjuk a körcikket belülről érintő kör sugarára vonatkozó összefüggést (5.3.4 fejezet, 106. oldal), ahol a körcikk középponti szöge most $\omega = 60°$.

$$r = \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{1+\sin\frac{\omega}{2}} = \frac{\sin 30°}{1+\sin 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

A keresett körök sugara:

$$r = \frac{1}{3}.$$

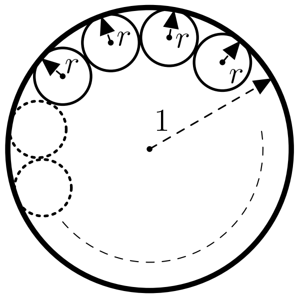
Megjegyzés

A feladat ihletője a következő boltív volt:

Salisbury katedrális,
(Anglia)[8]

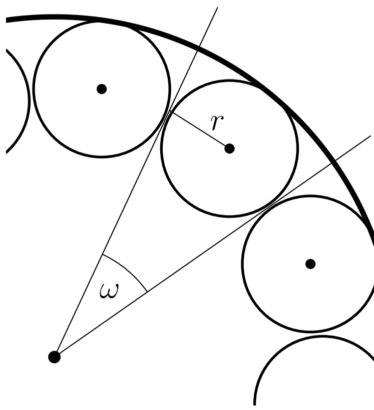
[8]Bernard Gagnon képe a Wikimedia Commons-ról:
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3633923

31. feladat (11+)



Egy egység sugarú körbe megrajzolunk n darab ($n \in \mathbb{N}; n \geq 2$) egyforma sugarú kisebb kört, melyek érintik a nagyobb kört illetve a szomszédosak egymást is az ábra szerint. Mekkora a kisebb körök r sugara? Mekkora a körök területének és kerületének összege? Mekkora lesz a kerületek és területek összegének határértéke, ha $n \to \infty$?

Megoldás



Használjuk az ábra jelöléseit!

Az ismeretlen kör sugara legyen r.

Használjuk a körcikket belülről érintő kör sugarára vonatkozó összefüggést (5.3.4 fejezet, 106. oldal), ahol a körcikk középponti szöge most a forgásszimmetria miatt $\omega = \frac{2\pi}{n}$.

$$r = \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{1+\sin\frac{\omega}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

A keresett körök sugara:

$$r = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Kerületek összege

A keresett körök kerületeinek összege:

$$K_n = \sum_{i=1}^{n} K = n \cdot 2r\pi = n \cdot 2\pi \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$K_n = n \cdot 2\pi \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Területek összege

A keresett körök területeinek összege pedig:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} T = n \cdot r^2\pi = n \cdot \pi \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)^2 =$$

$$= n \cdot \pi \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1+2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$T_n = n \cdot \pi \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1+2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Kerületek összegének határértéke

Nézzük most, hogy mi történik $n \to \infty$ esetén! Kezdjük K_n értékével:

$$\lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty} n \cdot 2\pi \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} 2\pi^2 \cdot \frac{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}}{1+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} =$$
$$= 2\pi^2 \cdot \frac{1}{1+0} = 2\pi^2$$
$$\lim_{n\to\infty} K_n = 2\pi^2$$

Területek összegének határértéke

Folytassuk T_n értékével!

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} n \cdot \pi \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1+2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{\pi^3}{n} \cdot \frac{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi^2}{n^2}}}{1+2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi^3}{n} \cdot \frac{\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}\right)^2}{1+2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} = 0 \cdot \frac{1^2}{1+2\cdot 0+0^2} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} T_n = 0$$

Mind a két esetben felhasználtuk az alábbi határértékeket:

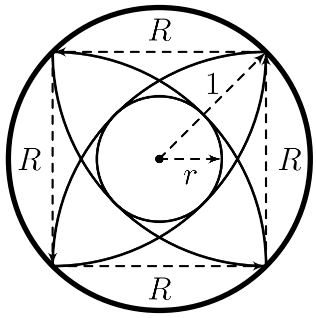
$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0 \quad \text{illetve} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

éspedig $x = \frac{\pi}{n}$ alakra alkalmaztuk a fenti összefüggéseket, azaz:

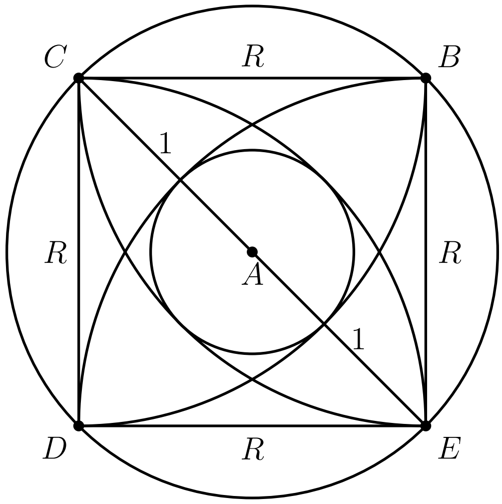
$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 0 \quad \text{illetve} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = 1.$$

32. feladat (9)

Egy egység sugarú körbe megrajzolunk négy, R sugarú negyedkörívet az ábra szerint. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a négy körívet?



Megoldás



Használjuk az ábra jelöléseit!

Kössük össze az R sugarú negyedkörívek középpontjait! Mivel

$$BC = CD = DE = EB = R$$

és

$$AB = AC = AD = AE = 1$$

ezért $BCDE$ négyszög négyzet, és így átlója az egységsugarú kör átmérője.

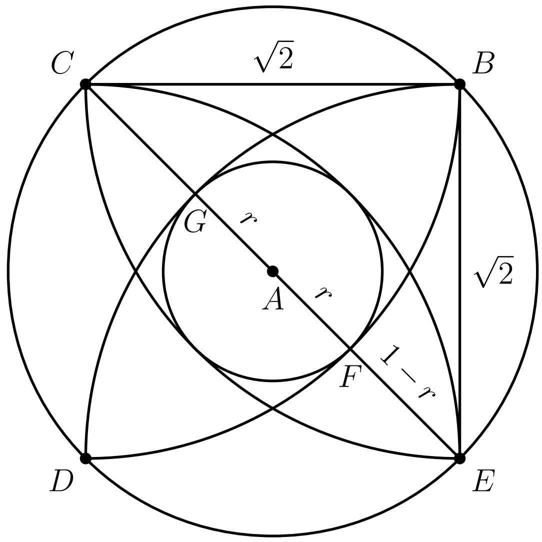
Vagyis

$$CE = 2 = \sqrt{2} \cdot R$$

$$R = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Az ismeretlen kör sugara legyen:

$$r = AF = AG.$$



Mivel $AE = 1$, ezért

$$EG = 1 + r.$$

Továbbá $EG = R = \sqrt{2}$, ezért

$$EG = \sqrt{2} = 1 + r$$

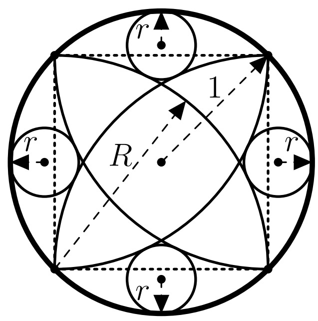
$$r = \sqrt{2} - 1$$

A keresett kör sugara:

$$r = \sqrt{2} - 1.$$

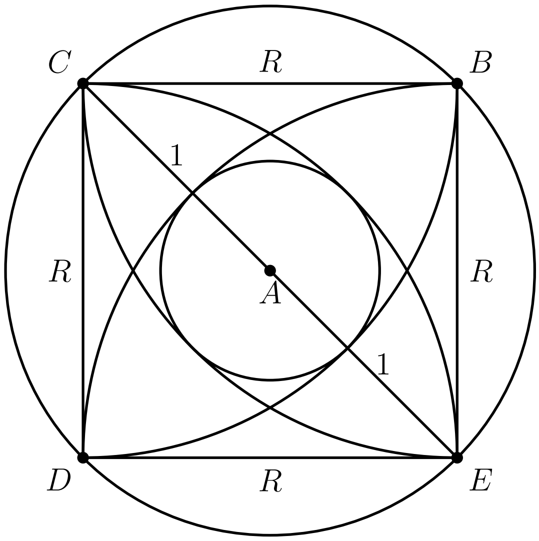
33. feladat (9)

Egy egység sugarú körbe megrajzolunk négy, R sugarú negyedkörívet az ábra szerint. Mekkora annak a négy egyforma kisebb körnek az r sugara, amelyek érintik a berajzolt köríveket?



Megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



Kössük össze az R sugarú negyedkörívek középpontjait! Mivel

$$BC = CD = DE = EB = R$$

és

$$AB = AC = AD = AE = 1$$

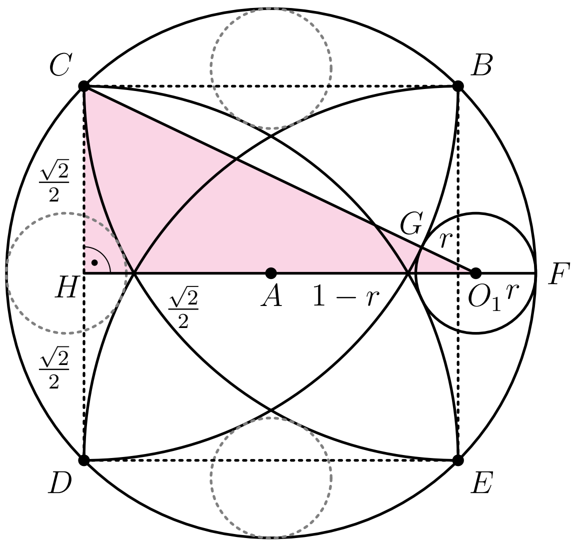
ezért $BCDE$ négyszög négyzet, és így átlója az egységsugarú kör átmérője. Vagyis

$$CE = 2 = \sqrt{2} \cdot R$$
$$R = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Tehát $BCDE$ négyszög egy $\sqrt{2}$ oldalú négyzet, melynek középpontja A.

A keresett négy kis kör sugara legyen:

$$r = O_1F = O_1G.$$



Legyen H a CD oldal felezőpontja.

Mivel AH egyenese szimmetriatengelye az eredeti köríveknek, ezért a kis köröknek is, tehát H, A és O_1 egy egyenesre esik. AO_1 szakasz meghosszabbítása átmegy az F ponton is.

Összekötjük az O_1 és C pontokat is. E szakaszon rajta van a G pont is.

Mivel $AF = 1$, ezért

$$AO_1 = 1 - r.$$

Tudjuk, hogy $CD = \sqrt{2}$, ezért

$$CH = HA = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tehát

$$HO_1 = HA + AO_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - r.$$

És mivel $CG = \sqrt{2}$, ezért

$$CO_1 = r + \sqrt{2}.$$

Írjuk fel Pitagorasz tételét CHO_1 derékszögű háromszögben és rendezzük a kapott egyenletet!

$$\left(r + \sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - r\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$r^2 + 2\sqrt{2}r + 2 = \frac{1}{2} + 1 + r^2 + \sqrt{2} - \sqrt{2}r - 2r + \frac{1}{2}$$

$$\left(3\sqrt{2} + 2\right) \cdot r = \sqrt{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + 2}$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + 2} \cdot \frac{3\sqrt{2} - 2}{3\sqrt{2} - 2} = \frac{3 - \sqrt{2}}{7}$$

A keresett körök sugara:

$$r = \frac{3 - \sqrt{2}}{7}.$$

Megjegyzés

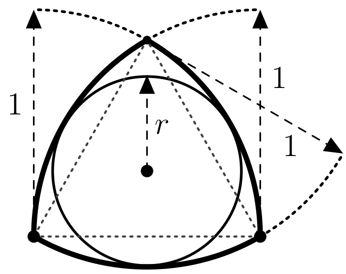
A feladat ihletője a következő ablak volt:

Szent Anna kápolna
Székesfehérvár[9]

[9]KovacsDaniel képe a Wikimedia Commons-ról:
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=19764893

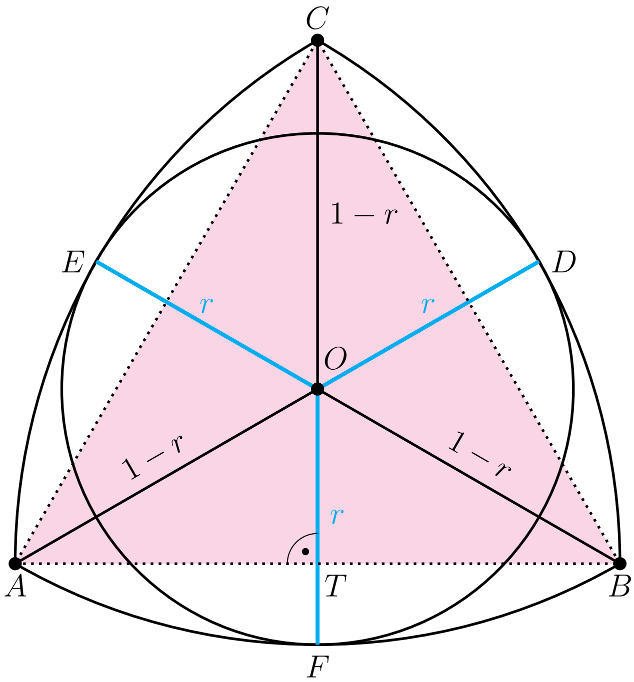
34. feladat (9)

Egy egység oldalú szabályos háromszög csúcsaiból egység sugarú köríveket rajzolva a körök egy íves háromszöget határolnak. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a három körívet az ábra szerint?



(Lásd még: Reuleaux-háromszög, 5.4. fejezet, 108. oldal.)

Első megoldás



Használjuk az ábra jelöléseit!

Az ismeretlen kör sugara legyen

$$r = OD = OE = OF.$$

Kössük össze A, B és C pontokat O ponttal.

Az AO, BO és CO szakaszok meghosszabbításán rendre rajta van a D, E illetve F pont.

Mivel

$$AD = BE = CF = 1$$

ezért

$$OA = OB = OC = 1 - r.$$

Vagyis O pont egyenlő távol van az A, B és C pontoktól, tehát O épp az ABC egységoldalú szabályos háromszög középpontja.

Ebből következően például az AO szakasz az ABC egységoldalú szabályos háromszög magasságának $\frac{2}{3}$ része. Tehát:

$$AO = 1 - r = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1 - r = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$r = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

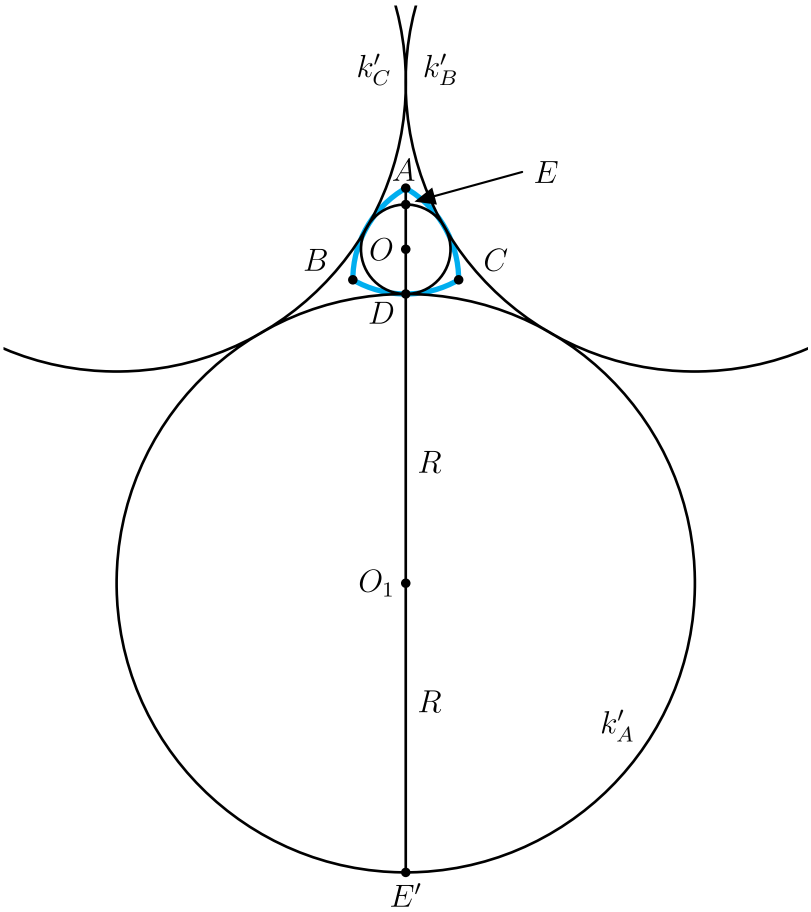
A keresett kör sugara:

$$r = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}.$$

Második megoldás

Használjunk inverziót! *(Ezzel az inverziós megoldással olyan érzésünk van, mintha „ágyúval lőnénk verébre”. A megoldás még csak nem is egyszerűbb, mint a többi megoldások, de az inverzió gyakorlására jó lesz.)*

Invertáljuk háromszor a belső kis kört (k-t) egy-egy egységsugarú körívre. A kis kör képeit vesszővel jelölve kapjuk az alábbi ábrát. Használjuk ennek jelöléseit!



Az ábra 120°-ban forgásszimmetrikus ABC egységoldalú szabályos háromszög O középpontjára, ezért a keresett kör középpontja is O.

Az ismeretlen kis kör sugara legyen:

$$r = OE = OD.$$

Az inverzióval kapott nagyobb körök sugara pedig legyen:

$$R = O_1D = O_1E'.$$

Használjuk az érintkező körök tételét (5.3.2 fejezet, 103. oldal)!

A négy érintkező kör sugarai rendre:

$$R,\ R,\ R,\ r.$$

Az érintkező körök tétele szerint:

$$\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)^2 = 2\cdot\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R^2}+\frac{1}{r^2}\right)$$
$$\left(\frac{3}{R}+\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{6}{R^2}+\frac{2}{r^2}$$
$$\frac{9}{R^2}+\frac{6}{Rr}+\frac{1}{r^2} = \frac{6}{R^2}+\frac{2}{r^2}$$
$$0 = \frac{1}{r^2}-\frac{6}{Rr}-\frac{3}{R^2}$$
$$0 = \frac{R^2}{r^2}-\frac{6R}{r}-3$$
$$0 = \left(\frac{R}{r}\right)^2-6\cdot\frac{R}{r}-3$$
$$\left(\frac{R}{r}\right)_1 = 3+2\sqrt{3} \qquad \left(\frac{R}{r}\right)_2 = 3-2\sqrt{3}$$

Mivel $\left(\frac{R}{r}\right)_2$ negatív, ezért ez nem jön számításba

$$\frac{R}{r} = 3+2\sqrt{3}$$

azaz

$$R = \left(3+2\sqrt{3}\right)\cdot r. \qquad (1)$$

Az OA szakasz az ABC egységoldalú, szabályos háromszög magasságának $\frac{2}{3}$ része, vagyis:

$$OA = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Tehát

$$AE = OA - OE = \frac{\sqrt{3}}{3} - r.$$
$$AE' = AD + DE' = 1 + 2R.$$

Használjuk föl az inverzió tulajdonságát:

$$AE\cdot AE' = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}-r\right)\cdot(1+2R) = 1$$

és helyettesítsük be (1) alapján, hogy $R = \left(3+2\sqrt{3}\right)r$.

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-r\right)\cdot\left[1+\left(6+4\sqrt{3}\right)r\right] = 1$$
$$\frac{\sqrt{3}}{3}+\left(2\sqrt{3}+4\right)r - r - \left(6+4\sqrt{3}\right)r^2 = 1$$
$$-\left(6+4\sqrt{3}\right)r^2+\left(2\sqrt{3}+3\right)r+\frac{\sqrt{3}}{3}-1 = 0$$

$$\begin{aligned}
r_{1,2} &= \frac{-2\sqrt{3}-3 \pm \sqrt{\left(2\sqrt{3}+3\right)^2 + 4\cdot\left(6+4\sqrt{3}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right)}}{-12-8\sqrt{3}} = \\
&= \frac{-2\sqrt{3}-3 \pm \sqrt{12+12\sqrt{3}+9+8\sqrt{3}-24+16-16\sqrt{3}}}{-12-8\sqrt{3}} = \\
&= \frac{-2\sqrt{3}-3 \pm \sqrt{13+4\sqrt{3}}}{-12-8\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}-3 \pm \sqrt{\left(2\sqrt{3}+1\right)^2}}{-12-8\sqrt{3}} = \\
&= \frac{-2\sqrt{3}-3 \pm \left(2\sqrt{3}+1\right)}{-12-8\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Amiből

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{-2\sqrt{3}-3-\left(2\sqrt{3}+1\right)}{-12-8\sqrt{3}} = \frac{-4\sqrt{3}-4}{-12-8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{3+2\sqrt{3}} = \\
&= \frac{\sqrt{3}+1}{3+2\sqrt{3}}\cdot\frac{3-2\sqrt{3}}{3-2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}-6+3-2\sqrt{3}}{9-12\cdot 3} = \frac{-3+\sqrt{3}}{-3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_2 &= \frac{-2\sqrt{3}-3+\left(2\sqrt{3}+1\right)}{-12-8\sqrt{3}} = \frac{-2}{-12-8\sqrt{3}} = \frac{1}{6+4\sqrt{3}} = \\
&= \frac{1}{6+4\sqrt{3}}\cdot\frac{6-4\sqrt{3}}{6-4\sqrt{3}} = \frac{6-4\sqrt{3}}{36-16\cdot 3} = \frac{6-4\sqrt{3}}{-12} = \frac{-3+2\sqrt{3}}{6};
\end{aligned}$$

Tehát:

$$r_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{3}; \qquad r_2 = \frac{-3+2\sqrt{3}}{6}$$

(1)-ből

$$R_1 = \left(3+2\sqrt{3}\right)\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3} = 1+\sqrt{3}; \qquad R_2 = \left(3+2\sqrt{3}\right)\cdot\frac{-3+2\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2}$$

Az ábra alapján r értéke legalább az ABC egységoldalú, szabályos háromszög magasságának $\frac{1}{3}$ része, vagyis:

$$r \geq \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

ezért r_2 nem lehet megoldása a feladatnak.

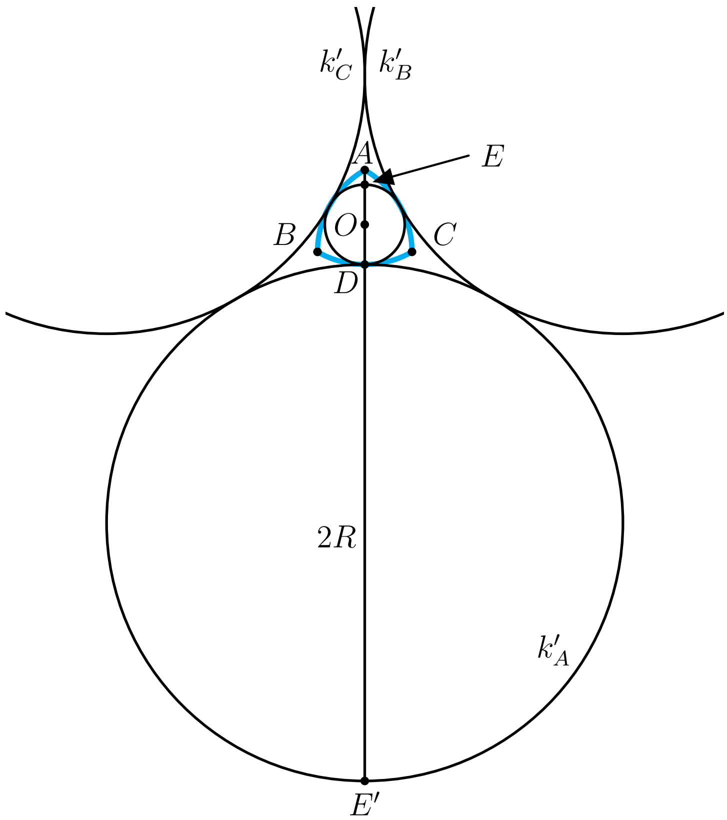
A keresett kör sugara:

$$r = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$

Harmadik megoldás

Használjunk ismét inverziót!

Invertáljuk háromszor a belső kis kört (k-t) egy-egy egységsugarú körívre. A kis kör képeit vesszővel jelölve kapjuk az alábbi ábrát. Használjuk ennek jelöléseit!



Vegyük észre, hogy a kapott ábra a 36. feladat ábrája, és használjuk fel, hogy a megoldás alapján (96. oldal) a nagyobb körök sugara

$$R = 1 + \sqrt{3}.$$

Tehát az invertált kör átmérője:

$$DE' = 2R = 2 + 2\sqrt{3}.$$

A keresett kör invertált képének, k'_A-nek E' pontja tehát $1+2R$ távolságra van az inverzió pólusától, A-tól, azaz:

$$AE' = 1 + 2R = 3 + 2\sqrt{3}.$$

Így a keresett k kör E pontjának távolsága az eredeti helyén a pólustól:

$$AE = \frac{1}{AE'} = \frac{1}{3+2\sqrt{3}} = \frac{1}{3+2\sqrt{3}} \cdot \frac{3-2\sqrt{3}}{3-2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}.$$

Így a keresett kör átmérője:

$$ED = AD - AE = 1 - \frac{2\sqrt{3}-3}{3} = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}.$$

A keresett kör sugara:

$$r = \frac{ED}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$

Megjegyzés

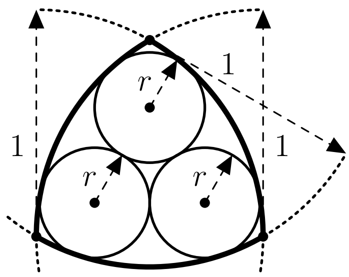
A feladat ihletője a következő ablak volt:

St. Albans katedrális,
Hertfordshire (Anglia)[10]

[10]Stephen Murray képe:
http://mappinggothic.org/image/56795
https://www.gettyimages.com/detail/news-photo/norman-gothic-style-rose-window-st-albans-cathedral-news-photo/480278409

35. feladat (10)

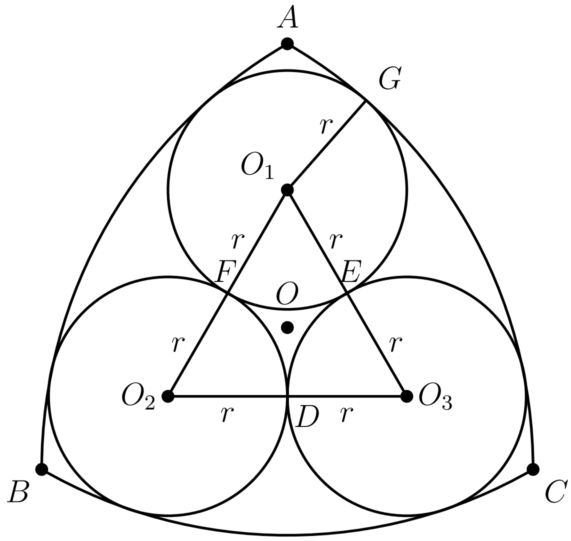
Egy egység oldalú szabályos háromszög csúcsaiból egység sugarú köríveket rajzolva a körök egy íves háromszöget határolnak. Mekkora annak a három egyforma körnek az r sugara, melyek érintenek két körívet és egymást is az ábra szerint?



(Lásd még: Reuleaux-háromszög, 5.4. fejezet, 108. oldal.)

Első megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



Az ismeretlen körök sugara legyen:

$$\begin{aligned} r &= O_1F = O_1E = O_1G \\ &= O_2F = O_2D = O_3D = O_3E \end{aligned}$$

Összekötjük az O_1 és O_2, O_2 és O_3 illetve O_3 és O_1 pontokat. Ezeken a szakaszokon rendre rajta van F, D és E pont is.

Tehát

$$O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1 = 2r.$$

Ezért az $O_1O_2O_3$ háromszög $2r$ oldalú szabályos háromszög. Az $O_1O_2O_3$ háromszög középpontja az eredeti ábra 120°-os forgásszimmetriája miatt megegyezik az ABC háromszög középpontjával O-val.

Az AO, BO és CO szakaszok egyenesei pedig az eredeti ábra szimmetriatengelyei, tehát a kis körök középpontjai rajta vannak ezeken a szakaszokon.

Az O_1D szakasz így a $2r$ oldalú szabályos háromszög magassága, tehát:

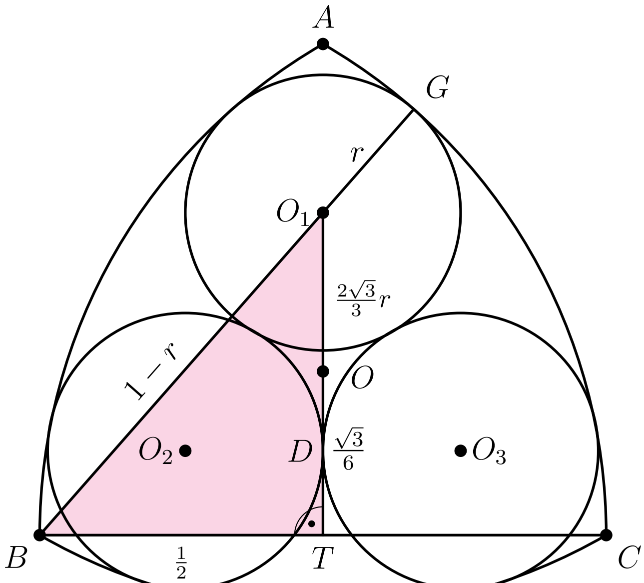
$$O_1D = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2r = \sqrt{3} \cdot r$$

Az O_1O szakasz pedig a $2r$ oldalú szabályos háromszög magasságának $\frac{2}{3}$ része, vagyis:

$$O_1O = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot r = \frac{2\sqrt{3}}{3} r.$$

Az OT szakasz az ABC egységoldalú szabályos háromszög magasságának $\frac{1}{3}$ része, tehát

$$OT = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$



Összekötjük a B és O_1 pontokat. Ez a szakasz átmegy a G ponton is.

Mivel $BG = 1$, ezért

$$BO_1 = 1 - r.$$

Írjuk fel Pitagorasz tételét BTO_1 derékszögű háromszögben és rendezzük a kapott egyenletet!

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = (1-r)^2$$

$$\frac{1}{4} + \frac{4}{3}r^2 + \frac{2}{3}r + \frac{1}{12} = 1 - 2r + r^2$$

$$\frac{1}{3}r^2 + \frac{8}{3}r - \frac{2}{3} = 0$$

$$r^2 - 8r - 2 = 0$$

$$r_1 = -4 + 3\sqrt{2}; \qquad r_2 = -4 - 3\sqrt{2}$$

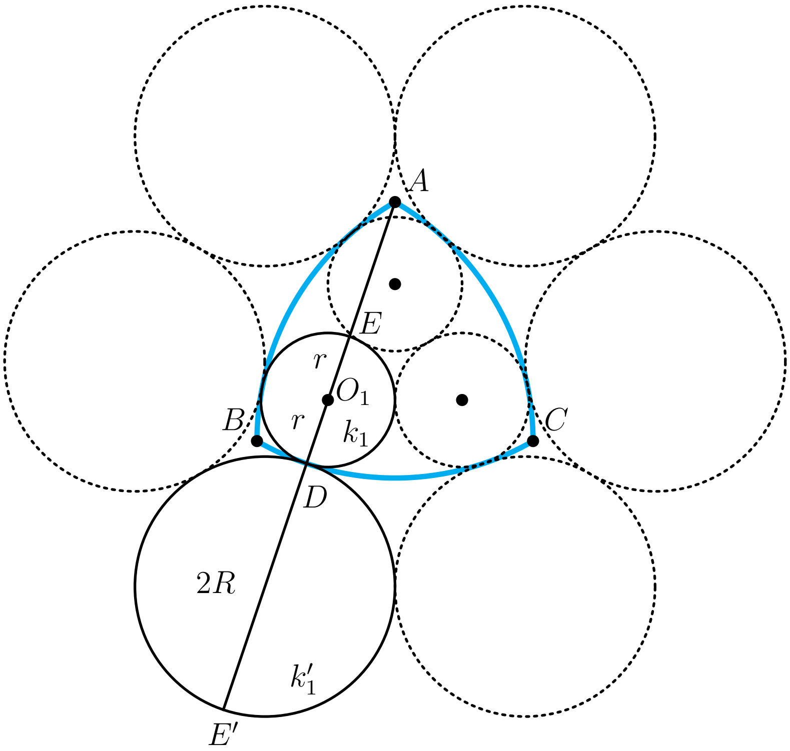
Mivel $r_2 < 0$, ezért ez nem lehet a megoldás.

A keresett körök sugara:

$$r = -4 + 3\sqrt{2}.$$

Második megoldás

Invertáljuk a belső kis köröket rendre a két olyan egységsugarú körívre, amelyekkel érintkezik. Az egyes alakzatok képeit vesszővel jelölve kapjuk az alábbi ábrát. Használjuk ennek jelöléseit!



Az ismeretlen kör sugara legyen

$$r = O_1D = O_1E.$$

Vegyük észre, hogy a kapott ábra a 37. feladat ábrája , és használjuk fel, hogy a megoldása alapján (99. oldal) a nagyobb körök sugara

$$R = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Tehát az invertált kör átmérője:

$$DE' = 2R = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

A keresett kör invertált képének, k_1'-nek E' pontja tehát $1+2R$ távolságra van az inverzió pólusától, A-tól, azaz:

$$AE' = 1 + 2R = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{3+2\sqrt{2}}{3}.$$

Így a keresett k_1 kör E pontjának távolsága az eredeti helyén a pólustól:

$$AE = \frac{1}{AE'} = \frac{3}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3}{3+2\sqrt{2}} \cdot \frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} = 9 - 6\sqrt{2}.$$

Így a keresett kör átmérője:

$$ED = AD - AE = 1 - \left(9 - 6\sqrt{2}\right) = -8 + 6\sqrt{2}.$$

A keresett körök sugara:

$$r = \frac{ED}{2} = -4 + 3\sqrt{2}.$$

Megjegyzés

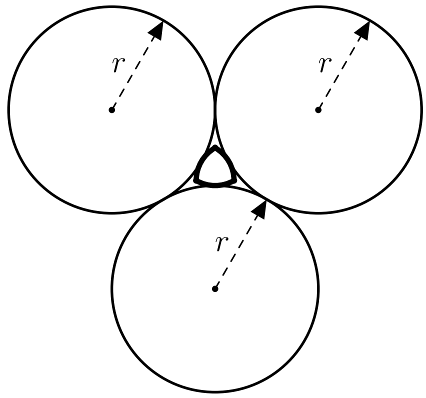
A feladat ihletője a következő ablak volt:

Sint-Salvatorskathedraal,
Bruges (Belgium)[11]

[11]LEMeZza képe a Wikimedia Commons-ról:
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=16858871

36. feladat (9)

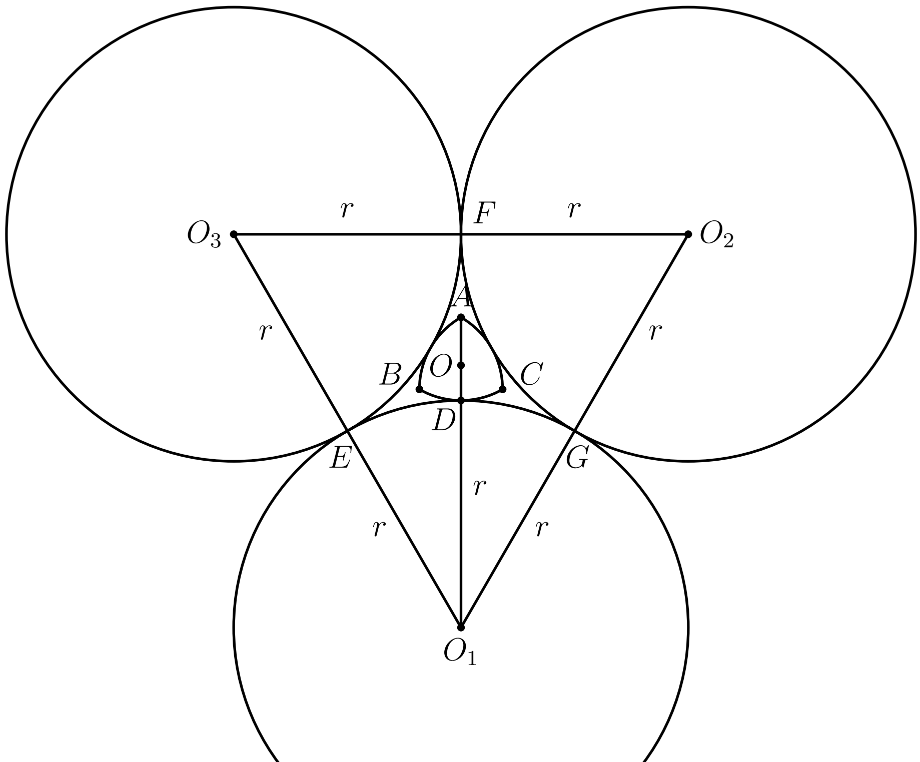
Egy egység oldalú szabályos háromszög csúcsaiból egység sugarú köríveket rajzolva a körök egy íves háromszöget határolnak. Ezt az íves háromszöget három, egyforma sugarú kör kívülről érinti úgy, hogy egymást páronként is érintik az ábra szerint. Mekkora ennek a három egyforma körnek az r sugara?



(Lásd még: Reuleaux-háromszög, 5.4. fejezet, 108. oldal.)

Első megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



Az ismeretlen körök sugara legyen:

$$r = O_1E = O_1D = O_1G =$$
$$= O_2G = O_2F = O_3F = O_3E$$

Összekötjük az O_1 és O_2, O_2 és O_3 illetve O_3 és O_1 pontokat. Ezeken a szakaszokon rendre rajta van G, F és E pont is.

Tehát

$$O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1 = 2r.$$

Ezért az $O_1O_2O_3$ háromszög $2r$ oldalú szabályos háromszög. Az $O_1O_2O_3$ háromszög középpontja az eredeti ábra 120°-os forgásszimmetriája miatt megegyezik az ABC háromszög középpontjával O-val.

Az OO_1 szakasz így a $2r$ oldalú szabályos háromszög magasságának $\frac{2}{3}$ része, vagyis:

$$OO_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2r = \frac{2\sqrt{3}}{3} r.$$

Az AO szakasz pedig az ABC egységoldalú szabályos háromszög magasságának $\frac{2}{3}$ része, tehát

$$AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Összekötjük a A és O_1 pontokat. Ez a szakasz átmegy a D ponton is.

Mivel $AD = 1$, ezért

$$AO_1 = 1 + r.$$

Másrészről pedig $AO_1 = AO + OO_1$, vagyis ebből fölírható az alábbi egyenlet:

$$\begin{aligned}
1 + r &= \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} r \\
3 + 3r &= \sqrt{3} + 2\sqrt{3} r \\
3 - \sqrt{3} &= \left(2\sqrt{3} - 3\right) r \\
r &= \frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 3} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 3} \cdot \frac{2\sqrt{3} + 3}{2\sqrt{3} + 3} = \\
&= \frac{6\sqrt{3} + 9 - 6 - 3\sqrt{3}}{3} = \frac{3 + 3\sqrt{3}}{3} = \\
&= 1 + \sqrt{3}
\end{aligned}$$

A keresett kör sugara:

$$r = 1 + \sqrt{3}.$$

Második megoldás

Oldjuk meg inverzióval a feladatot!

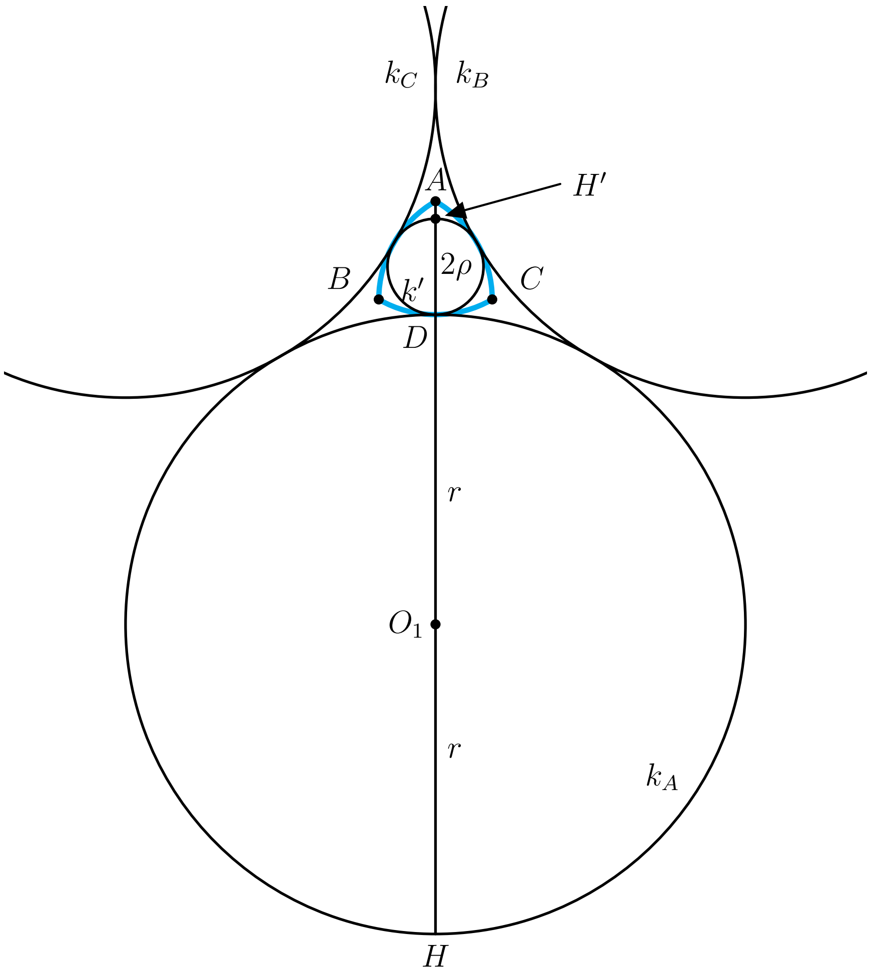
Ha a nagyobb köröket egy-egy érintkező egység sugarú körívre invertáljuk, akkor mind a három kör képe az íves háromszög belső érintőköre lesz. Használjuk az ábra jelöléseit!

Vegyük észre, hogy a kapott ábra a 34. feladat ábrája , és használjuk fel, hogy a megoldás alapján (87. oldal) a belső kör sugara

$$\rho = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}.$$

Tehát az invertált kör átmérője:

$$H'D = 2\rho = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}.$$



A keresett kör invertált képének (k'-nek) H' pontja tehát $AD - H'D = 1 - 2\rho$ távolságra van az inverzió pólusától, A-tól, azaz:

$$AH' = 1 - 2\rho = 1 - \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3} = \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{3}.$$

Így a keresett k_A kör H pontjának távolsága az eredeti helyén a pólustól:

$$AH = \frac{1}{AH'} = \frac{3}{-3 + 2\sqrt{3}} = \frac{3}{-3 + 2\sqrt{3}} \cdot \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} = 3 + 2\sqrt{3}.$$

Így a keresett kör átmérője:

$$HD = AH - AD = 3 + 2\sqrt{3} - 1 = 2 + 2\sqrt{3}.$$

Így:

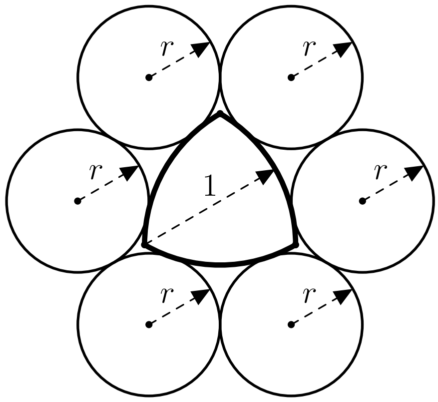
$$r = \frac{HD}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}.$$

A keresett kör sugara:

$$r = 1 + \sqrt{3}.$$

37. feladat (9)

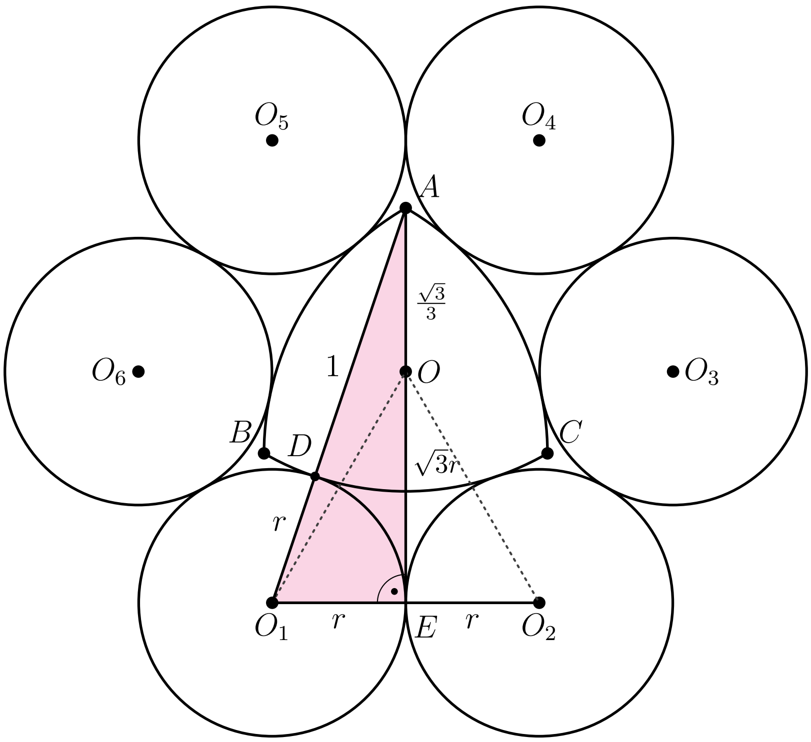
Egy egység oldalú szabályos háromszög csúcsaiból egység sugarú köríveket rajzolva a körök egy íves háromszöget határolnak. Mekkora annak a hat egyforma körnek az r sugara, melyek érintenek egy-egy körívet kívülről és a szomszédosak egymást is az ábra szerint?



(Lásd még: Reuleaux-háromszög, 5.4. fejezet, 108. oldal.)

Első megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



A körök ismeretlen sugara legyen:

$$r = O_1D = O_1E = O_2E$$

A berajzolt hat kör középpontja által meghatározott $O_1O_2O_3O_4O_5O_6$ hatszög szimmetria okok miatt szabályos és középpontja megegyezik az ABC háromszög középpontjával O-val.

Összekötjük az O_1 és O_2 pontokat. Ezen a szakaszon rajta van E pont is. Tehát

$$O_1O_2 = 2r.$$

Mivel $O_1O_2O_3O_4O_5O_6$ szabályos hatszög középpontja O pont, ezért OO_1O_2 háromszög szabályos háromszög, melynek oldala $O_1O_2 = 2r$.

Az OE szakasz így a $2r$ oldalú szabályos háromszög magassága, tehát:

$$OE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2r = \sqrt{3} \cdot r$$

Az AO szakasz az ABC egységoldalú szabályos háromszög magasságának $\frac{2}{3}$ része, tehát

$$AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Összekötjük az A és O_1 pontokat. Ez a szakasz átmegy a D ponton is.

Mivel $AD = 1$, ezért

$$AO_1 = r + 1.$$

Írjuk fel Pitagorasz tételét O_1EA derékszögű háromszögben és rendezzük a kapott egyenletet!

$$r^2 + \left(\sqrt{3} \cdot r + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = (r+1)^2$$

$$r^2 + 3r^2 + 2r + \frac{1}{3} = r^2 + 2r + 1$$

$$3r^2 = \frac{2}{3}$$

$$r^2 = \frac{2}{9}$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}; \qquad r_2 = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Mivel $r_2 < 0$, ezért ez nem lehet a megoldás.

A keresett kör sugara:

$$r = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Második megoldás

Invertáljuk a külső köröket rendre arra az egységsugarú körívre, amelyekkel érintkezik! Két-két érintkező körív képe az íves háromszög egy-egy belső érintő köre lesz.

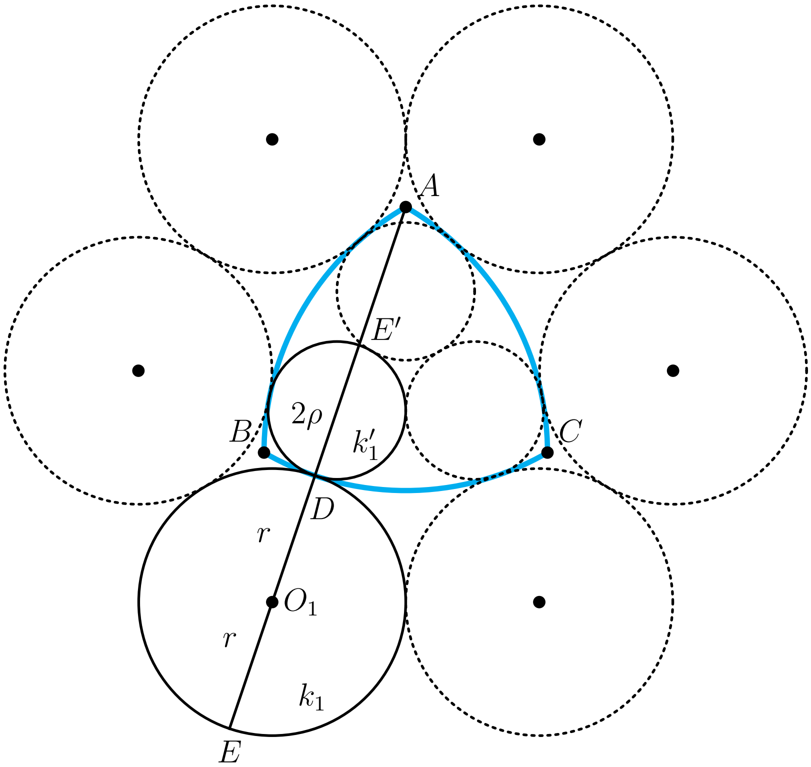
Az egyes alakzatok képeit vesszővel jelölve kapjuk az alábbi ábrát. Használjuk ennek jelöléseit!

Az ismeretlen kör sugara legyen

$$r = O_1D = O_1E.$$

Vegyük észre, hogy a kapott ábra a 35. feladat ábrája , és használjuk fel, hogy a megoldása alapján (93. oldal) a belső körök sugara

$$\rho = -4 + 3\sqrt{2}.$$



Tehát az invertált kör átmérője:

$$DE' = 2\rho = -8 + 6\sqrt{2}.$$

A keresett kör invertált képének, k_1'-nek E' pontja tehát $1 - 2\rho$ távolságra van az inverzió pólusától, A-tól, azaz:

$$AE' = 1 - 2\rho = 1 - \left(-8 + 6\sqrt{2}\right) = 9 - 6\sqrt{2}.$$

Így a keresett k_1 kör E pontjának távolsága az eredeti helyén a pólustól:

$$AE = \frac{1}{AE'} = \frac{1}{9 - 6\sqrt{2}} = \frac{1}{9 - 6\sqrt{2}} \cdot \frac{9 + 6\sqrt{2}}{9 + 6\sqrt{2}} = \frac{9 + 6\sqrt{2}}{9} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3}.$$

Így a keresett kör átmérője:

$$ED = AE - AD = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3} - 1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Így:

$$r = \frac{ED}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

A keresett kör sugara:

$$r = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

5. Függelék

5.1. Javaslatok, ötletek a feladatok megoldásához

Rózsaablakos feladatok általános megoldási lépései:

1) kössük össze az érintkező körök középpontjait egymással és az érintési pontokkal (ezek a pontok egy szakaszon lesznek);

2) keressünk a kialakult ábrán derékszögű háromszög(ek)et (ha nincs elég: húzzunk be merőlegeseket);

3) vezessünk be változót az ismeretlen kör sugarára (esetleg másra is);

4) és a derékszögű háromszögek oldalait fejezzük ki a változókkal;

5) majd a Pitagorasz-tétel alapján fölírt egyenlet(ek)et oldjuk meg vidáman!

5.2. Javaslatok, ötletek a feladatok kitűzéséhez

Ezek a feladatok kiválóan alkalmasak csoportmunkához, könnyen bonthatók résztevékenységekre, ösztönzik a közös munkát. A megoldás során többféle matematikai és egyéb készségre is szükség lehet, így a különböző szemléletmódú tanulók is rátalálhatnak a részfeladataikra.

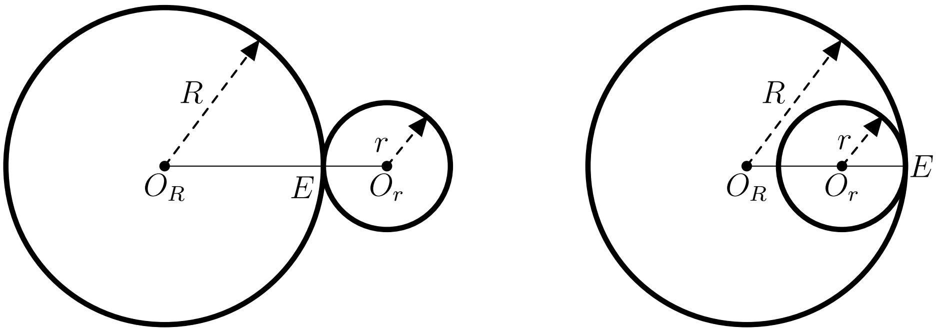
- A kitűzéshez felhasználhatjuk az adott feladatnak megfelelő gótikus ablak képét, így a matematikai modellalkotást is a csoportokra bízhatjuk.
- Akár az is előfordulhat, hogy ugyanarról az ablakképről többféle matematikai reprezentáció is készíthető és összehasonlítva megvitatható.
- További jó ötlet lehet az elvégzett számítások alapján geometriai dinamikus szerkesztőprogram segítségével elkészíttetni a vázlatot, akár ellenőrzésként is.

5.3. Felhasznált tételek, összefüggések

A feladatok megoldása során a következő tételeket, állításokat használtuk fel.

5.3.1. Egymást érintő körök tulajdonságai

Ha R és r sugarú körök kívülről vagy belülről érintik egymást,



akkor a körök O_R és O_r középpontjai és az E érintési pontjuk egy egyenesbe esik.

Középpontjaik távolsága külső érintés esetén:

$$O_RO_r = R + r$$

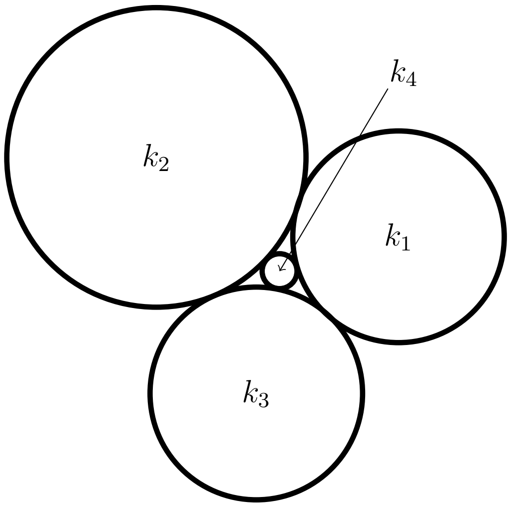
Középpontjaik távolsága belső érintés esetén:

$$O_RO_r = R - r$$

5.3.2. Érintkező körök tétele (Descartes-tétel)

Ha négy kör olyan elhelyezkedésű:

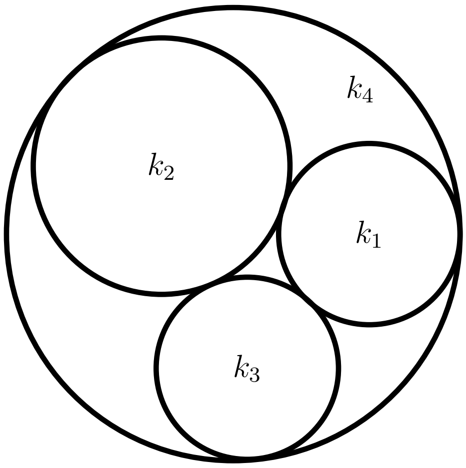
I. **páronként érintik kívülről egymást**



akkor a körök sugaraira fennáll az alábbi összefüggés:

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right)$$

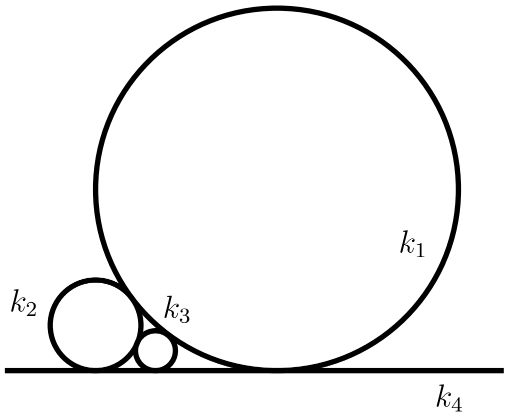
II. **páronként érintik egymást úgy, hogy az egyikük (k_4) tartalmazza a többit**



akkor a körök sugaraira fennáll az alábbi összefüggés:

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}\right)^2=2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right)$$

III. **páronként érintik egymást úgy, hogy az egyikük (k_4) végtelen sugarú**

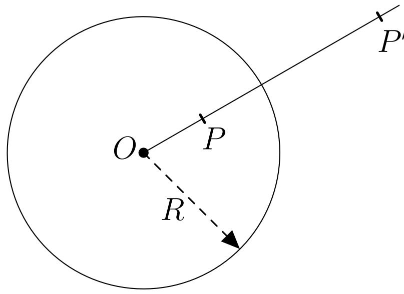


A végtelen sugár egy egyenest jelent. Ekkor a sugár reciproka nulla lesz a képletben. A körök sugaraira itt is fennáll tehát az alábbi összefüggés:

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)^2=2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}\right)$$

További információk : Coxeter: A geometriák alapjai c. könyv („nagy" Coxéter)

5.3.3. Inverzió



Legyen adva egy O középpont, egy $R > 0$ sugarú kör.

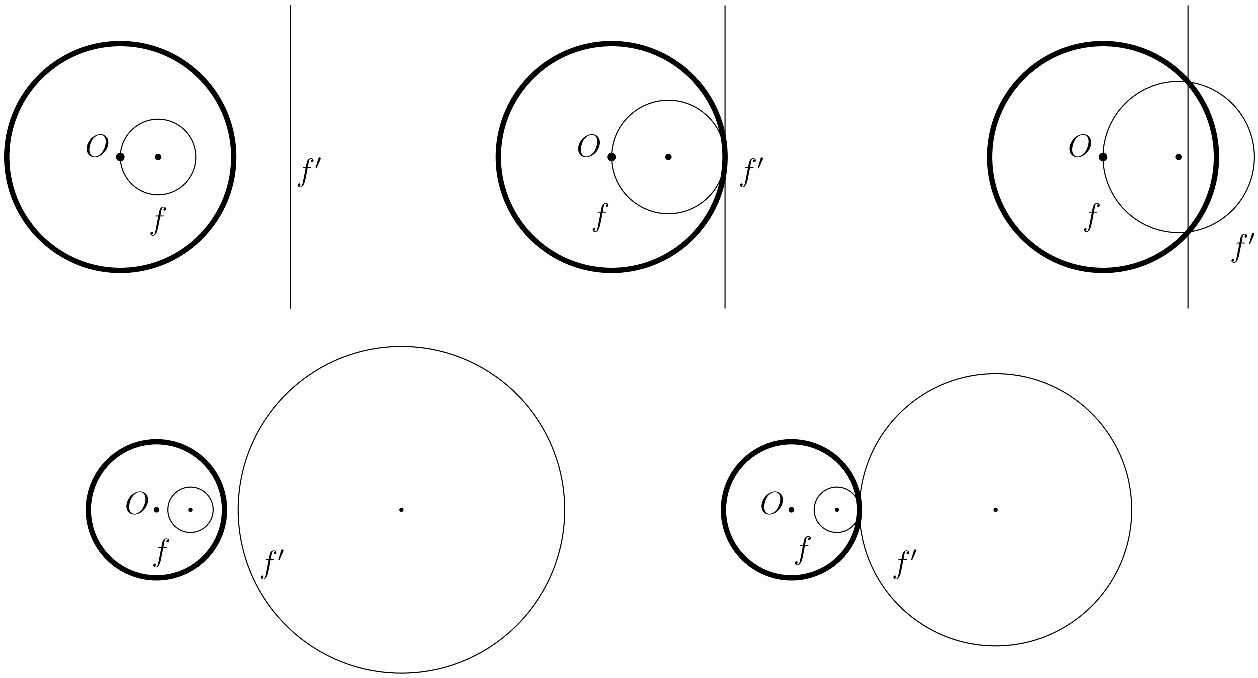
Ezt a kört az inverzió *alapkörének*, az O pontot az inverzió *pólusának*, az R^2 értékét pedig az inverzió *hatványának* nevezzük.

Ha a P pont O-val nem azonos, akkor a P ponthoz hozzárendeljük az OP félegyenesnek azt a P' pontját, amelyre:

$$OP \cdot OP' = R^2$$

Nyilvánvaló, hogy ha P képe P', akkor P' pont képe P. (Tehát az inverzió inverze saját maga.)

Bizonyítás (magyarázat) nélkül álljon itt kör és egyenes inverz képének elhelyezkedése.



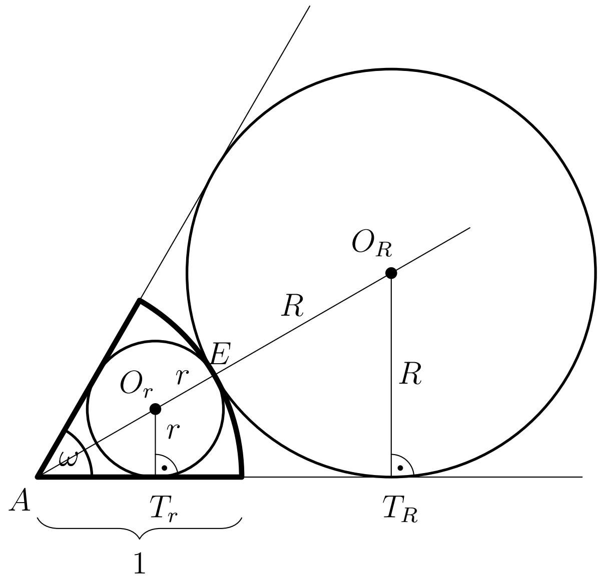
További információk : Coxeter: A geometriák alapjai c. könyv („nagy” Coxéter)

5.3.4. Körcikk és érintő köre

Egy egység sugarú ω szögű körcikkbe és hozzá érintő kört írunk. $(0° < \omega < 180°)$

A körök középpontjai r, illetve R távolságra vannak a körcikk mindkét szárától, vagyis rajta vannak a körcikk középponti szögének szögfelezőjén.

Használjuk az ábra jelöléseit !



Mivel $AE = 1$, ezért $AO_r = 1 - r$ és $AO_R = 1 + R$.

Belülről érintő kör

AT_rO_r háromszögben

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{r}{1-r}$$
$$(1-r)\cdot\sin\frac{\omega}{2} = r$$
$$\sin\frac{\omega}{2} = r + r\sin\frac{\omega}{2}$$
$$r = \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{1+\sin\frac{\omega}{2}}$$

Kívülről érintő kör

AT_RO_R háromszögben

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{R}{1+R}$$
$$(1+R)\cdot\sin\frac{\omega}{2} = R$$
$$\sin\frac{\omega}{2} = R - R\sin\frac{\omega}{2}$$
$$R = \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{1-\sin\frac{\omega}{2}}$$

Megjegyzés

Érdemes megjegyezni:

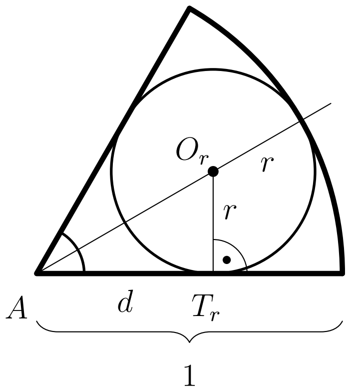
- $\omega = 0°$ esetén mindkét összefüggés jó végeredményt ad,
- $\omega = 180°$ esetén csak a belülről érintő kör ad jó végeredményt.

5.3.5. Körcikkbe írt kör

Ha egy egység sugarú körcikkbe érintő kört írunk, az alábbi összefüggés állapítható meg. Használjuk az ábra jelöléseit!

AT_rO_r háromszögben Pitagorasz tételt felírva:

$$
\begin{aligned}
d^2 + r^2 &= (1-r)^2 \\
d^2 + r^2 &= r^2 - 2r + 1 \\
d^2 &= 1 - 2r
\end{aligned}
$$

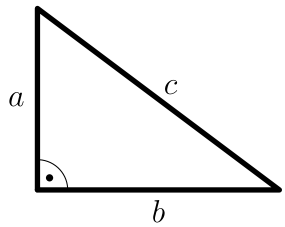


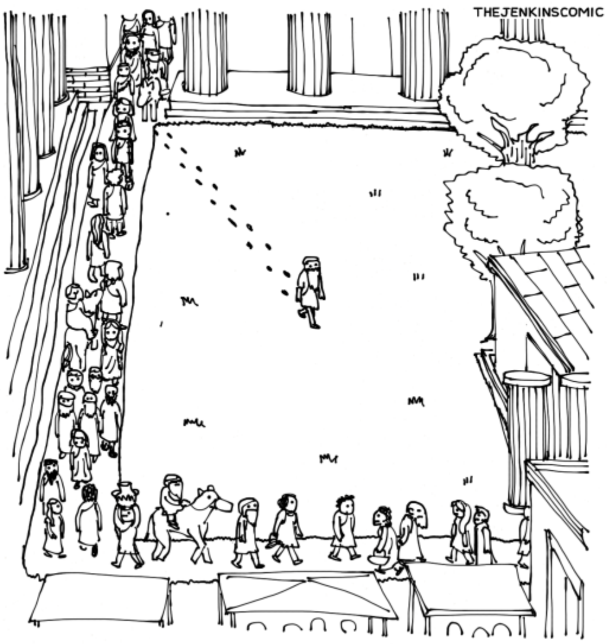
5.3.6. Pitagorasz tétele

A tétel a 8. és 9. osztályos tananyag része, itt most részletesen nem foglalkozunk vele.

Egy derékszögű háromszög befogóinak négyzetösszege megegyezik az átfogó négyzetével. Azaz:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$





"UGH, THERE GOES THAT PYTHAGORAS GUY"

„Úú, ott megy a Pitagorasz csávó!"[12]

[12] https://thejenkinscomic.wordpress.com/2020/06/28/trilateral-thinking/

5.4. Gótikus minták

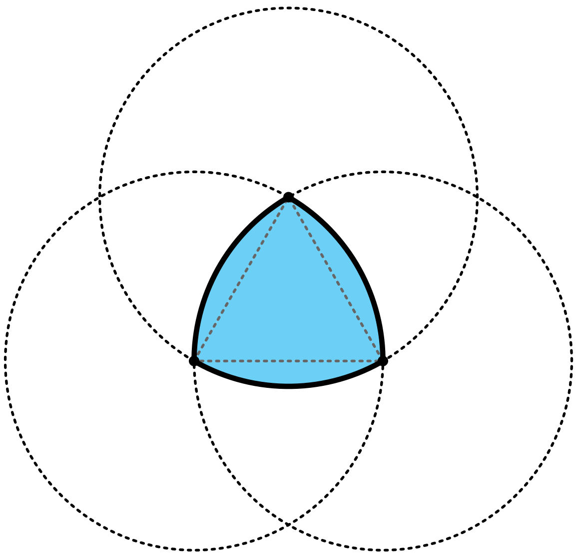
A *gótika* a késő középkor művészeti irányzata, legismertebb formáit az építészetben láthatjuk, főként a templomokon, katedrálisokon.

A gótikában a korábbi félköríves boltíveket felváltják a csúcsívek, az épületek magasba törőek, a nagyméretű tereikbe sokkal több fényt juttatnak a megnövekedett méretű ablakok. Az ablakokat általában kőrácsokkal, kőcsipkével (szakszóval: *mérművel*) gazdagították. A mérmű a díszítés mellett védte is az üvegtáblát a szél ellen, mert így az ablak nagy felületét több kisebb részre bontották. A *rózsaablak* a gótikus templomok főbejárat fölött lévő nagy méretű, kör alakú, leggyakrabban forgásszimmetrikus díszítéssel és küllőkkel ellátott ablakának a neve.

Az ablakok és egyéb nyílások ködíszítései néhány egyszerű geometriai formán – legfőképpen szakaszokon és köríveken – alapulnak, és a gótika előrehaladtával válnak egyre komplexebbé. Az ábrákon ritkábban lehet a teljes köríveket látni, többnyire csak a körök ívdarabjaiból épülnek fel a minták.

Az alábbiakban egy rövid gyorstalpalót állítottunk össze a legtipikusabb díszítőelemek összetevőiről.

Ívháromszög (Reuleaux-háromszög)



Három olyan egyforma sugarú körlap közös pontjainak halmaza, melyek középpontjai a sugarakkal egyforma oldalú szabályos háromszöget határoznak meg. Állandó szélességű alakzat[13], épp úgy, mint a kör.

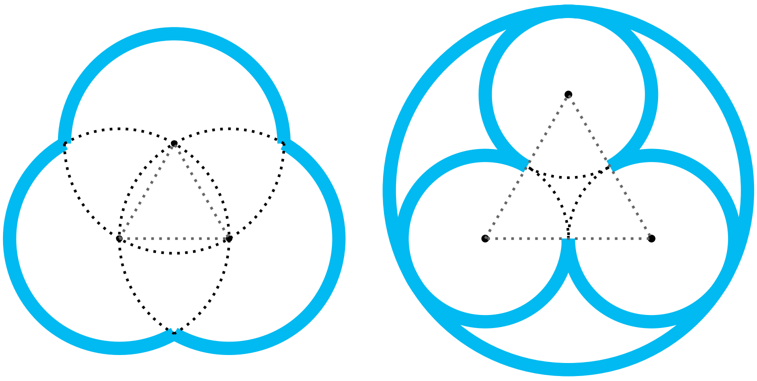
[13] https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=54006716

Karéjok

Levél, vagy még inkább virág formájú alakzatok, melyek egymást átfedő egyforma sugarú körlapok íveiből alakíthatók ki.

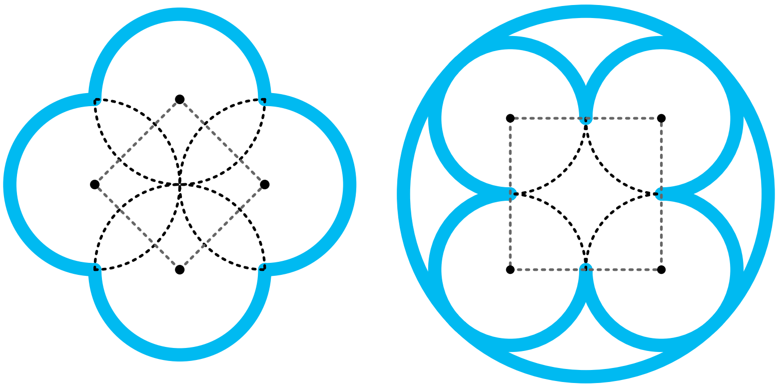
Trefoil (lóhereív avagy hármaskaréj)

Három egymáshoz kapcsolódó körívből álló minta.



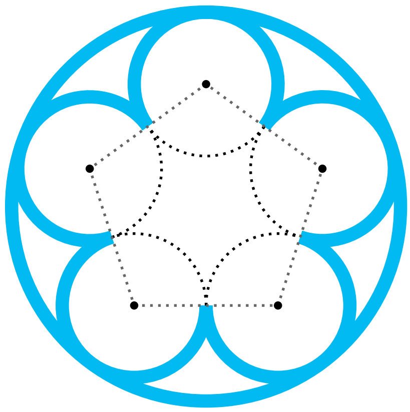
Quatrefoil (négyeskaréj)

Négy egymáshoz kapcsolódó körívből álló minta.



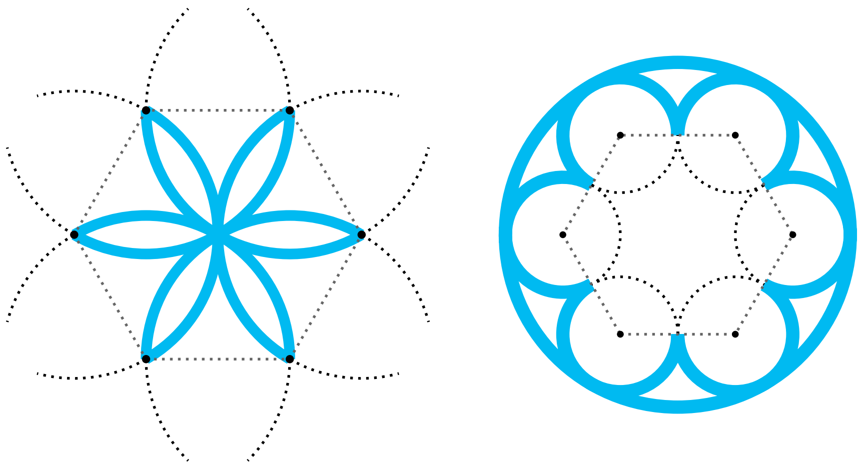
Cinquefoil (ötöskaréj)

Öt egymáshoz kapcsolódó körívből álló minta.



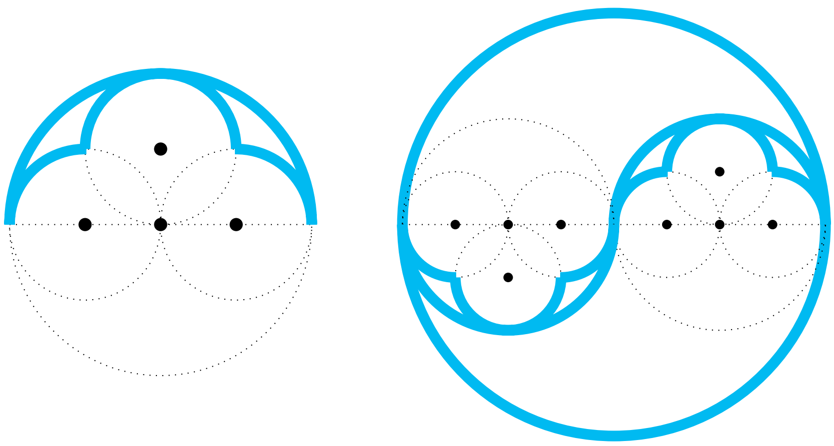
Hexafoil (hatoskaréj)

Hat egymáshoz kapcsolódó körívből álló minta.



Halhólyag

Több körívből álló elem, tőrre vagy lángnyelvre is emlékeztet.



Halhólyagos hármaskaréj

További érdekes gótikus minták és ívek szerkesztési lépései ebből a nagyon részletes geogebra összefoglalóból jól elsajátíthatóak: https://www.geogebra.org/m/w9XAPnJs.

A fenti - és egyéb - gótikus minták sok templomi fotós példával összefoglalva megtalálhatók például itt:

http://www.discoverstwulframs.org.uk/window-tracery/geometrical-tracery.aspx.

1. kiadás (37 feladat): 2020. augusztus 31.

Készült: TeX / LaTeX program segítségével
TikZ csomag felhasználásával

Magyar Eszter (meszter@apaczai.elte.hu)
Szoldatics József (szolda@fazekas.hu)
2020