Marczis György: Ugye, szép a geometria?
Feladatok és megoldások

Kedves, Érdeklődő Olvasóm!

Több mint másfél évtizede veszek részt előadóként a Kárpát-medencei magyarság nagyszerű matematikai seregszemléin, a *Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozó*kon. Ez a találkozó nemcsak szakmai továbbképzést, feltöltődést, kihívást jelent a résztvevő diákok és tanárok számára, hanem összetartozásunkat is erősíti. Éppen ezért örömmel mentem diákjaimmal és kollégámmal egy Békés megyei csapat vezetőjeként az elmúlt év őszén is Révkomáromba.

Dolgozatom a révkomáromi *XXVII. Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozó 2019. november 23*-i előadásom kibővített, szerkesztett anyaga.

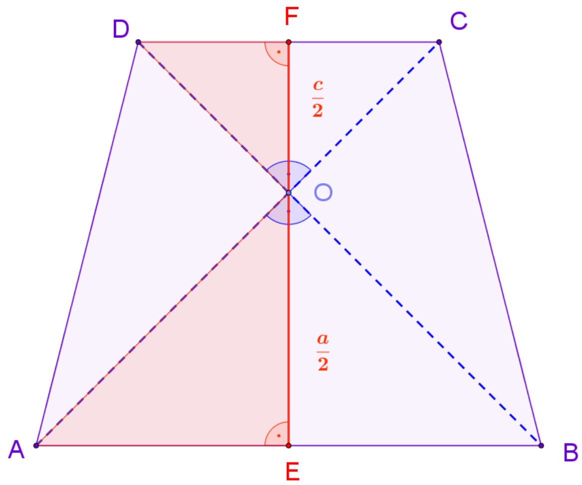
Akkori feladatmegoldó órám elsődleges célja az volt, hogy néhány tanulságos, számomra szép, esztétikus geometriai feladatot bemutassak a diákoknak és a pedagógus kollégáimnak, reménykedve abban, hogy a matematikának a középiskolában egy kicsit elhanyagolt területét megkedveltetem velük. Meggyőződésem, hogy az elemi geometria az alkotó gondolkodásra nevelésben alapozó jelentőségű. A foglalkozás interaktív volt, felhasználtam a dinamikus *GeoGebra* nyújtotta lehetőségeket is, ami az esztétikai nevelésnek egy kiváló lehetősége.

A feladatokat *Eigel Ernő,* csíkszeredai igazgató-matematikatanár *„Síkgeometriai feladatok”* című gyűjteményéből válogattam. A kiadvány második kötete *„Térgeometriai feladatok”* címmel is megjelent már. Mindkét kiváló munkát ajánlom mindenkinek.

Előadásomhoz és a dolgozat megírásához nagy segítséget nyújtott a feladatgyűjtemények szerzője mellett *Pálinkás István* szoftvermérnök, egykori tanítványom, *Horváth Géza* lektor is. Köszönöm munkájukat.

1. feladat: Igazoljuk, hogy egy olyan szimmetrikus trapéz területe, amelynek átlói egymásra merőlegesek, egyenlő egy olyan négyzet területével, amelynek oldala akkora, mint a trapéz magassága!

<u>Megoldás:</u> Legyen O a trapéz két átlójának metszéspontja, EF az O-n áthaladó, az AB és CD alapokra merőleges szakasz! Az egyszerűség kedvéért vezessük be a következő, közismert, megszokott jelöléseket: $AB = a$ és $CD = c$!

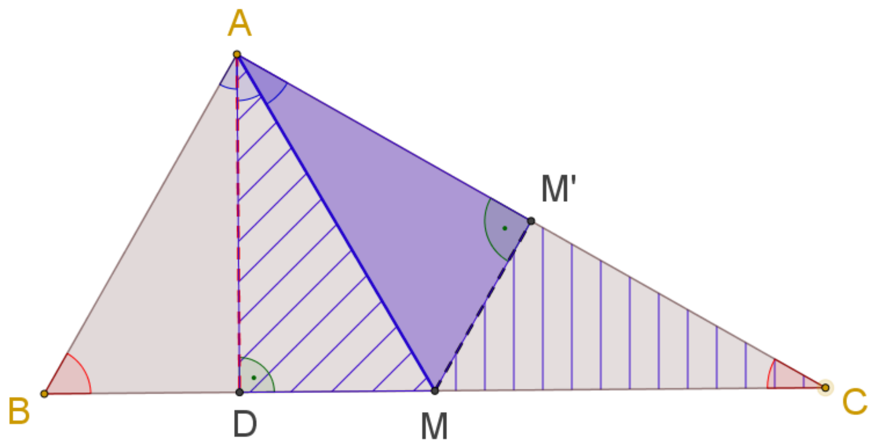


Mivel a négyszögünk szimmetrikus trapéz és $DB \perp CA$, ezért az $ABO\Delta$ és $CDO\Delta$ egyenlő szárú derékszögű háromszög. Az E és F pontok a trapéz párhuzamos oldalainak felezőpontjai, így $AEO\Delta$ és $DFO\Delta$ szintén egyenlő szárú derékszögű háromszög $\frac{a}{2}$ illetve $\frac{c}{2}$ befogókkal. Ebből következik a trapéz területére vonatkozó közismert szabály alapján, hogy:

$$t_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot EF = \frac{a + c}{2} \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{c}{2}\right) = \left(\frac{a}{2} + \frac{c}{2}\right)^2 = EF^2$$

Ezt kellett igazolnunk, hiszen EF^2 megegyezik egy EF oldalú négyzet területével.

2. *feladat: Az **ABC**Δ-ben **AD** magasságvonal és **AM** súlyvonal az ábra szerint. Számítsuk ki az **ABC**Δ szögeit, ha a **BAD**$\angle$, **DAM**$\angle$ és **MAC**$\angle$ -ek egyenlők (a **BC** szakaszon a pontok elhelyezkedési sorrendje: **B**, **D**, **M**, **C**)!*

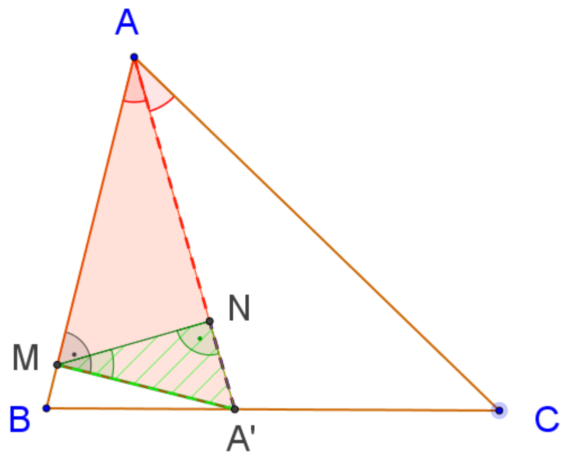


Megoldás: Ha $BAD\angle = DAM\angle$ és $AD \perp BM \Rightarrow ABM\Delta$ egyenlő szárú és $BD = DM$, akkor $MC = 2{\cdot}BD = 2{\cdot}DM$, mert $BM = MC$ (AM súlyvonal, M felező pont). Húzzunk merőlegest M pontból az AC oldalra, legyen a talppont M'! Az $ADM\Delta$ egybevágó az $AM'M\Delta$ -gel, mert mind a kettő derékszögű, mindkettőnek megegyezik a feltételben megadott két hegyesszöge, és az AM átfogó közös. Ebből következik, hogy a $DM = MM'$. Így $2 \cdot DM = 2 \cdot MM' = MC$, amiből következik, hogy az $MCM'\Delta$ félszabályos *(a 30^o*-os szöget tartalmazó derékszögű háromszöget nevezzük félszabályos háromszögnek, hiszen ez egy szabályos háromszög „fele”), tehát az $MCM'\angle = 30^o$, így a $DAC\angle = 60^o$. Mivel a feltétel szerint a $DAM\angle$ és az $MAC\angle$ egyenlő, így ezek mindketten 30^o-osak, de a feltétel miatt a $BAD\angle$ is 30^o-os, tehát a $BAC\angle = 90^o$, az $ABC\angle = 60^o$.

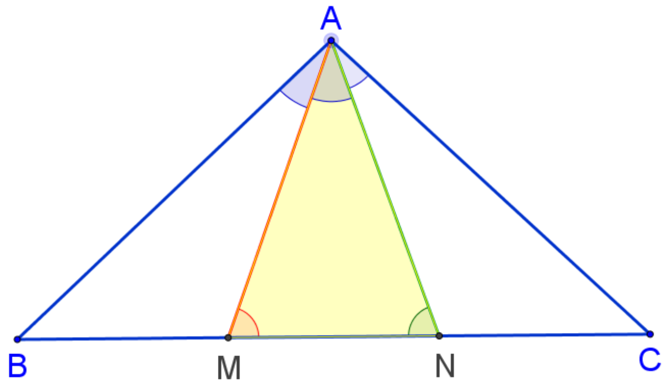
Összefoglalva: az $ABC\Delta$ félszabályos, szögei: 30^o, 60^o és 90^o.

*3. feladat: Az **ABC** hegyesszögű Δ –ben az **A** csúcsnál levő szög **60º**-os, amelynek szögfelezője **AA’** (**A’** ∈ **BC**). Az **A’** pontból húzzuk meg az **AB** oldalra merőleges **A’M** szakaszt (**M** ∈ **AB**), majd az **M** pontból az **AA’**-re merőleges **MN** szakaszt (**N** ∈ **AA’**)! Igazoljuk, hogy **3·A’M = AA’ + 2·A’N**!*

Megoldás: Mivel *BAC∠ = 60º* ⇒ *BAA’∠ = 30º*. *A’MN∠ = BAA’∠ = 30º*, mert merőleges szárú hegyesszögek. Így mind az *AMA’Δ*, mind az *MNA’Δ* félszabályos Δ. Ezek közismert tulajdonsága alapján: *2·A’M = AA’* és *A’M = 2·A’N*. A két egyenlőséget összeadva kapjuk a bizonyítandó állítást: *3·A’M = AA’ + 2·A’N.*

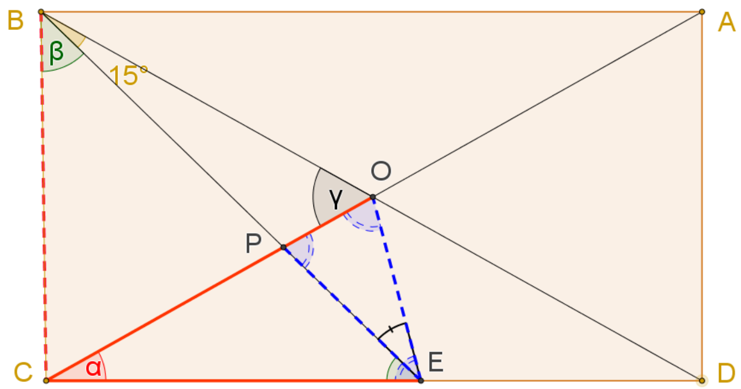


4. *feladat: Az* ***ABC*Δ** *egyenlő szárú (**AB = AC**). Az **A** csúcsnál lévő szögét a **BC** oldal **M** és **N** pontjai által meghatározott **AM** és **AN** szakaszokkal az ábra szerint három részre osztjuk úgy, hogy a **BAM**$\angle$, az **MAN**$\angle$ és az **NAC**$\angle$ egyenlő legyen (harmadoljuk a **BAC**$\angle$ -et). Lehetséges-e, hogy a **BC** oldalon keletkezett **BM**, **MN** és **NC** szakaszok egyenlők legyenek: **BM = MN = NC**?*



<u>Megoldás:</u> Ha $BAM\angle = MAN\angle$ és $BM = MN$ lenne, akkor az $ABN\Delta$ egyenlő szárú lesz, mert az AM szakasz egyben szögfelező és súlyvonal is, így AM oldalfelező merőleges is kell, hogy legyen, ami azt jelenti, hogy $AM \perp BN$, vagyis $AMN\angle = 90^o$. Ugyanígy: ha $MAN\angle = NAC\angle$ és $MN = NC$ lenne, az $AMC\Delta$ szintén egyenlő szárú lenne, ami azt jelenti, hogy $AN \perp MC$, vagyis $ANM\angle = 90^o$. A két állítást összevetve azt kapjuk, hogy az $MNA\Delta$ -nek két derékszöge van, ami lehetetlen, így BM, MN és NC szakaszok egyenlősége az adott feltételek mellett nem lehetséges.

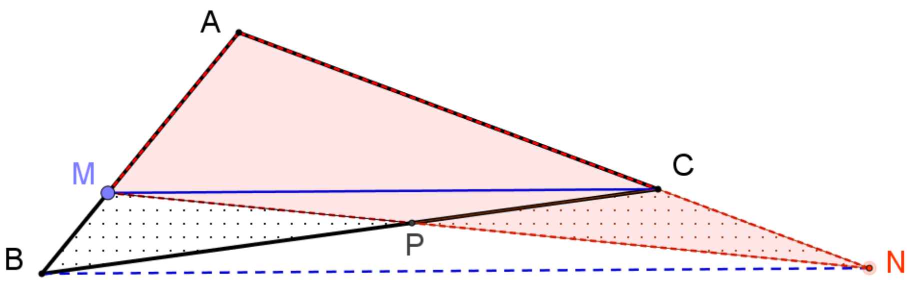
*5. feladat: Az **ABCD** téglalap (**AB>BC**) **B** csúcsából húzott szögfelező és a **B** csúcsból induló átló **15°**-os szöget zár be az ábra szerint. A **B** csúcsból húzott szögfelező az **AC** átlót **P**-ben, a **CD** oldalt **E** pontban metszi. Jelöljük **O**-val az **ABCD** téglalap átlóinak metszéspontját! Igazoljuk, hogy a **COE∆** és **OEP∆** egyenlő szárú!*



Megoldás: Mivel *BE* egy derékszög szögfelezője (téglalap), így $CBE\angle = 45^o$, amiből következik, hogy *BCE∆* egyenlő szárú derékszögű háromszög, így $BC = CE$. Mivel $45^o + 15^o = 60^o$, a téglalap átlói egyenlőek és felezik egymást, így a *BCO∆* szabályos, tehát $BC = CO$. A két egyenlőséget összevetve: $BC = CE = CO$, ami azt jelenti, hogy a *COE∆* egyenlő szárú, amit elsőször igazolnunk kellett. A téglalap tulajdonságából (minden szöge derékszög) és a *BCO∆* szabályosságából (minden szöge 60°) következik, hogy az $OCE\angle = 30^o$. Felhasználva, hogy *COE∆* egyenlő szárú, így $COE\angle = CEO\angle = 75^o$. Mivel *BCE∆* egyenlő szárú és $CBE\angle = 45^o$, így $CEB\angle = 45^o$, amiből az következik, hogy $PEO\angle = 75^o - 45^o = 30^o$ lesz. A *PEO∆* harmadik szöge a belső szögek összege miatt így $OPE\angle = 75^o$, amiből következik, hogy $PE = OE$ (egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldal van), így a *OEP∆* szintén egyenlő szárú, amit másodszorra igazolnunk kellett.

6. *feladat: Legyen* ***ABC*** *háromszög* ***AB*** *oldalának* ***M*** *egy tetszőlegesen mozgó belső pontja!* ***B****-ből* ***CM*** *egyenessel húzott párhuzamos egyenes az* ***AC*** *egyenest az* ***N*** *pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az* ***AMN*** *háromszög területe nem változik, ha az* ***M*** *pont mozog az* ***AB*** *szakaszon!*

Megoldás: A feltételek alapján az $MBNC$ négyszög létezik (M belső pont) és trapéz ($MC \parallel BN$). Legyen P az $MBNC$ trapéz átlóinak metszéspontja!



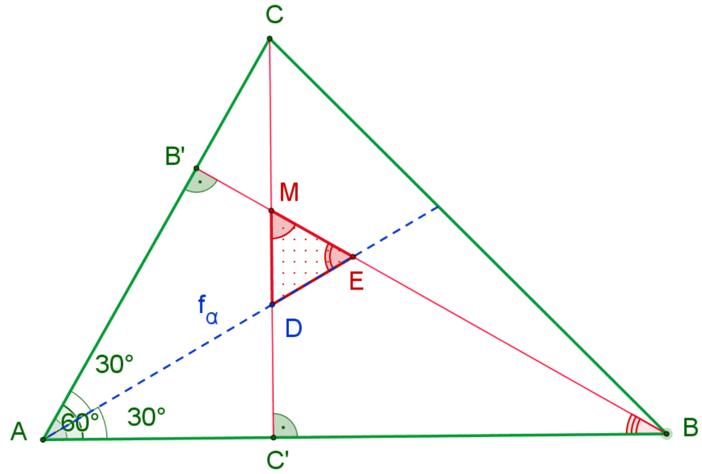
Az $MBN\Delta$ és a $CBN\Delta$ területei egyenlők, mivel BN oldaluk közös, és az ezen oldalhoz tartozó magasságuk az $MC \parallel BN$ miatt egyenlő. Ebből a két egyenlő területből kivonva a $BNP\Delta$ területét, kapjuk, hogy az $MBP\Delta$ és a $CPN\Delta$ (nem szükségszerűen egybevágók) területei megegyeznek. Ezt felhasználva, és a konstrukciót figyelembe véve kapjuk, hogy:

$$t_{AMN} = t_{AMPC} + t_{CPN} = t_{AMPC} + t_{MBP} = t_{ABC}$$

Mivel az $ABC\Delta$ fix volt, így a területe sem változott, állandó maradt, amivel igazoltuk állításunkat.

Megjegyzés: Ha a feltételek között nem ragaszkodunk ahhoz, hogy M belső pont legyen, akkor $A = M$ esetén nem keletkezik háromszög, nincs mit bizonyítani. $M = B$ esetén pedig a keletkezett háromszög megegyezik az $ABC\Delta$ -gel, így az állítás nyilvánvaló.

*7. feladat: Az **ABC** hegyesszögű háromszögben **CAB∠ = 60º**. A **BB'** és **CC'** magasságvonalak egymást **M**-ben, míg a **CAB∠** szögfelezőjét (f_α) a **D** és az **E** pontokban metszik az ábra szerinti elrendezésben. Igazoljuk, hogy az **MDEΔ** szabályos!*

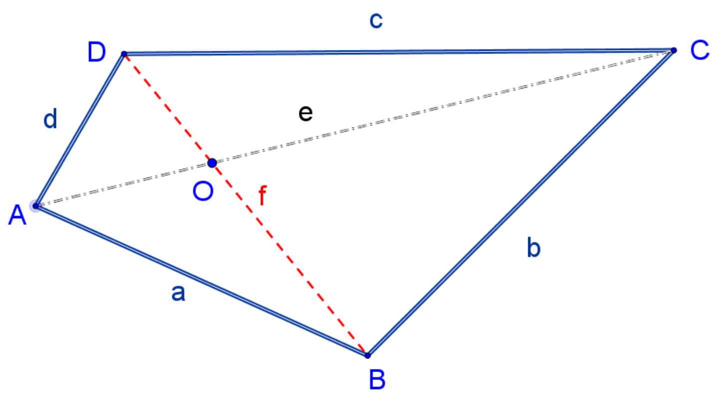


Megoldás: A feltételek között megadott *CAB∠ = 60º*, és f_α szögfelezősége miatt *B'AE∠ = 30º*. A derékszögű *AEB'Δ* (*BB'* magasságvonal) másik hegyesszöge így *AEB'∠ = 60º*, ami a konstrukció miatt azonos a *DEM∠* -gel (más pontokkal jelöltük). Szintén a feltételek miatt (*CAB∠ = 60º* és *BB'* magasságvonal) az *ABB'Δ* derékszögű, és a másik hegyesszöge *ABB'∠ = 30º*. Az *ABB'∠* egyben hegyesszöge a derékszögű *MC'BΔ* -nek is (*MC'* a *CC'* magasságvonal része). A belső szögek összege miatt a *BMC'∠ = 60º*. De a konstrukció miatt a *BMC'∠* és az *EMD∠* azonosak (szintén más pontokkal jelöltük), így az *MDEΔ* másik szöge is *60º*-os. Tehát az *MDEΔ*-ben igaz, hogy *DEM∠ = EMD∠ = 60º*. Így az *MDEΔ* -nek van két *60º*-os szöge, amiből következik a belső szögek összegét ismerve, hogy minden szöge *60º*-os, tehát az *MDEΔ* szabályos. Ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzések: Ha az f_α szögfelező az *M* magasságponton megy át, akkor az *ABCΔ* szabályos lesz, amiből az következik, hogy az *MDEΔ* nem jön létre (elfajuló háromszög), nincs mit bizonyítani. Előfordulhat az is, hogy az *M* pont nem az ábra szerint a szögfelező „felett", hanem „alatt" lesz. A bizonyítás ekkor is lényegében megegyezik az előzővel. Más betűzésű szögeket, alakzatokat kell vizsgálni. Érdemes és hasznos foglalkozni azokkal az esetekkel is, amikor az *ABCΔ* nem hegyesszögű (derékszögű vagy tompaszögű). Ezt az olvasóra bízom, és javaslom, hogy készítsen ábrát *GeoGebrával*, használja ki annak dinamikus funkcióját, lehetőségét!

8. *feladat: Igazoljuk, hogy egy* ***ABCD*** *konvex négyszögben az átlók négyzetösszegének és összegének aránya kisebb, mint a négyszög kerületének a fele!*

Megoldás: Jelöljük az *ABCD* konvex négyszög oldalait és átlóit az egyszerűség kedvéért az ábrának megfelelően: *AB* = *a*, *BC* = *b*, *CD* = *c*, *DA* = *d*, *AC* = *e* és *BD* = *f*!



Alkalmazzuk előbb az *ABC*Δ -ben majd az *ACD*Δ -ben a háromszög-egyenlőtlenséget: $a + b > e$, illetve $c + d > e$! A két egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadva, majd az így kapott egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozva a pozitív *e*-vel, kapjuk: $2 \cdot e^2 < e \cdot (a + b + c + d)$. Hasonlóan járjunk el az *ABD*Δ -ben és a *CDB*Δ -ben! Először kapjuk, hogy $a + d > f$, illetve $b + c > f$. Folytatva a korábbihoz hasonló eljárást: $2 \cdot f^2 < f \cdot (a + b + c + d)$. Az átlók négyzeteit tartalmazó két egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadva, 2-vel és az átlók pozitív összegével leosztva kapjuk: $\frac{e^2+f^2}{e+f} < \frac{a+b+c+d}{2} = \frac{k_{ABCD}}{2}$. Ezt kellett bizonyítanunk, ha figyelembe vesszük az eredeti négyszögben az átnevezéseket.

9. feladat: Igazoljuk, hogy bármely konvex sokszögnek nem lehet háromnál több hegyesszöge!

Megoldás: Jelöljük a konvex sokszögben a szögek számát n-nel, a hegyesszögek számának maximumát k-val, a belső szögek összegét S_n -nel, a hegyesszögek összegét $S_{h,k}$ -val, a nem hegyesszögek összegét pedig S_{n-k} -val!

A jelölésekből és a hegyesszög ($<90^o$) értelmezése miatt:

$$S_{h,k} < k \cdot 90^\circ \qquad (*)$$

Szintén a jelölésekből és a konvexitásból (minden szög $<180^o$) következik:

$$S_{n-k} < (n-k) \cdot 180^\circ \qquad (**)$$

Tudjuk azt is, hogy az n oldalú sokszög belső szögeinek összege:

$$S_n = (n-2) \cdot 180^\circ \qquad (***)$$

A nem hegyesszögek összege felírható a belső szögek összege (***) és a hegyesszögek összegének különbségeként:

$$S_{n-k} = S_n - S_{h,k} = (n-2) \cdot 180^\circ - S_{h,k}$$

Ezt a szögösszeget csökkentjük, ha a hegyesszögek összege helyett nagyobbat *(*)* vonunk ki:

$$S_{n-k} = (n-2) \cdot 180^\circ - S_{h,k} > (n-2) \cdot 180^\circ - k \cdot 90^\circ$$

Felhasználva még a (**) egyenlőtlenséget, következik, hogy:

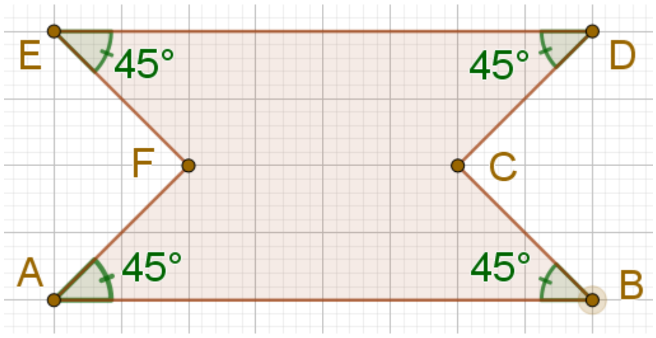
$$(n-2) \cdot 180^\circ - k \cdot 90^\circ < S_{n-k} < (n-k) \cdot 180^\circ$$

A kettős egyenlőtlenség bal oldalán és jobb oldalán álló zárójeleket felbontva, majd az egyenlőtlenséget rendezve kapjuk, hogy:

$$k < 4$$

A jelölések alapján ez pontosan azt jelenti, hogy az n oldalú, konvex sokszögben a hegyesszögek maximális száma nem lehet több, mint három, amit igazolni akartunk.

Megjegyzés: Természetesen az a feltétel, hogy a sokszögünk konvex, elengedhetetlen. Legyen itt egy koordináta-rendszerben *GeoGebrával* szerkesztett, szemléletes ellenpélda, amely nem konvex hatszögben van négy (háromnál több) hegyesszög!

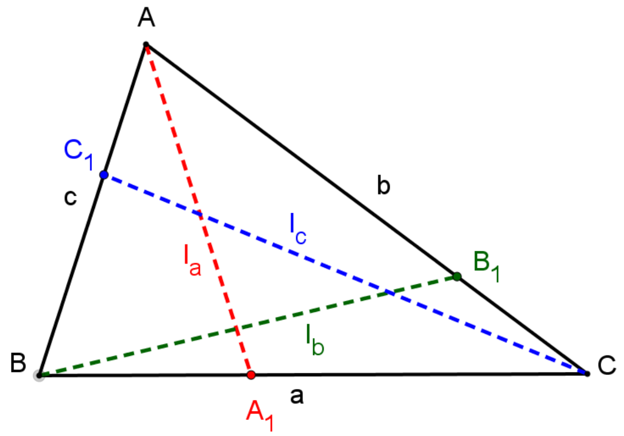


Egy második (talán egyszerűbb) megoldás: a külső szögek összege konvex sokszög esetén mindig *360°*. Így, ha háromnál több belső szöge hegyesszög, akkor ott a külső tompaszögek száma háromnál több lesz, legalább négy, ami lehetetlen, mert azok összege >360°.

*10. feladat: Legyen az **ABC**Δ -nek a **BC**, **CA** és **AB** oldalán egy-egy tetszőleges* $\boldsymbol{A_1} \in \boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{B_1} \in \boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{C_1} \in \boldsymbol{AB}$ *belső pont! Jelöljük az $\boldsymbol{AA_1}$ szakaszt $\boldsymbol{I_a}$ -val, $\boldsymbol{BB_1}$ szakaszt $\boldsymbol{I_b}$ -vel és $\boldsymbol{CC_1}$ szakaszt $\boldsymbol{I_c}$ -vel! Igazoljuk, hogy:*

$$\frac{1}{2} < \frac{I_a + I_b + I_c}{a + b + c} < \frac{3}{2}$$

<u>Megoldás:</u> Az egyszerűség kedvéért vezessünk be további jelöléseket az ábra szerint: $AB = c$, $BC = a$ és $CA = b$!



A bizonyítást két eset vizsgálatával végezzük: nézzük először a kettős egyenlőtlenség bal oldalát, utána pedig a jobb oldalát!

Bal oldali egyenlőtlenség $\left(\frac{1}{2} < \cdots\right)$:

Az $ABA_1\Delta$ -ben és az $ACA_1\Delta$ -ben: $I_a > c - A_1B$ és $I_a > b - A_1C \Longrightarrow I_a > \frac{b+c-a}{2}$

A $BCB_1\Delta$ -ben és az $ABB_1\Delta$ -ben: $I_b > a - B_1C$ és $I_b > c - B_1A \Longrightarrow I_b > \frac{a+c-b}{2}$

Az $ACC_1\Delta$ -ben és a $BCC_1\Delta$ -ben: $I_c > b - C_1A$ és $I_c > a - C_1B \Longrightarrow I_c > \frac{a+b-c}{2}$

Ha a három egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadjuk, utána összevonunk és osztunk a pozitív $(a + b + c)$ -vel, a bizonyítandó kettős egyenlőtlenség bal oldali egyenlőtlenségét kapjuk:

$$\frac{1}{2} < \frac{I_a + I_b + I_c}{a + b + c}$$

Jobb oldali egyenlőtlenség $\left(\cdots < \frac{3}{2}\right)$:

Az $ABA_1\Delta$ -ben és az $ACA_1\Delta$ -ben: $I_a < c + A_1B$ és $I_a < b + A_1C \Longrightarrow I_a < \frac{a+b+c}{2}$

A $BCB_1\Delta$ -ben és az $ABB_1\Delta$ -ben: $I_b < a + B_1C$ és $I_b < c + B_1A \Longrightarrow I_b < \frac{a+b+c}{2}$

Az $ACC_1\Delta$ -ben és a $BCC_1\Delta$ -ben és: $I_c < b + C_1A$ és $I_c < a + C_1B \Longrightarrow I_c < \frac{a+b+c}{2}$

Ha a három egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadjuk, utána összevonunk és osztunk a pozitív $(a + b + c)$ -vel, a bizonyítandó kettős egyenlőtlenség jobb oldali egyenlőtlenségét kapjuk:

$$\frac{I_a + I_b + I_c}{a + b + c} < \frac{3}{2}$$

Mind a két esetben kihasználtuk, hogy: $A_1B + A_1C = a$, $B_1C + B_1A = b$ és $C_1A + C_1B = c$. Ha a két eset vizsgálata végén kapott egyenlőtlenségeket összevetjük, a bizonyítandó kettős egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\frac{1}{2} < \frac{I_a + I_b + I_c}{a + b + c} < \frac{3}{2}$$

Kedves, Érdeklődő Olvasóm!

Ha idáig eljutottál, reményeim szerint ízelítőt kaptál tőlem abból, hogy igen, szép a geometria. De miért szép? Lehet erre pontosan válaszolni? Egy személyes történettel megpróbálom a lehetetlent, hátha sikerül.

Középső gyermekünk amatőrként *hatszoros Ironman* (*3,8 km* úszás, *180 km* kerékpározás, *42,195 km* futás). Minden nagyatádi versenyét, látva a fantasztikus teljesítményét, küzdelmét, szülőkként kicsit izgulva, de nagyon büszkén szurkoltuk végig. Megkérdeztük tőle többször is: miért csinálod, hiszen ez annyira nehéz. Sosem volt a kérdésre egzakt, egyértelmű válasz. Egyszer viszont elküldte nekünk kérdés nélkül *Juhász Gyula - Szerelem?* című versének utolsó versszakát:

„Én nem tudom, mi ez, de jó nagyon,
Fájása édes, hadd fájjon, hagyom.
Ha balgaság, ha tévedés, legyen,
Ha szerelem, bocsásd ezt meg nekem!”

Mindent megértettünk. Talán ez a vers lehet a válasz a címben feltett kérdésre is!

Bízom benne, sokan így vagytok, így lesztek vele!

Gyula-Békéscsaba, 2020. március 19.

Marczis György
matematika-fizika szakos mestertanár
Békéscsabai Andrássy Gyula Gimnázium és Kollégium