dr. Majoros Mária

A kevesebb a több

A tanárt mindig kísérti a gondolat, hogy kifut az időből, és nem jut el a tananyag végére az érettségiig. Ez az aggodalom arra késztet sokakat, hogy siessenek, és minél több ismeretet bezsúfoljanak a rendelkezésre álló időbe.

A tanulás azonban nem lineáris jelenség. A tananyag mennyiségének megnövelése nem vonja maga után a tudás növekedését is. Sőt a tananyag megnövelése egy bizonyos ponton túl olyan hatást vált ki, mintha egy 1-nél kisebb alapú exponenciális függvény növekedését vizsgálnánk. Minél nagyobb a kitevő, annál kisebb értéket vesz fel a függvény.

Ha egy matematikából átlagos képességű gyereknek túlméretezett mennyiségű tananyagot akarunk megtanítani, akkor azt tapasztaljuk, hogy a tudása szabályosan leépül, és egy idő után a legegyszerűbb összefüggések felismerésére sem képes már.

A tananyag megnövelése szinte minden esetben maga után vonja, hogy a tanár nem tud tekintettel lenni a jó és biztonságos matematikatudás alapját adó tapasztalatszerzésre. Így a gyerekek számára az egyetlen információforrás a fogalmak verbális körülírása, azaz a definíció. Miután a gyerekeknek nincs arra lehetőségük, hogy az új fogalmakkal kapcsolatban megfelelő tapasztalatokat szerezzenek, ezért a matematikai ismeretszerzésük is torz irányban fejlődik: alapvetően a memóriájukra támaszkodva próbálnak feladatokat megoldani. Ilyenkor figyelhetjük meg feladatmegoldás közben, hogy kétségbeesetten kutatnak az emlékeik között: „mit is kell csinálni hasonló esetben”.

A jelentősen felduzzasztott tananyagnak van még egy a tanulást erősen korlátozó hatása. Nem tudjuk azokat az alapvető összefüggéseket és struktúrákat megmutatni, amelyek az átlagos képességű gyerekek számára a biztos tájékozódás alapját képezik. Ennek olyan következménye van, hogy az analitikus gondolkodásuk visszafejlődik, a matematikai feladatokkal kapcsolatban felületes benyomás alapján alkotnak ítéleteket, amelyek általában nem helytállóak.

Ebben a tanulmányban egy olyan gyerek esetét fogom elemezni, akit a matematika tanulása szempontjából átlagos képességűnek tekinthetünk. A gyerek olyan iskolába járt, ahol úgy döntöttek, hogy minden tizenegyedikes gyerek számára kötelezővé teszik a heti hat matematikaórát, mert így kívánták biztosítani az érettségire történő megfelelő előkészítést. Dóri év végén megbukott. Pótvizsgára készítettem fel. A gyerek nálam mutatott tanulási folyamatát és teljesítményét fogom elemezni abból a szempontból, hogy az iskolai oktatás hogyan hatott Dóri matematikai ismereteinek felépülésére.

Ennek bemutatására azért választottam a hatványozás azonosságai és az exponenciális egyenletek témakört, mert nagyon plasztikusan megmutathatók azok a tanításból fakadó, az ismeretek megfelelő elsajátítását korlátozó elemek, amelyek következtében egy a matematika tanulásához pozitívan hozzáálló, együttműködőnek tekinthető gyerek is egyre gyengébb teljesítményt nyújt, és a gondolkodása fokozatosan kaotikussá válik.

<table>
<tr><th>A téma órai felépítése</th><th>Mi nehezítette a megértést ebben a felépítésben?</th></tr>
<tr><td>I. rész: elméleti ismeretek

A hatványozás definíciója
A 0 és negatív kitevőjű hatvány értelmezése
A hatványozás azonosságai
A négyzetgyök fogalma
Az n-ik gyök fogalma páros és páratlan gyökkitevő esetén
Az n-ik gyök azonosságai
A törtkitevő és az n-ik gyök kapcsolata</td><td>

A gyerek jegyzetében két oldalon át képleteket és jelöléseket találtam, amelyekhez sehol nem volt egyetlen példa sem.
Az ilyen oktatási helyzet azt sugallja a gyerek számára, hogy a matematikai feladatok megértése és helyes kezelése a megfelelő képletekre történő emlékezésen alapul. Tehát nem csodálkozhatunk azon, ha a matematika tanulását memoriterként kezelik.</td></tr>
<tr><td>II. rész: a hozzá kapcsolódó gyakorlás

Néhány feladat a négyzetgyökjel alá történő bevitelre és kihozatalra
Két feladat az egész kitevőjű hatványok körében végzett műveletekre: törtes kifejezések átalakításai
Két feladat a nevező gyöktelenítésére
Két feladat gyökös kifejezések azonos átalakítására:

$\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2}$ tipusú

Egy feladat n-ik gyökre, ahol megpróbálták bemutatni, hogy a törtkitevőre történő áttérés gyakran leegyszerűsíti a műveletvégzést

$\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = \left(\left(a^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

Az exponenciális függvény bevezetése és tulajdonságainak vizsgálata</td><td>

Amennyiben a matematika tanulásához jó képességű gyerekekkel foglalkozunk, talán nem vezet káoszhoz egy ilyen felépítés. Átlagos képességű gyerekek esetében azonban a nem következetesen megválasztott feladatok megerősítik, hogy a matematikai problémák megértése és helyes megoldása kizárólag ötletek kérdése. A feladatok ilyen felépítésével egy olyan tapasztalatot erősítünk meg, nincs értelme a tanult ismeretek segítségével elemezni a feladatokat, mert nem visz közelebb a megoldáshoz, tehát jó esély van arra, hogy egy adott téma kapcsán az előszóban említett analitikus elemző képességük egyáltalán nem jön létre.
A tanulás kezdetén Dórinál ez a jelenség tökéletesen megfigyelhető volt. A hatványozás azonosságaira vonatkozó feladatokat nem elemezte a műveletvégzés sorrendje szempontjából, és egyáltalán nem volt képes azoknak a sémáknak a felismerésére, amelyek egy-egy azonosságnak megfeleltek, tehát alkalmazható volt az adott összefüggés.
Elég gyorsan javítható volt a hibája. Miután megoldotta a feladatokat, arra kértem, hogy minden egyes lépést magyarázzon meg valamelyik azonosság segítségével. Megbeszéltük, hogy a hatványozás</td></tr>
</table>

azonosságait úgy kell értelmeznie, mint olyan szabályokat, amelyek arról szólnak, hogyan végezhetünk műveleteket a hatványalakban megadott számokkal. Csak olyan műveletet tud elvégezni, amihez hozzá tud rendelni egy azonosságot, amit mi a hatványalakra vonatkozó számolási szabálynak neveztünk.
A következő hónapokban részletesen elemezni fogom az azonosságok tanításának módszertanát.

III. rész: exponenciális egyenletek

Sorrendben a következő feladatokat oldották meg órán:

$3^x = 27$

$2^{5x-3} = 16$

$5^x = 3^x$

$\left(\frac{1}{27}\right)^x = \left(\frac{1}{9}\right)^{x-1}$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-x-2} = 1$

$\sqrt[3]{4^x} = \sqrt{2^{3x+1}}$

$3^{|x|} = 27$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$

$3^{2-3x} = 81^{4x+1}$

$\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{3}{5}\right)^{3-x}$

$3^{x-4} = 2^{x-4}$

$2^x \geq 16$

$2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x + 4 = 0$

A feladatoknak a fele órán fordult elő, a másik fele házi feladat volt, de ezek teljes megoldását is elvégezték a következő órán. Erre többek között azért is szükség volt, mert a gyerekek olyan szinten nem értették, hogy miről van szó, hogy még arra sem voltak képesek, hogy a feladatokat rendesen leírják.
A $3^{x^2-2x+3} = \frac{1}{9}$ helyett például a $3^{x^2} - 2x + 3 = \frac{1}{9}$ egyenletet írta le Dóri.

A kiválasztott feladatok azt mutatják, hogy a tanár igyekezett egy olyan feladatcsokrot összeállítani, amely tartalmazza azokat az alapvető „ötleteket”, amelyek az exponenciális egyenletek megoldása során előfordulnak. Ugyanakkor az egyes „ötletekre” adott példák száma nagyon aránytalanul lett kialakítva.

Túlsúlyban vannak azok a feladatok, amelyek megoldása az exponenciális függvény szigorú monotonitására vezethető vissza. Ugyanakkor a másodfokúra visszavezethető exponenciális egyenletre mindössze egyetlen feladatot találunk. Ugyancsak egyetlen exponenciális egyenletet kaptak a gyerekek, melynek megoldása elsőfokú egyenletre vezethető vissza.

Ha megfigyeljük a sorrendet, akkor a másodfokúra visszavezethető egyenlet

$2^{x+1}+8=2^{x+2}$ $4^{x+1}+2^{x+1}-8\cdot 2^{x}=0$ $3^{x^2-4x+2}=\frac{1}{9}$ $5^{(2x-1)(x+3)}=1$ $11^{x-2}=4^{2x-4}$ $2^{(x-1)(x-2)}\leq 1$ Három órát szántak ezeknek a feladatoknak a megoldására. A Dórit tanító tanár ezzel lezárta a téma alapszintű tárgyalását. Ezután következtek a két ismeretlenes egyenletrendszerek majd a felvételi feladatok.	megelőzi az elsőfokúra visszavezethető egyenletet. A feladatsor végén újra előjönnek azok a feladatok, amelyek megoldása szigorú monotonitásból következik. Ezek az egyenletek valószínűleg azért kerültek ide, mert a megoldásuk szintén másodfokú egyenletre vezetett. Ezek a másodfokú egyenletek azonban a kitevőre levont következtetés alapján írhatók fel, és közvetlenül kiszámítható belőlük az ismeretlen. A feladatsor végén megjelenik egy egyenlőtlenség is, melynek megoldása másodfokú egyenlőtlenségre vezethető vissza. Az utolsó előtti feladat megoldása némi átalakítás után ismét a függvény tulajdonságára vezethető vissza. A bevezető feladatsor arra utal, hogy a Dórit tanító tanár ezeknél a feladatoknál maga is az egyéni ötletességet tekintette a legfontosabb gondolkodási eszköznek, így a megoldás során alkalmazott jól körülhatárolható eljárások teljesen esetleges sorrendben jelentek meg. Egy ilyen összeállítás tökéletes káoszhoz vezet az átlagos képességű gyerekeknél.

A feladatok mennyisége és tartalma azt mutatja, hogy a tanár abból indult ki, hogy a fogalmak ismertetése a helyes megértéshez elegendő információforrás. A valóságban azonban a helyes matematikai fogalmak, és összefüggések kizárólag tapasztalat útján szerezhetők meg. Ezt a tapasztalathoz a gyerekek úgy jutnak hozzá, hogy különböző feladatokban kipróbálják azokat az értelmezési lehetőségeket, amelyeket a verbális megfogalmazás közvetít számukra. A matematikából jó képességű gyerekek esetében a verbális megfogalmazás általában egyértelműen azt közvetíti, ami a fogalom valódi matematikai tartalma. Az átlagos képességű vagy matematikából gyengébb képességű gyerekek esetében azonban szinte minden esetben megfigyelhető, hogy többé-kevésbé eltorzul a matematikai tartalom, ami a nyelvi jelentés többértelműségére vezethető vissza. Ennél a példánál maradva nézzük azt a teljesen hétköznapinak tűnő elnevezést, hogy „bevinni a gyökjel alá”. Ez a szó hétköznapi értelmében azt jelenti, hogy beírjuk a mennyiséget a gyökjel alá. A nyelvi jelentésből kiindulva tehát a $3\cdot\sqrt{5}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$ átalakítás sokkal természetesebb, mint a $3\cdot\sqrt{5}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}$. Ahhoz azonban, hogy ezt a matematikához kevesebb affinitással rendelkező gyerekek is megértsék, arra van szükség, hogy elrontsák egy-két feladat megoldását. Ebben az esetben arra kérhetjük őket, hogy zsebszámológép segítségével számolják ki az egyelőség jobb illetve bal oldalán felírt mennyiségeket. Ekkor a saját tapasztalatuk lesz, hogy valami olyan hibát követtek el, amitől nem igaz az egyenlőség.

A saját tanítási tapasztalatom azt mutatja, hogy a megértést nagyban segíti, ha a gyerekeknek elmagyarázzuk, hogy a matematika jelölés lehetővé teszi, ha ugyanazt a mennyiséget többféle szimbólum segítségével írjuk le. Általában gyorsan rájönnek, hogy a tanulmányaik során az első ilyen nagy szimbólumváltás akkor történt, amikor az egész számokról áttértek a törtes jelölésre. Ahogyan akkor az új szimbólumhoz jelentést kellett rendelni, hiszen önmagában véve semmi értelme nincs két egymás alá írt egész számnak, amelyeket egy rövid vonal választ el, úgy önmagában véve a gyöknek sincs semmilyen értelmes jelentése. A definíció rendel hozzá tartalmat, és utána ennek megfelelően kell értelmezni és használni a különböző mennyiségek megjelölésére. Tehát a „bevitel a gyökjel alá" igazi tartalma, hogy az új szimbólum segítségével fel kell írni egy mennyiséget, és ez a megfogalmazástól függetlenül csak a szimbólumhoz rendelt jelentés alapján történhet.

Amikor tanítás közben megállunk, és hosszasabban elidőzünk egy-egy fogalomnál, akkor nem kell attól félnünk, hogy ez túl nagy időveszteséget okoz, mert a helyes megértés kialakítására fordított idő sokszorosan megtérül később. Dóra is lényegesen jobban értette és kezelte ettől a magyarázattól a gyökös kifejezéseket.

A fent bemutatott elnagyolt tanításnak, amely gyorsan végigmegy az alapfogalmakon, hogy utána úgynevezett összetett feladatok megoldásán időzhessen el hosszabb ideig, van még egy, a gondolkodás fejlődését jelentősen visszafogó hatása. A gyerekek globálisan érzékelik a matematikai szimbólumokat, amelyekhez általában lineáris jelentést kapcsolnak. Ez szintén természetesen következik abból a tényből, hogy hat éves koruktól kezdve minden írott szöveget így olvasnak ki, és ez el is vezet a nyelvi szövegek megértéséhez. A matematikában azonban minden jelentés levezetés eredménye, nevezetesen azoknak a lépéseknek az összessége, amelyekkel az adott kifejezést létrehoztuk. Ezért nem elég egyetlen példát hozni arra, hogy egy többszörösen beágyazott gyök hogyan írható át törtkitevőjű hatvánnyá. Amikor ezt tesszük, olyan, mintha egy magyartanár azt várná a gyerekektől, hogy egyetlen nagyon bonyolult összetett mondat bemutató elemzése után legyenek képesek bármilyen összetett mondat elemzésére.

Ilyen tanítási környezetben a gyerekek nem jutnak el annak megértéséig, hogyan tudják az új ismereteik segítségével felépíteni és elemezni az új típusú algebrai kifejezéseket. Ennek a gondolkodásállapotnak az a tipikus tünete, hogy teljesen esetlegesen alkalmaznak azonos átalakításokat. Ha rájuk szólunk, hogy rossz, amit csinálnak, akkor ugyanolyan véletlenszerűen kezdenek el valamilyen más átalakítást. Miközben esetleg pontosan felmondják az összes azonosságot, minden feladatmegoldásuk a külső szemlélő számára vakpróbálkozásnak tűnik.

Ezek után - azt hiszem - természetesnek kell tekintenünk, hogy Dóri az egyenletek megoldásával is teljesen hadilábon állt. Fogalma nem volt arról, mi az exponenciális egyenlet, és egyáltalán hogyan lehet elkezdeni egy ilyen egyenlet megoldását. Semmilyen elképzelése nem volt arról, mi az egyenlet megoldása és a függvény között a kapcsolat.

A következő magyarázat segített számára abban, hogy jobban átlássa a témát. Először is tisztáztuk, hogy a korábban megismert lineáris és a másodfokú egyenletek úgynevezett algebrai egyenletek, melyek a négy alapművelet segítségével lebonthatók, ezért a mérlegelv segítségével megoldhatók.

Az exponenciális egyenlet nem algebrai egyenlet, tehát más megoldási eljárásokat kell keresnünk, ha meg akarjuk találni ezeknek az egyenleteknek a gyökeit. Ezek az eljárások („ötletek") nagyjából két nagy csoportra bonthatók:

1. Az első esetben a függvény tulajdonságára tudunk hivatkozni. Amennyiben sikerül elérnünk, hogy az egyenlőség mindkét oldalán ugyanolyan alapú hatvány legyen, ami egytagú kifejezés, akkor a szigorú monotonitásból következik, hogy az alapok egyenlősége maga után vonja a kitevők egyenlőségét.

   Ebből az egyenlőségből már ismert első vagy másodfokú egyenleteket kapunk, amelyek megoldása nem okoz nehézséget.

2. A másik csoportba azok az egyenletek tartoznak, amelyek az exponenciális tagban válnak első vagy másodfokú egyenletté. Amikor az exponenciális tag értékét meghatároztuk, akkor második lépésben ismét a függvény tulajdonságára hivatkozva tudjuk meghatározni az ismeretlen értékét.

   Megbeszéltük, hogy csak nagyon egyszerű esetben fordul elő, hogy minden átalakítás nélkül közvetlenül felismerhető az első vagy másodfokú egyenlet. Többnyire a hatványozás azonosságai segítségével tudunk olyan átalakításokat csinálni, hogy az együtthatók leolvashatók legyenek.

   Dóri nagyon jól megértette az exponenciális egyenletek megoldása során alkalmazott eljárások lényegét, és rövid időn belül a nem túl bonyolult esetekben önállóan is jól alkalmazta ezeket. Nagy megkönnyebbülést okozott számára, hogy nem „ötletek" kellenek a megoldáshoz, hanem „csak" arra van szükség, hogy bizonyos strukturális összefüggéseket felismerjen, és ez a képesség megtanulható.

3. Dóri semmilyen kapcsolatot nem látott az egyenlet és az egyenlőtlenség között. Megdöbbentette a tény, hogy az egyenlőtlenség tartalmát tekintve rokon az egyenlettel, csak itt nem arra vagyunk kíváncsiak, hogy az ismeretlen mely értékeinél vesz fel a függvény egy adott értéket, hanem arra, mikor vesz fel kisebb vagy nagyobb értéket. Nagy megkönnyebbüléssel vette tudomásul, hogy az egyenlőtlenségek megoldása során ugyanazt a szemléletet kell alkalmaznia, mint az egyenletek megoldásánál.

Egyszer az egyik tanítványom azt mondta az őt nagyon igényesen tanító, de hihetetlenül túlméretezett mennyiségű tananyagot megtanítani akaró tanáráról: „Nagyon szeretem őt, mert nagyon rendes ember, de sajnálom, mert nem veszi észre, hogy amit csinál olyan, mintha egy 1 literes üvegbe egy vödör vizet akarna beönteni. A víz nagy része melléfolyik, és az üveg majdnem üres marad. Pedig ha lassan öntené a vizet, akkor kevesebb menne mellé, és az üveg is tele lenne. És akkor mindenki boldogabb lenne. A tanár úgy látná, van értelme a munkájának, mi is örülnénk, mert valamit nagyon jól megértenénk és megtanulnánk."

Majoros Mária
mmajoros@lauder.hu