Pósa Lajos

# SOROZATOK
## tanári útmutató

Műszaki Könyvkiadó, Budapest

A könyv a Soros Alapítvány támogatásában részesülő
Matematika-módszertani Kutatócsoport közreműködésével,
az először 1983-ban megjelent jegyzet alapján készült.

A rajzokat készítette: Halmos Mária



ISBN 963 16 2231 2

Kiadja a Műszaki Könyvkiadó
Felelős kiadó: Bérczi Sándor ügyvezető igazgató
Felelős szerkesztő: Halmos Mária
Műszaki vezető: Abonyi Ferenc
Borítóterv: Biró Mária
Műszaki szerkesztő: Ihász Viktória
A könyv terjedelme: 2,145 (A/5) ív
Azonossági szám: MK 1101507

# Néhány szó a könyvsorozatról

A Matematika-módszertani Kutatócsoport középiskolai matematikatankönyv-sorozata, melynek ez a könyv is része, egy 1973-tól mintegy másfél évtizeden keresztül folyt tanítási kísérlet eredménye.

Ezúton mondunk köszönetet azoknak a tanároknak, akik részt vettek a kísérletben és minden munkatársunknak, akik értékes tapasztalataikkal, beszámolóikkal, megjegyzéseikkel nagyon sokat csiszoltak, javítottak az anyagokon.

Köszönetet mondunk Surányi Jánosnak, aki két évtizedig vezette a kutatócsoport sok nehézséggel terhes munkáját, figyelemmel kísérte, összefogta és kézben tartotta a tanítási kísérletet, nagy szakmai tudásával és emberségével segítette az iskolákban folyó munkát, a tanárok számára komoly támaszt jelentve; vállalta a kísérleti anyagok elkészítésének folyamatos szakmai irányítását, beleértve az anyagokhoz készített részletes bírálatait, amelyek alapján az évek folyamán sok jelentős javításra került sor.

Köszönettel tartozunk Gádor Endrénének, aki a kísérletező tanárok munkáját segítette, és akinek a kísérleti anyagok javításában is sok része volt, és Genzwein Ferencnek, aki a 80-as években nagy segítséget nyújtott ahhoz, hogy a kísérleti munkákat folytathassa a kutatócsoport.

Nagy szeretettel gondolunk Gábos Ildikóra, aki már sajnos nincs közöttünk, és aki nagy tanári tapasztalatával, a kísérletben való lelkes és áldozatkész részvételével, tanári útmutatók készítésével nagyon jelentős részt vállalt könyvsorozatunk kialakításában.

Hálával tartozunk Péter Rózsának, aki élete utolsó éveiben – már nagyon betegen is – igen sokat segített a könyvek elkészítésében; Rényi Alfrédnak, aki annak idején a Matematika-módszertani Kutatócsoportot a Matematikai Kutató Intézetben létrehozta, és aki nagyon hatékonyan támogatta a tanulók önállóságára, kezdeményezéseire, tapasztalataira, felfedezéseire építő matematikatanítást.

Köszönettel tartozunk Kékes Máriának, aki a Műszaki Kiadó részéről sokat tett azért, hogy ez a könyvsorozat minél tökéletesebben juthasson el az iskolákba.

Könyveink szedését D. E. Knuth amerikai matematikus TEX matematikai kiadványszerkesztő programjával készítjük. Bori Tamásnak, Fried Katalinnak és Juhász Lehelnek köszönjük, hogy ennek a lenyűgözően matematikus-lelkületű programnak különböző fortélyait megismertették velünk.

*Halmos Mária*
a könyvsorozat alkotó szerkesztője

**I.** Időnként hivatkozni fogok az **Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából** című példatárra. F/117 e példatár 117. feladatát jelöli, míg a betűjelzés nélküli, kiemelt számok a jelen anyag feladatainak sorszámát jelzik (és nem az oldalszámot).

Az említett feladatgyűjteményből átvettem néhány feladatot, főként olyankor, ha úgy éreztem, hogy egy feladatot épp egy meghatározott helyen célszerű feladni.

Az Összefoglaló feladatgyűjtemény sorozatokkal foglalkozó része sok nehéz, gondolkodtató kérdést tartalmaz. Ezeknek csak egy részét fogjuk megközelíteni hasonló jellegű, olykor csak a paraméterekben különböző feladatokkal. A többi kérdésből is célszerű idővel jó néhányat feladni.

**II.** Néhány fontos feladatot nem írtam bele az anyagba, mert azt szeretném, ha ezek szóban hangoznának el, mégpedig a tanár szerint legalkalmasabb pillanatban.

Ismerkedjünk meg velük!

### (a1) Papírlap, 50 kettéhajtás

Egy 0,01 mm vastagságú papírlapot képzeletben 50-szer egymásután kettéhajtunk. Milyen vastag lesz az, amit kapunk?

Tippeljük meg a választ! (A tippet műveleti jelek nélkül, a hétköznapi életben szokásos módon kell megadni.) Ragaszkodjunk hozzá, hogy minden gyerek tippeljen!

**A válasz** meghökkentő: Több mint 10 millió kilométer! Nem is hiszik el a diákok. Hogyan lehet erről meggyőződni?

1 duplázás = 2-szerezés, 2 duplázás = 4-szerezés, 3 duplázás = 8-szorozás... 10 duplázás = 1024-szerezés. Itt álljunk is meg. Tehát 10 duplázás után a papír vastagsága $1024 \times 0{,}01$ mm $\approx 10$ mm. Ebben még nincs semmi ijesztő... De most tippeljük meg gyorsan, hogy mi a helyzet 20 duplázás után! (Várható a téves 20 mm válasz!)

A második 10-es duplázószéria ismét egy 1024-szerezést jelent, ezt 1000-rel helyettesítve 10 000 mm-t, vagyis 10 métert kapunk. És így tovább: 30 duplázás után a vastagság meghaladja a 10 km-t, 40-nél a 10 000 km-t, végül 50 duplázás után a 10 millió kilométernél is vastagabb lenne ez a kis csomag. (Elég hosszú kézre van szükség az utolsó lépésnél.)

Műveleti jelekkel könnyebben felírható a végeredmény: $2^{50} \times 0{,}01$ mm. De ebből nem látszik, hogy ez mekkora érték. Az előző okoskodásunknak a következő átalakítások felelnek meg: $2^{50} = \left(2^{10}\right)^5 = 1024^5 > 1000^5 = 10^{15}$ stb.

Mikor tegyük fel a kérdést? Ha a **4.** feladat előtt, akkor a **4.** feladat túl könnyű lesz (ami nem biztos, hogy baj).

Az első négy feladat gondolatköréhez még sok szép kérdés tartozik. Mielőtt ezekre rátérnék, gyorsan nézzük meg az **1–3.** feladatok megoldását.

**1.** 2 méréssel (3-3-at kell először feltenni).

**2.** 27 súllyal.

**3.** $n$ méréssel legfeljebb $3^n$ súlyból lehet kiválasztani a hibásat. Hagyjuk, hogy a gyerekek felfedezzék a $3^n$ képletet! Nem baj, ha $n = 3, 4, 5$-re is külön végiggondolják a megoldást, és csak ezután kezdenek el képletet keresni.

A feladatsor élvezetesebbé tehető, ha csapatjátékot csinálunk belőle. Ültessük a diákokat 2-4 fős csoportokba. Az **1.** feladathoz mindegyik csoport kap 9 kártyát, ezek jelképezik a súlyokat. A csoport egy tagja eldönti magában, hogy melyik a hibás súly, és egyben vállalja a mérleg szerepét (két keze lesz a mérleg két serpenyője), a többiek feladata természetesen az, hogy kevés méréssel kiderítsék, melyik a hibás súly. A csapatok versenyeznek, hogy az **1.** feladatnál ki tudja a **legkevesebb** méréssel (szerencse nélkül) megtalálni a keresett súlyt, a **2.** feladatnál melyik csapat tudja a **legtöbb** súlyból 3 méréssel biztosan kiválasztani a hibás súlyt (ehhez további kártyákat kell adnunk).

Állításaikat, módszereiket úgy ellenőrizhetjük, hogy mi magunk vesszük át a mérleg szerepét, velünk szemben kell bizonyítaniuk, hogy, mondjuk, 20 súlyból képesek 3 méréssel kiválasztani a hibásat. A tanár dolga ilyenkor az, hogy mindig a kevésbé szerencsés választ adja. Ha például feltesznek a mérlegre 5-5 súlyt, akkor egyenlőséget fogunk mutatni, így a maradék 10 súlyból kell megtalálni a hibásat, míg ha valamelyik serpenyő nehezebb lenne a másiknál, akkor a rajta lévő 5 súly közül kellene kiválasztani a hibásat. (Ezt mindegyik csapattal külön kell eljátszanunk, különben az egyik csapat jó módszerét elleshetné a többi.) Előbb-utóbb azért áruljuk el, miért nincs sohase szerencséjük, amikor ellenünk játszanak… Innentől kezdve (ha eddig maguktól nem jöttek rá erre) már a csapatok is úgy játszhatnak, hogy valójában senki sem gondolja ki, melyik a hibás súly, hanem automatikusan a „rosszabbik” választ adják maguknak.

További könnyítés lehet, ha nem 9, hanem 6 súllyal indítjuk a feladatsort. 6-ból nagyon könnyű 2 méréssel kiválasztani a hibás súlyt. Ez után az a kérdés jön (a csapatjátékban), hogy **2 méréssel** legfeljebb hány súlyból választható ki a hibás. És ennek a megoldásával már el is jutottunk a 9 súlyhoz, innen a folytatás ugyanaz.

### Néhány rokon kérdés:

**(a2)** 60, szemre egyforma súly közül a egyik hibás. A jók tömege 1 kg. Rendelkezésünkre áll egy rendkívül pontos egykarú (azaz a súlyt számokban kifejező) mérleg. Hány méréssel tudod kiválasztani a hibás súlyt?

– Most felezni lehet csak, így 6 mérésre van szükség. Persze itt is tovább kérdezünk: $n$ mérés hány súlyhoz elegendő? – A válasz: $2^n$.

Más lehetőség: ezt is a „kártyás” módszerrel építjük fel. Először, mondjuk, csak 5 súly – azaz 5 kártya – van. Hány mérésre van szükség? 3-ra. 3 mérés legfeljebb hány súlyhoz elég? stb.

**(a3)** Hány ükszülőd volt? (ükszülő: nagyszülők nagyszülei)

Hány ősöd élt 1000 éve, ha egy emberöltőt 25 évnek veszünk?

Ez már beugratás! Ugyanis $2^{40} \approx 10^{12}$ jönne ki! Hol a hiba?

A hiba persze ott van, hogy rokonházasság esetén ugyanazt a személyt többször is számolhatjuk. (Ez mutatja, hogy milyen tömegesen kellett előfordulnia annak, hogy távoli rokonok házasságra léptek egymással.)

**(b1)** Beteszek a bankba 1 Ft-ot évi 5%-os kamatra. Ha $x$ év alatt a pénz 100 Ft-ra növekszik, mennyire növekedne $2x$ év alatt?

Kérjük meg a gyerekeket arra, hogy először tippeljék meg az eredményt. Utána számoljanak vagy keressenek valami szép, egyszerű megoldást.

A jó tipp egyébként 10 000, hiszen a 100 darab 1 forint mindegyikéből újabb 100-100 forint lesz a következő $x$ évben.

Másként: $1{,}05^x = 100$

$$1{,}05^{2x} = 100^2 = 10\,000.$$

A feladat kicsit pontatlan, mert $x$ nem egész szám, és ilyenkor a bank nem az $1{,}05^x$ képlettel dolgozik.

**(b2)** Ha tudjuk, hogy 1 Ft évi 1% kamat mellett $x$ év alatt nő 100 Ft-ra, akkor évi 5% kamat mellett hányszorosára nő $x$ év alatt?

Most is először tippeket kérünk a gyerekektől. Viszonylag jó becslést kapunk fejben, ha arra gondolunk, hogy

| | |
|---|---|
| egyszeri 5%-os emelkedés | 5 év, évi 1%-os emelkedés. |
| $x$ év, évi 5% | $5x$ év, évi 1%. |

És akkor az előző feladat gondolatmenete szerint $x$ évenként a pénz 100-szorozódik, tehát a végeredmény $100^5 = 10^{10}$.

A jó eredmény körülbelül $6{,}4 \cdot 10^9$ (mindenesetre sokkal több a vártnál).

**(b3)** Valaki betesz egy bankba 1 Ft-ot évi 5%-os kamatra. Előre közli, hogy hány év múlva jön érte (ő vagy valamelyik leszármazottja), és kiköti, hogy a pénzt 1000 forintosokban fogja kérni.

Kívánsága nagy riadalmat kelt a bankban. A bank matematikusa kiszámítja, hogy a kérésnek a legnagyobb jóakarattal sem lehet eleget tenni.

Miért nem? (És hány év után biztos, hogy nem lehet a pénzt kifizetni? Mondjunk ilyen évszámot!)

Számításainkban összesen a következő két feltevést használhatjuk fel (**és mást nem!**):

(1) Egy 1000 Ft-os térfogata legalább 1 $mm^3$.

(2) A természetben létező legnagyobb sebesség a fénysebesség.

**Megoldás:**

$n$ év múlva a bank tartozása $1{,}05^n$ Ft lesz. És mennyit tud fizetni? **Az összes pénznek benne kell lennie a Föld körüli n fényév sugarú gömbben** (hiszen $n$ év alatt semmi sem távolodhat el tőlünk $n$ fényévnél messzebbre). Töltsük ki teljesen ezt a hatalmas gömböt 1000 forintosokkal, mégpedig olyan sűrűn, hogy minden $mm^3$-re jusson egy 1000 forintos. És ez a rengeteg pénz se lesz elég!

Az 1 fényév sugarú gömbbe a fenti értelemben $3{,}54 \cdot 10^{60}$ Ft fér bele. Ezt tudva már nem nehéz kitölteni a következő táblázatot:

| évek száma | kifizethető | kifizetendő |
|---:|---|---|
| 1 | $3{,}54 \cdot 10^{60}$ Ft | $1{,}05$ Ft |
| 10 | $3{,}54 \cdot 10^{63}$ | $1{,}05^{10} \approx 1{,}63$ |
| 100 | $3{,}54 \cdot 10^{66}$ | $1{,}05^{100} \approx 131{,}5$ |
| 500 | $4{,}43 \cdot 10^{68}$ | $1{,}05^{500} \approx 3{,}93 \cdot 10^{10}$ |
| 1000 | $3{,}54 \cdot 10^{69}$ | $1{,}05^{1000} \approx 1{,}55 \cdot 10^{21}$ |
| 2000 | $2{,}83 \cdot 10^{70}$ | $1{,}05^{2000} \approx 2{,}39 \cdot 10^{42}$ |
| 4000 | $2{,}27 \cdot 10^{71}$ | $1{,}05^{4000} \approx 5{,}71 \cdot 10^{84}$ |

$3{,}54 \cdot 10^{60} \cdot n^3$ fut versenyt $1{,}05^n$-nel – és hosszú távon alul marad.

(A táblázat kitöltése során több kérdést is célszerű a diákokkal megbeszélni. Hogyan nőnek a számok a két oszlopban, ha $n$-et megduplázom? Ha 10-zel szorzom?)

Akinek kedve van hozzá, azt is megkérdezheti, hogy hogyan változik a helyzet, ha

– 100 Ft-ot teszünk be (az 1 Ft helyett);

– 1 Ft-ot teszünk be, de évi 1%-os kamatra.

Körülbelül hány év múlva hagyja le így a kifizetendő összeg a kifizethetőt?

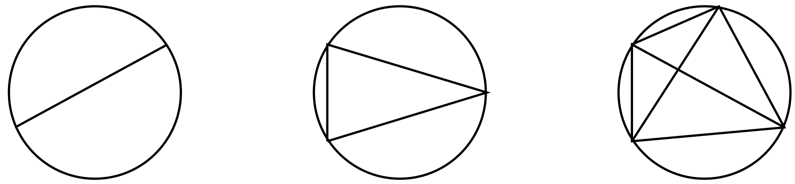
A **(b1)**, **(b2)**, **(b3)** kérdések feltevésére több jó alkalom is kínálkozik, az anyagban bőségesen van kamatos kamatszámítás.

**(b1)**-et és **(b2)**-t viszonylag korán célszerű feladni, **(b3)** szerepelhet a vége felé.

**(c)** Vegyünk fel a kör kerületén 2, 3, 4, ... pontot. Kössük össze mindegyiket mindegyikkel. Hány részre vágtuk fel ilyen módon a kört, ha ábránkon három húr nem mehet át ugyanazon a (kör belsejében fekvő) ponton?

Ebből is lehet játékot csinálni. A játék neve (mondjuk): **jóslás**

Mindenkinek meg kell jósolnia – fejben elképzelve az ábrát, rajzolni tilos – hogy mennyi lesz a részek száma 2 pontnál (nyilvánvaló), 3-nál (ez sem jelenthet problémát), 4 pontnál (ezt már el lehet hibázni). Egyszerre csak egy kérdésre tippelünk, aztán felrajzoljuk az ábrát, és ellenőrizzük a jóslatokat, majd ez után jöhet a következő ”jóslás”.



2 4 8

5 pontnál kezdődnek a gondok. Az ábrát fejben lehetetlen átlátni! Mit tehetünk akkor? Megnézhetjük a sorozat eddigi tagjait: 2, 4, 8. Mi lesz vajon a folytatás? A gyerekek már kiabálják is: 16!

– Biztos? – Biztos! – Mindenki **egészen** biztos benne?

Néhányan nem biztosak, és most jöhet az ábra megrajzolása és a számolás.

A részek száma 16, az ifjak legnagyobb örömére.

– No és 6 pont esetén? Biztos a 32? – Ebben már lehet, hogy senki se kételkedik (fogadásokat is ajánlhatunk). Pedig az eredmény 31! (Ha valaki elfelejti, hogy 3 húr nem mehet át ugyanazon a belső ponton, akkor csak 30 részt kap.)

2, 4, 8, 16, 31, . . .

Hogyan folytatódik vajon? Mi lehet a szabály?

Kitűzhetünk valami jutalmat az egyszerű szabály bizonyítás nélküli felfedezéséért!

Ez a szabály (1-gyel kezdem a sorozatot, mert 1 pont esetén 1 rész van):

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 2 | | 4 | | 8 | | 16 | | 31 | | 57 | | 99 |
| | 1 | | 2 | | 4 | | 8 | | 15 | | 26 | | 42 | |
| | | 1 | | 2 | | 4 | | 7 | | 11 | | 16 | | |
| | | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | | |

A harmadik különbségi sorozat: 1, 2, 3, . . .

Három témához is kapcsolható ez a feladat. Az elejéhez (mérleg-súlyok, duplázás, hajtogatás); a sorozat fogalmát előkészítő szakaszhoz (hiszen ez egy példa egy szokatlan sorozatra); továbbá a teljes indukciós részhez (hogy nem felesleges a sejtéseknek utána járni). És még egy lehetőség: a **43.** feladat előtt vagy után tárgyalni ezt a kérdést.

Mesélhetünk ennek kapcsán az $x^2 + x + 41$ képletről, amely $x = 0, 1, 2, \dots$ 39-re prímet ad, valamint Fermat formulájáról $(2^{2^n} + 1)$, amelyről ő azt hitte, hogy mindig prím az értéke. Ez utóbbi előkészítése lehet egy másik mesének, amely szabályos sokszögek szerkeszthetőségéről szólna (Gauss tételéről).

**(d)** Egy falu bírója összehívja a férfilakosságot, és közli velük, hogy tudomást szerzett arról, hogy van olyan asszony a faluban, aki megcsalja az urát. Ez tűrhetetlen állapot, és az a férj, aki ráébred felesége csalfaságára, köteles a rájövést közvetlenül követő éjfélkor a hűtlen asszonyt házától elkergetni. Azt is elmondja, hogy minden férfi tudja minden nőről, hogy hűséges-e az urához, kivéve a saját feleségéről, mert őróla meg egyetlen férj sem tudja az igazat.

A bírói szónoklat véget ért, az emberek hazamentek és bezárkóztak otthonukba. Senki nem érintkezhetett senkivel sem, a világról annyi hír érkezett, ami egy helyi rádió napi egy órás műsorába belefért. Ebből azt mindenesetre meg lehetett tudni, hogy az előző éjfélkor történt-e valami említésre méltó dolog a faluban.

Eltelt 100 nap, és a századik éjszakán pontban éjfélkor nagy lárma zavarja meg a falu nyugalmát: 100 hűtlen asszonyt dobnak ki az utcára.

Hogyan jött rá a 100 megcsalt férj feleségének csalfaságára? És miért tartott ez nekik ilyen soká?

**Megoldás:**

(1) Ha 1 hűtlen nő van a faluban, a férje az első éjjel elkergeti. (Van hűtlen nő, de én egyet sem ismerek, tehát az én feleségem lehet csak az! – mondja magában, mielőtt cselekedne.)

(2) Ha 2 hűtlen asszony van a faluban, a férjek a második napon jönnek rá a helyzetre. (Egy hűtlen nőt ismerek, így két lehetőség van összesen. Nincs több hűtlen nő, vagy van még egy, éspedig a feleségem az! Az előbbi eshetőséget kizárja az, hogy az első éjszakán nem kergette el az illetőt a férje, így két csalfa nőnek kell lennie. Ezek egyike a feleségem!)

stb.

(3) Ha $n$ hűtlen asszony van a faluban, az $n$-edik éjszakán kerülnek az utcára. Esetünkben (100 a csalfa nők száma) a 99-edik éjszakáig mindenki egészen nyugodtan aludt, akkor kezdte hegyezni a fülét a 100 megcsalt férj, mert ezen az éjszakán dőlt el, hogy 99 hűtlen asszony van-e összesen (ekkor a feleségük ártatlan) vagy pedig 100 (ekkor a feleségük hűtlen).

A feladat nyilvánvalóan a teljes indukció témájához tartozik. Nyitópéldának nem ajánlom, de nem sokkal a kezdet után már feladhatjuk (lehet például a második teljes indukciós feladat).

A feladat matematikai korrektsége vitatható, de ennek ellenére nagyon jól beleillik a teljes indukció felépítésébe.

**III.** Az anyag felépítését aránytalanná teszi, hogy egy hosszú előkészítő szakasz után (amelyben sok a viszonylag érdekesebb kérdés) egy hosszú, számolós, rutin jellegű rész következik. Ezen úgy segíthetünk, hogy a **63–124.** feladatok egy részét már előbb feladjuk, továbbá az **1–62.** feladatok közül néhányat későbbre halasztunk.

Még egy megjegyzés: sok a kényelmetlen számolást igénylő feladat. Ezek egy részénél számológéppel dolgozzunk!

**IV.** Most haladjunk végig az anyagon sorjában!

**4.** A részek száma $2^n$, így a vonalaké $2^n - 1$.

**5–15.** Ebben a részben gyakran kell egy-egy számtani sorozat $n$-edik tagját meghatározni. Mondjuk a 2, 5, 8, 11,... sorozat $n$-edik tagját keressük. Egyik lehetőség: 2-től indulunk, $(n-1)$-et lépünk, minden lépés 3 hozzáadását jelenti, így az eredmény $2+3(n-1)$ (vö. **17.**). A másik lehetőség: A $3n+c$ sorozat mindig 3-mal nő; ha tehát $c$-t úgy választom meg, hogy $n=1$-re kijöjjön a jó eredmény ($3\cdot 1+c=2$, innen $c=-1$), akkor végig jónak kell lennie, hiszen jól kezdődik, és mindig ugyanannyival nő, mint a megadott sorozat.

Mind a két gondolatmenetet jó látni.

Amikor például a $(2n+3)$-adik tagot keressük, akkor ne ismételjék meg a gondolatmenetet, hanem helyettesítsék be $n$ helyébe a $(2n+3)$-at.

**13.** $\underbrace{0,\quad 1},\quad \underbrace{2,\quad 3},\quad \underbrace{4,\quad 5},\ \ldots\quad \underbrace{126,\quad 127},\ \ldots\quad \underbrace{1234,\quad 1235},\ \ldots\quad \underbrace{2n,\quad 2n+1}$

A megjelölt párok közül mindig pontosan egy tartozik a sorozathoz. Így az $n$-edik tag a $(2n-2)$, $(2n-1)$ számok közül a megfelelő lesz. A 2000-edik tag: 3998.

**14.** A félhavi 50 dollár az előnyösebb. Készítsünk táblázatot a havi, illetve félhavi fizetésekről:

| hónap | havi 150 dolláros emelés | félhavi 50 dolláros emelés |
|---|---|---|
| 1 | 2000 | $\left.\begin{array}{c}1000\\ \hline 1050\end{array}\right\}$ 2050 |
| 2 | 2150 | $\left.\begin{array}{c}1100\\ \hline 1150\end{array}\right\}$ 2250 |
| 3 | 2300 | $\left.\begin{array}{c}1200\\ \hline 1250\end{array}\right\}$ 2450 |

stb.

**16.** A 17. feladat előkészítése. Arra kell rájönni, hogy milyen paraméterek határozzák meg a számtani sorozatot.

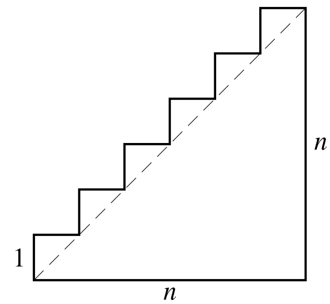
**23.** Még korai lenne $a_n$-et erőltetni.

**24.** Feladhatjuk versenykérdésnek is.

$a_1=2^1 \qquad a_2=2^2 \qquad a_3=2^4\ \ldots \qquad a_n=2^{2^{n-1}}$

(Esetleg csak $a_8$-at kérdezzük $a_{100}$ helyett.)

**27–28.** A legszebb megoldás szerintem:




az alakzat területe = a nagy derékszögű háromszög területe + az $n$ darab kis háromszög területének összege = $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$.

Mindenképp szerepeljen a következő megoldás is:

$$\begin{array}{lrl}
\phantom{+}\ 1 + 2 + 3 + \ldots & + (n-1) + n & = x \\
+\ n + (n-1) + (n-2) + \ldots & + 2 + 1 & = x \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{\underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots \qquad + (n+1)}_{n \text{ darab}}} & = x
\end{array}$$

$$n(n+1) = 2x$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = x$$

További lehetőségek is vannak, például egy vágással téglalappá darabolható az alakzat.

**29–30.** Ismét az a kérdés, értik-e, hogy mit jelent egy képlet, és hogyan lehet felhasználni.

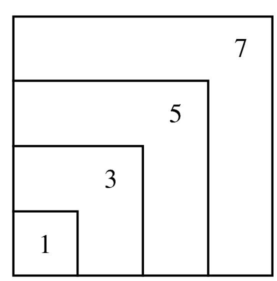
**37–38.** Először próbálgatással sejtsék meg a végeredményt.

Utána:

I.

$$\begin{array}{llll}
 & 1 + 3 + \ldots & + (2n-1) & = x \\
+ & (2n-1) + \ldots & + 1 & = x \\
\hline
 & 2n + \ldots & + 2n & = 2x
\end{array}$$

II.



**41.** Hiába emeljük az évi 100 tonnát akár például évi 1000-re, hiába csökkentjük a 10%-ot például 1%-ra, az eredmény mindig ugyanaz. (Vö. a 7. oldalon leírt feladattal: a kamatozó forint és a fénysebesség.)

Számológéppel könnyen képet alkothatnak a gyerekek a kérdésről, csak sok évet kell figyelembe venni.

**43.** Először készítsünk táblázatot:

| n | részek száma |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 7 |
| 4 | 11 |

Azt is játszhatjuk, hogy fejben kell elképzelni az ábrát és megmondani a részek számát (3, 4 egyenesnél ez már elég nehéz). Utána meg mindig **tippeljenek előre** a következő számra. (Hasonló módon célszerű feldolgozni a kör részeit számláló feladatot is, lásd a 8. oldalon a **(c)** feladatot.)

Hamar észreveszik a szabályt. Jelöljük $a_n$-nel a részek maximális számát $n$ egyenes mellett, és fogalmaztassuk meg a szabályt algebrai alakban:

$$a_n = a_{n-1} + n$$

Adjunk meg képletet $a_n$-re!

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & & 4 & & 7 & & \dots & & a_n \\ & +2 & & +3 & & +4 & \dots & +n & \end{array}$$

Tehát

$$a_n = 2 + 2 + 3 + 4 + \dots\ + n = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + \dots\ + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

(Az $a_n = a_{n-1} + n$ szabály igazolásáról azért ne felejtkezzünk meg!)

**44.** Az előző összegzési eljárást lehet gyakorolni.

Ide tartozik még **152. a)** is. (Szándékosan van jó messze innen.)

**45.** Segítő kérdés: nézzük meg az összes pontra sorban, hogy hányféleképpen lehet oda eljutni.

A válasz: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.

Az $n$-edik számot $f_n$-nel jelölve, fogalmazzuk meg a sorozat képzési szabályát algebrai alakban:

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$$

**46.** Az újfajta rekurzív képzési szabály gyakorlása a cél. A sorozat periodikus!

**47.** Vegyük észre $a_n = 2^{f_{n-1}}$-et is! (Lásd **45.**)

**48.** Sok minden előjöhet a megoldás keresése közben.

**a)** $\ldots\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$ sorozat-e?
Miért nem az? (Ez megállapodás kérdése, persze.)

**b)** $0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3, \ldots$
Kérdés: sorozat-e ez? Kell-e képlet egy sorozat megadásához?

Válaszok:

(1) Bármiféle dolgok bárhogyan egymás után rakva sorozatot alkotnak, nincs szükség semmiféle szabályosságra sem.

(2) De képlet is megadható most:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{ha } n \text{ páros} \\ \left(-\dfrac{n-1}{2}\right), & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

Szabad képletet esetszétválasztással adni! De vajon lehetne-e anélkül is (ebben az esetben)? Ez már fogas kérdés. Lehet:

$$a_n = \frac{1+(-1)^n(2n-1)}{4}$$

Hogyan lehet rájönni egy ilyen képletre?

Ebből induljunk ki:

$$\frac{1+(-1)^n}{2} = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

$$\frac{1-(-1)^n}{2} = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 1, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

Innen $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2} \cdot \dfrac{n}{2} + \dfrac{1-(-1)^n}{2} \cdot \left(-\dfrac{n-1}{2}\right)$

stb.

**60.** Jó példa arra, hogy az ember valamit rekurzív módon talál meg: elkezdi valahogy, és aztán egyértelmű a folytatás (vö. **163.**, **164.**). Az 1, 2, 3 számokat ugyanis tetszés szerint bevesszük vagy nem vesszük be a halmazba – ez 8 lehetőség. Innentől viszont már minden meg van határozva. $4 \in H \Leftrightarrow 1 \notin H$ (vagyis ha $1 \in H$, akkor $4 \notin H$; ha pedig $1 \notin H$, akkor $4 \in H$), $5 \in H \Leftrightarrow 2 \notin H$ stb.

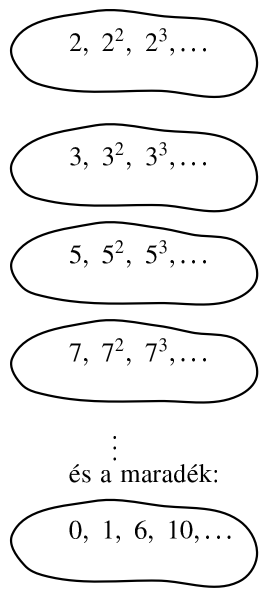
**61.** Most viszont végtelen sok lehetőség van. Minden páratlan számnál szabadon dönthetek, bevegyem-e a halmazba, vagy sem; a többi szám sorsát viszont ez már egyértelműen eldönti.

**62.** **a)**, **b)**, **c)** nem okoz gondot.

**d)** A feladat nehéz, és sok szép megoldása van.

Várjunk sokáig az ötletekre!

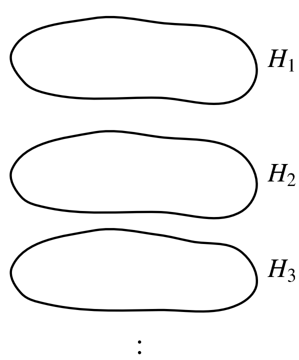
Lehetséges megoldás például:




Vagy csoportosítsuk a számokat a prímtényezőik száma szerint (az 1-et és a 0-t bedobjuk valamelyik halmazba).

A következő két megoldás lehetőleg hangozzék el.

I. Rajzoljunk egy csomó karikát:

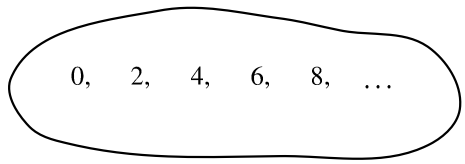



Ez jelképezi a keresett végtelen sok halmazt.

Ne döntsünk egyszerre minden kérdésben, hanem **egyesével adjuk meg a halmazokat!** (Ismét a rekurzív megoldási módszerrel találkozunk.)

$H_1$-be mit tegyünk? A gyerekek javaslata sokféle lehet. Valószínűleg „spórolni” akarnak a számokkal, és ezért nem mondják a legkézenfekvőbbet: a páros (vagy a páratlan) számokat.

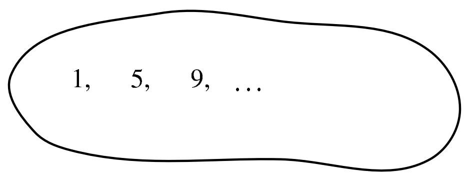
Legyen mondjuk




$H_1$

Maradék: 1, 3, 5, 7,. . .

És $H_2$-be mi kerüljön? És most lepottyan a tantusz: teljesen mindegy, csak arra kell ügyelni, hogy végtelen sok menjen $H_2$-be, és végtelen sok meg is maradjon. Jut is, marad is, futja a végtelenből. Például így:

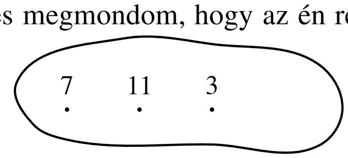



$H_2$

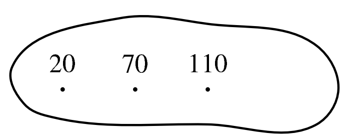
Maradék: 3, 7, 11,. . . stb.

Talán ez a megoldás mutat rá a legvilágosabban a dolog természetére.

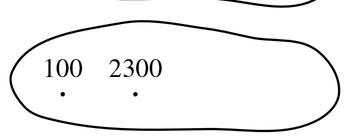
II. Most pedig játszani fogunk. Gondoltam egy felosztásra, tessék kitalálni! Akárki mondhat egy számot, és megmondom, hogy az én rendszeremben hol található.




$H_1$




$H_2$




$H_3$

Nem nehéz kitalálni a szép szabályt:
attól függően kerülnek a számok a $H_1$, $H_2$, $H_3, \ldots$ halmazokba, hogy hány 0-ra végződnek. (De a 0-k száma is lehetne az osztályozás szempontja – ez is egy szép megoldás!)

Néhány további megoldás: csoportosítsuk a számokat a számjegyek összege szerint, a 2 kitevője szerint (a prímfelbontásban), az osztók száma szerint. Néhány szám külön elbírálást igényel! (A 0-ra és az 1-re kell odafigyelni.)

**64.** I.
$$\begin{array}{rl} a_1 + a_2 + \ldots + a_n &= x \\ + a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 &= x \end{array}$$
stb.

Végeredmény: $x = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

II. $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + \ldots + a_1 + (n-1)d = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2} \cdot d$

Mind a két alak jól használható.

**65. c), d), f)** Fontos előkészületek későbbi feladatokhoz. Lehet elkezdeni a „szimmetrikus felírást”.

**68, 69, 76–79.** A szimmetrikus felírás előnyeit bemutató feladatok.

**80–82.** Összetartozó feladatok. Ha $S_{2n} = 4S_n$ egyetlen $n$-re teljesül, akkor minden $n$-re is fennáll. Ilyenkor
$$d = 2a_1, \quad S_n = n^2 a_1.$$

**84.** Például 0, 1, $\sqrt{2}$

Vö. **162.**, F/3507

**85.** Vö. F/3529, 3590

**86. a)** 0, 2, 4, 6, ...
1, 3, 5, 7, ...

**b)** 0, 1, 2, 3, ...
$0, \ \sqrt{2}, \ 2 \cdot \sqrt{2}, \ 3 \cdot \sqrt{2}, \ldots$
Vö. F/3527

**106–108.** Leosztás.

**111.** Célszerű a számtani sorozatot választani ismeretlennek, vagyis az előző feladatra visszavezetni a megoldást.

**112.** Most már viszont a mértani sorozat tagjaiból érdemes kiindulni:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$, | $aq$, | $aq^2$ | |
| $a$, | $aq$, | $aq^2 - 3$ | számtani |
| $a - 1$, | $aq$, | $aq^2 - 3$ | mértani |

stb.

**113.** $a,\quad aq,\quad aq^2,\quad aq^3$
$a+1,\quad aq+6,\quad aq^2+2\quad aq^3+16$ számtani

**114.** Az előző feladat felírási módja célszerű itt is!

**119.** **b)** Vö. F/3591, 3592

**120.** Vö. F/3583, 3597
Nem ártana ezeket a feladatokat az órán együtt áttekinteni!

**121.** Nemcsak konstans lehet!

**122.** Vö. F/3589

**124.** Ellenőrizzük először, hogy értik-e magát az állítást.
Írják fel, hogy $n = 1, 2, 3$-ra mit mond az egyenlőség.
Ezután adjunk elég időt a gondolkodásra.
Kis lépésekkel segítsünk a gyerekeknek.

**a)** Mondjuk el (ha szükség van rá), hogy 1500-ról akarunk 1501-re következtetni.

**b)** Ha kell, írjuk is fel:

Ezt tudom:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 1500 \cdot 1501 = \frac{1500 \cdot 1501 \cdot 1502}{3}$$

Ezt szeretném belátni:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 1500 \cdot 1501 + 1501 \cdot 1502 = \frac{1501 \cdot 1502 \cdot 1503}{3}$$

**c)** Ha ez se elég, kérjük meg őket, nézzék meg, melyik oldal mennyivel lett nagyobb.

**d)** Ha már 1500-ról sikerült 1501-re következtetni, akkor elkezdhetünk azon gondolkozni, hogy nem lehetne-e ezt valahogy folytatni 1501-ről 1502-re, majd általában $n$-ről $(n+1)$-re.

Egy alkalmas ponton hagyjuk abba az órai gondolkozást, és legyen házi feladat annak a végiggondolása, hogy mi történt itt tulajdonképpen.

**127.** Itt az eredményt először – próbálgatás alapján – meg kell sejteni.
Az összeg $\frac{n}{n+1}$.

**128.** Itt is sejtsük meg az eredményt. Először azt vegyük észre, hogy az összeg mindig négyzetszám, majd azt kutassuk ki, hogy miféle számok négyzetét kaptuk meg.

| $n$ | $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $= 1^2$ |
| 2 | 9 | $= 3^2$ |
| 3 | 36 | $= 6^2$ |
| 4 | 100 | $= 10^2$ |

Ezt kapjuk sejtésként:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

És most jöhet a teljes indukció.

**133.** **a)** $f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$

**b)** $f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$

**135.** Ha $n$ egyenesre igaz az állítás, akkor $(n+1)$-re is igaz. Vegyünk fel ugyanis $(n+1)$ egyenest, $e_1, e_2, \ldots e_{n+1}$-et, és nézzük az $e_1, e_2, \ldots e_n$ megrajzolásával létrejövő térképet. Az indukciós feltevés szerint ez 2 színnel kiszínezhető. Most húzzuk meg $e_{n+1}$-et is! Az új egyenes egyik oldalán hagyjuk meg az eddigi színeket, a másik oldalon viszont mindegyik színt változtassuk meg. Ezzel sikerült 2 színnel jól kiszínezni az ábrát. (Ez persze még indoklásra szorul!)

A feladat kapcsán meséljünk a négyszín probléma történetéről! Vö. **152.**

**137–138.** Itt is meg kell sejteni az eredményt.

**139.** Az indukciós lépés: $n \to (n+1)$.

$(n+1)$ résztvevő van, $n$-re igaz az állítás.

Emeljük ki az egyik játékost. A maradék $n$ sorba rakható:

$J_1 \to J_2 \to J_3 \to \ldots J_{n-1} \to J_n$ (A nyíl a győztesre mutat.)

Ha az $(n+1)$-edik játékos – jelöljük $J$-vel – megverte $J_n$-et, akkor nincs gond:

$J_1 \to J_2 \to J_3 \to \ldots J_n \to J$.

Ha kikapott $J_n$-től, de megverte $J_{n-1}$-et, akkor is készen vagyunk:

$J_1 \to J_2 \to J_3 \to \ldots J_{n-1} \to J \to J_n$.

Ha $J_{n-1}$-től is kikapott, de $J_{n-2}$-t megverte, akkor $J_{n-2}$ és $J_{n-1}$ közé lehet állítani. Ezt a gondolatot folytatva azt kapjuk, hogy csak akkor van baj, ha $J$ mindenkitől kikapott.

De ebben az esetben is megvan a megoldás:

$J \to J_1 \to J_2 \to J_3 \to \ldots \to J_n$.

**153.** $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$, tehát ha $\alpha$ és $\beta$ tangense racionális, akkor $(\alpha+\beta)$ tangense is racionális.

Ha most $\operatorname{tg} 1^\circ$ racionális lenne, akkor eszerint $2^\circ$, $3^\circ$, $4^\circ, \ldots$ $30^\circ$ tangense is racionális lenne, de $\operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ irracionális.

Várható a gyerekek részéről a következő ellenvetés: mi van, ha $30^\circ$ helyett $45^\circ$-nál állunk meg?

$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, és nincs ellentmondás!

**155.** $2^{20} + 2^{19} \cdot 3 + 2^{18} \cdot 3^2 + \ldots + 3^{20} = ?$

Mértani sorozat összegéről van szó.

**156.** $\left(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{100}\right) \cdot \left(1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{100}\right)$

**157.** Vö. **160.**

**158.** $A$ és $B$ lesz a két halmaz.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 1, | | 4, 5 6, | | 11, 12, 13, 14, 15 |
| $B$ | | 2, 3, | | 7, 8, 9, 10, | |

**159.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | 1!-tól 2!-ig | | 3!-tól 4!-ig | |
| B | | 2!-tól 3!-ig | | 4!-tól 5!-ig |

**161.** $\ldots 1 \ldots 2 \ldots 3$ Lehet-e?

$\ldots 1, q, q^2, q^3, \ldots 2, \ldots 3$

$q^n = 2 \qquad q^k = 3$

$q = \sqrt[n]{2} \qquad \left(\sqrt[n]{2}\right)^k = 3$

$2^k = 3^n$, $k \neq 0$, $n \neq 0$.

A bal oldal páros, a jobb oldal páratlan.

**162.** $\left(\sqrt{2} - 1\right)$-nek is, $\left(\sqrt{3} - 1\right)$-nek is $d$ egész számszorosának kell lennie.

$\sqrt{2} - 1 = nd \qquad \sqrt{3} - 1 = kd$

$\dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \dfrac{k}{n} \quad (k \neq n)$

$n\sqrt{2} - n = k\sqrt{3} - k$

$n\sqrt{2} + k - n = k\sqrt{3}$

$2n^2 + (k - n)^2 + 2n(k - n)\sqrt{2} = 3k^2$

$2n(k-n) \neq 0$, ezért ebből $\sqrt{2}$ kifejezhető lenne, vagyis megkapnánk két egész szám hányadosaként, ami lehetetlen.

**163. a)** $n = 1$

$$a_1 + a_2 = 6$$
$$2a_1 + d = 6$$
$$n = 2$$
$$a_2 + a_3 = 12$$
$$2a_1 + 3d = 12$$

Innen $a_1 = 1{,}5, \qquad d = 3.$

Ellenőrizzük, hogy a kapott számtani sorozat minden $n$-re eleget tesz a feltételeknek:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 3n - 1{,}5$$
$$a_n + a_{n+1} = 3n - 1{,}5 + 3n + 1{,}5 = 6n$$

**b)** A feltételt $a_{n+1} = 6n - a_n$ alakba írva látjuk, hogy rekurzív képzési szabályról van szó.

$a_1$ értéke tetszőleges lehet, de a többi tag értéke ebből már rendre meghatározható.

Lehet-e egységesen megadni az összes megoldást? Igen, az **a)** pont segítségével. Ha $a_1$ értékét az ottani 1,5-hez képest valami $c$ számmal megemeljük: $a_1 = 1{,}5 + c$ (c persze negatív is lehet), akkor $a_2 = 4{,}5 - c$, hiszen az összegüknek ugyanannyinak kell maradnia!

És így tovább:

$$a_3 = 7{,}5 + c$$
$$a_4 = 10{,}5 - c$$

Egyszer $c$-vel kevesebb, utána pedig több.

Összefoglalva:

$$a_n = \begin{cases} 3n - 1{,}5 + c, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ 3n - 1{,}5 - c, & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

Vagy:

$$a_n = 3n - 1{,}5 - c(-1)^n$$

**164.** Hogyan nézhet ki egy olyan sorozat, amelyben bármely három szomszédos tag összege 0?

Kezdjük el akárhogy:

4, 6,

A harmadik tagnál már vége a nagy szabadságnak, az csak $-10$ lehet:

4, 6, $-10$

És a negyedik tag? Az csak 4, és így tovább:

$4,\ 6,\ -10,\ 4,\ 6,\ -10,\ldots$

Könnyű végiggondolni, hogy ez általában így van, az első 3 tag ismétlődik periodikusan:

$a, b, c, a, b, c, a, b, c, \ldots$, ahol persze $a + b + c = 0$-nak is teljesülnie kell.

Esetünkben

$a_{10} = a = 2,$

$a_{200} = b = 3,$

mert 10 1-et, 200 2-t ad maradékul a 3-mal való osztásnál.

Végül $a_{3333} = c$, hiszen 3333 osztható 3-mal, így $a_{3333} = -5$.