Rábai Imre

MILYENEK (NE) LEGYENEK A MATEMATIKA PÉLDATÁRAK?

Az elmúlt évtizedek folyamán igen sok matematika példatár jelent meg, magam is sokat állítottam össze.

1. A tankönyveket példái, feladatai alapján „TANÍTÓ PÉLDATÁRNAK" nevezhetjük. Más példatárak között is találhatók ilyenek (FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK példatáram).
2. Közvetlen tanításhoz, tanuláshoz kapcsolódó „ELLENŐRZŐ PÉLDATÁRAK". (Geometriai feladatok gyűjteménye I–II., Matematikai feladatgyűjtemény I–II., Elemi matematikai példatár I–IV.)
3. „SZAK-PÉLDATÁRAK". (Szakköri füzetek.)
4. „CÉL-PÉLDATÁRAK". (Egyetemi felvételire, érettségire előkészítő példatárak.)
5. „GYŰJTEMÉNYES PÉLDATÁRAK". (Érdekes matematikai gyakorló feladatok (KÖMAL).)

Néhány kérdéskör:

1. Kinek készülnek, készüljenek a példatárak?
2. Milyenek legyenek a TANÍTÓ PÉLDATÁRAK?
3. Mit tartalmazzanak a példatárak a megoldás részben? a) Csak az eredményeket? b) A megoldás vázlatát? c) Többféle megoldást, ha van? d) Részletes megoldást, módszertani kiegészítéseket?
4. A példatárak tartalmazzanak egymásra épülő feladatokat!

Néhány részlet:

a) Van-e megoldás, hány megoldás van?

b) Új elméleti anyagot előkészítő egyszerű feladatok.

c) A KÖMAL Mérőlapok felvételire feladatai.

d) A példatárakban található sajtóhibák, hiányok (és esetleg hibás megoldások) javításának szükségessége.

e) A példatárak tartalmazzanak egyszerű tételeket és rögtön utána az alkalmazási lehetőséget.

f) Legyenek módszereket sugalló tanpéldák, tanító feladatok, feladatsorozatok.

g) A függvénytáblázat problémái.

h) Legyenek-e a példatárban egymás után következő, hasonló feladatok? (A tanításhoz mintapélda, házi feladathoz, ellenőrzéshez, feleltetéshez, dolgozathoz és ismétléshez.)

i) Mit tartalmazzanak a tankönyvhöz kapcsolódó példatárak, és hogyan?
   a) Törzsanyag.
   b) Kiegészítő, szorgalmi anyag.
   c) Szakköri feladatok.

A felmerült kérdéseket az előadáson példákkal illusztrálom.

EGY (talán soha el nem készülő) TANPÉLDATÁR FELADATAIBÓL

1. Az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet diszkriminánsa D, $(D = p^2 - 4q)$. Számítsa ki p és q értékét, ha
   a) $x_1 = 3$, $x_2 = 2D$; b) $x_1 = 1$, $x_2 = 2D$; c) $x_1 = 2$, $x_2 = 3D$; d) $x_1 = -3$, $x_2 = -4D$.

2. Oldja meg a következő egyenletrendszereket!
   a) $x^2 - y^2 = 2(x - y)$, $x^2 + y^2 = 5(x - y)$; b) $x^2 - y^2 = 2(x + y)$, $x^2 + y^2 = 5(x + y)$;
   c) $4x^2 - y^2 = 4x + 2y$, $4x^2 + y^2 = 5(2x - y)$; d) $4x^2 - y^2 = 4x - 2y$, $4x^2 + y^2 = 5(2x + y)$.

3. Oldja meg a következő egyenleteket!

3.1 a) $x(x+3) + \sqrt{x(x+3)} = 6$,

b) $x(x+3) + \sqrt{x}\sqrt{x+3} = 6$,

c) $x(x+3) - \sqrt{x(x+3)} = 2$,

d) $x(x+3) - \sqrt{x}\sqrt{x+3} = 2$,

3.2 a) $x + 3 + \sqrt{\dfrac{x+3}{x}} = \dfrac{6}{x}$,

b) $x\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = \dfrac{6}{\sqrt{x+3}}$,

c) $x + 3 - \sqrt{\dfrac{x+3}{x}} = \dfrac{2}{x}$,

d) $\sqrt{x}(x+3) - \sqrt{x+3} = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

4. Egy háromszög a, b és c oldalai között fennáll a következő egyenlőség. Mekkora a b oldallal szemközti (β) szög?
   a) $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b-c} = \dfrac{3}{a+b-c}$; b) $\dfrac{1}{b-a} + \dfrac{1}{b-c} = \dfrac{3}{b+c-a}$;
   c) $\dfrac{a^3 - b^3 - c^3}{a-b-c} = b^2$; d) $\dfrac{a^3 + b^3 - c^3}{a+b-c} = b^2$.

5. Egy háromszög a, b és c oldalaival a háromszög T területe kifejezhető. Számítsa ki a c oldallal szemközti (γ) szöget, ha
   a) $T = \dfrac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2)$; b) $T = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 - c^2)$;
   c) $T = \dfrac{1}{4\sqrt{3}}(c^2 - a^2 - b^2)$; d) $T = \dfrac{1}{4}(c^2 - a^2 - b^2)$.

6. Állapítsa meg, hogy az m valós paraméter mely értékei esetén lesznek a
   a) $2x^2 + 2(m+2)x + m^2 + 4m - 3 = 0$; b) $2x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$;
   c) $2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m = 0$; d) $2x^2 + (2 - 2m)x + m^2 - 4m + 1 = 0$
   egyenlet gyökei valósak, és állapítsa meg ezekre az m értékekre
   a) $f(x_1; x_2) = x_1 + x_2 + 3x_1x_2$; b) $f(x_1; x_2) = 2(x_1 + x_2 + x_1x_2 + 1)$;
   c) $f(x_1; x_2) = x_1 + x_2 + 4x_1x_2$; d) $f(x_1; x_2) = x_1x_2$
   kifejezés legnagyobb és legkisebb értékét, ahol x_1 és x_2 az egyenlet gyökeit jelentik!

7. Vegyük az első n pozitív
   a) 3-mal osztható, b) 3-mal osztva 1 maradékot adó, c) 3-mal osztva 2 maradékot adó,
   d) 5-tel osztva 1 maradékot adó
   szám összegét, és osszuk el az első n pozitív
   a) páratlan, b) 4-gyel osztva 3 maradékot adó, c) 4-gyel osztva 1 maradékot adó,
   d) 5-tel osztva 4 maradékot adó
   pozitív egész szám összegével. Mekkora n, ha a maradék 0, a hányados a) $\dfrac{9}{5}$; b) $\dfrac{5}{7}$; c) $\dfrac{8}{9}$; d) $\dfrac{9}{16}$?

MILYENEK IS LEGYENEK A PÉLDATÁRAK?
(ILYENEK LEGYENEK A PÉLDATÁRAK!)
(ILYENEK IS LEGYENEK A PÉLDATÁRAK?)
(MILYEN LEGYEN A TANÍTÓ PÉLDATÁR?)
(MILYEN LEGYEN AZ ELLENŐRZŐ PÉLDATÁR?)
MILYEN LEGYEN A TANPÉLDATÁR?

Évtizedek óta foglalkozom példatárak összeállításával. Mellékelek néhány feladatnégyest középiskolában tanító kollégák részére.

Oldják meg a feladatokat, szeretném megismerni a véleményüket!

* * *

1. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\dfrac{x-3}{x-2}=\dfrac{44}{4-x^2}-\dfrac{10}{x+2}$; b) $\dfrac{x-13}{x-2}=\dfrac{44}{4-x^2}-\dfrac{10}{x+2}$;

c) $\dfrac{x-4}{x-2}=\dfrac{44}{4-x^2}-\dfrac{10}{x+2}$; d) $\dfrac{x-8}{x-2}=\dfrac{44}{4-x^2}-\dfrac{10}{x+2}$.

[a) $x_1=6$, $x_2=-3$; b) $x=-1$; c) $x=-4$; d) nincs megoldása.]

2. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{5x-6}=2+\sqrt{x-2}$; b) $\sqrt{5x-5}=2+\sqrt{x-2}$;

c) $\sqrt{5x-4}=2+\sqrt{x-2}$; d) $\sqrt{5x-14}=2+\sqrt{x-2}$.

[a) $x_1=2$, $x_2=3$; b) $x=\dfrac{9}{4}$; c) nincs megoldása; d) $x=6$.]

3. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $|x-1|+|x-3|=4$; b) $|x-1|+|x-3|=2$;

c) $|x-1|+|x-3|=1$; d) $|x-1|+|x-3|=2x-4$.

[a) $x_1=0$, $x_2=4$; b) $1\le x\le 3$; c) nincs megoldása; d) $x\ge 3$.]

4. Oldja meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszereket!

a) $x-y+\sqrt{x-y+3}=9$,
$x^2-xy+y^2=52$;

b) $x-y+\sqrt{x-y+3}=9$,
$x^2+y^2=36+2xy$;

c) $x-y+\sqrt{x-y+3}=9$,
$x^2+y^2=4+4xy$;

d) $x-y+\sqrt{x-y+3}=9$,
$(x-y-4)(x+y-2)=0$.

[a) $(8;\ 2)$, $(-2;\ -8)$; b) $(t+6;\ t)$, $t\in\mathbb{R}$; c) nincs megoldása; d) $(4;\ -2)$.]

5. Oldja meg a valós számhármasok halmazán a következő egyenletrendszereket!

a) $x+y=2$,
$xy-z^2=1$;

b) $x+y=-2$,
$xy-z^2=1$;

c) $x+y=4$,
$xy-z^2=4$;

d) $x+y=-4$,
$xy-z^2=-4$.

[a) $(1;\ 1;\ 0)$; b) $(-1;\ -1;\ 0)$; c) $(2;\ 2;\ 0)$; d) $(-2;\ -2;\ 0)$.]

6. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{3}\sin 2x=2\sin^2 x+1$; b) $1+2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x=0$;

c) $\sqrt{3}\sin 2x=2\cos^2 x+1$; d) $1+2\cos^2 x+\sqrt{3}\cos 2x=0$.

[a) $\operatorname{tg} x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; b) $\operatorname{tg} x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; c) $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$; d) $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$; …]

7. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} x$;

b) $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x = 0$;

c) $\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{tg} x$;

d) $\operatorname{ctg} 2x + \operatorname{tg} x = 0$.

[a) $\cos 3x = 0$; b) $\cos x = 0$; c) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; d) nincs megoldása.]

8. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\dfrac{2^{2x+\frac{3}{2}} - 2^{2x+\frac{1}{2}}}{2^{x+1} - 2^{x}} = 8$;

b) $\dfrac{4^{x+2} - 2^{2x+1}}{2^{x+2} - 2^{x+1}} = 21$;

c) $\dfrac{4^{x+1} - 2^{2x+3}}{2^{2x+1} - 4^{x}} = 8$;

d) $\dfrac{4^{x+2} - 2^{2x+3}}{2^{2x+1} - 4^{x}} = 8$.

[a) $x = \frac{5}{2}$; b) $x = \log_2 3$; c) nincs megoldás; d) $x \in \mathbb{R}$.]

9. Határozza meg az a paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet egyik gyöke a másik gyökének kétszerese legyen!

a) $x^2 + 3ax + 2a^2 = 0$;

b) $x^2 - 3ax + 2a^2 - 1 = 0$;

c) $x^2 - 3(a+1)x + 2a^2 + 6a = 0$;

d) $x^2 - ax - 2a - 4 = 0$.

[a) $a \in \mathbb{R}$; b) egyetlen a-ra sem teljesül; c) $a = 1$; d) $a = -6$ vagy $a = -3$.]

10. Az $x^2 + bx - 1 = 0$ egyenlet gyökei 1-gyel kisebbek, mint az

a) $x^2 - b^2x + b^2 - 2 = 0$;

b) $x^2 - b^2x + b^2 - 4 = 0$;

c) $x^2 - b^2x + b + 4 = 0$;

d) $x^2 - b^2x + b^2 - 6 = 0$

egyenlet gyökei. Számítsa ki a b értékét!

[a) $b_1 = 1$, $b_2 = -2$; b) $b = 1$; c) $b = -2$; d) nincs ilyen b.]

11. Határozza meg az a paraméter értékét úgy, hogy a következő egyenletnek két egyenlő gyöke legyen!

a) $x^2 + 2ax + a^2 = 0$;

b) $x^2 - 3(a^2 - 2)x + 2a^4 - 7a^2 + 5 = 0$;

c) $x^2 + 2(1 - 2a)x + 3a^2 - 2a = 0$;

d) $x^2 - (2a+1)x + a^2 + a = 0$.

[a) $\forall\, x \in \mathbb{R}$; b) $a = -2$ vagy $a = 2$; c) $a = 1$; d) nincs ilyen a.]

12. Igazolja, hogy a következő egyenleteknek a paraméterek minden megengedett értékére van valós megoldása!

a) $(x-1)(x-3) + a(x-2)(x-4) = 0,\ a \in \mathbb{R}$;

b) $x^2 - (a+b)x + ab - c^2 = 0,\ a, b \in \mathbb{R}$;

c) $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{a^2}{x-1} = 1,\ a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$;

d) $\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} = \dfrac{1}{c^2},\ a, b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

13. Egy húrtrapéz átlói merőlegesek egymásra.

a) A trapéz magassága m. Fejezze ki m-mel a trapéz területét!

b) A trapéz középvonalának hossza a. Fejezze ki a-val a trapéz területét!

c) A trapéz átlóinak hossza e. Fejezze ki e-vel a trapéz területét!

d) Egy húrtrapéz területe d^2 ($d > 0$). A trapéz átlói a párhuzamos oldalakkal 45°-os szöget zárnak be. Fejezze ki d-vel a trapéz magasságának, középvonalának és átlóinak a hosszát!

14. Oldja meg a következő kétismeretlenes egyenleteket!

a) $x + \dfrac{1}{x} = 2\cos y$;

b) $x + \dfrac{1}{x} = 2\sin y$;

c) $x + \dfrac{4}{x} = 4\sin y$;

d) $x + \dfrac{9}{x} = -6\cos y$.

Rábai Imre

VARGA TAMÁS NAPOK, 2000.

MEGHATÁROZOTT? TÚLHATÁROZOTT? ALULHATÁROZOTT?

I. 1. (Egy klasszikus feladat) Egy $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai: $AB = 10$ és $CD = 6$ egység. Az EF szakasz párhuzamos AB-vel, és a trapézt úgy vágja ketté, hogy az $ABFE$ trapéz területe az $ABCD$ trapéz területének a harmada. Milyen hosszú az EF szakasz? (Felvételi feladat 1985.)
[Mennyi a trapéz területe?]

2. Egy körbe írt trapéz magassága 8 egység, szára a kör középpontjából 60°-os szögben látszik. Mekkora a trapéz területe? (Felvételi feladat 1986.)
[Mekkorák a trapéz átlói és szárai?]

II. 1. Adott egy háromszög egyik oldala, a és a hozzá tartozó magasság, m_a. Számítsa ki a háromszög területét!
[Számítsa ki a másik két oldal hosszát!]

2. Adott egy trapéz két párhuzamos oldalának hossza és a trapéz magassága, a, c és m. Számítsa ki a trapéz területét!
[Számítsa ki a szárak és a középvonal hosszát!]

3. Egy négyszög átlói e és f, az átlók merőlegesek egymásra. Számítsa ki a négyszög területét!
[Számítsa ki a középvonalak hosszát és a négyszög szögeit!]

4. **a)** Egy háromszög egyik oldala 1 egység, az oldallal szemközti szög 30°, a háromszög köré írt kör sugara 1 egység.

b) Egy háromszög egyik oldala 1 egység, az oldallal szemközti szög 30°, a háromszög köré írt kör sugara 1,5 egység.

c) Adott egy háromszög egy oldala, a, az oldallal szemközti szög (α) és a köré írt kör sugara, r.
Számítsa ki mindhárom esetben a háromszög területét!

III. 1. Az $ABCD$ trapézba egy r sugarú kör írható ($AD \parallel BC$), BAD szög 60°, az AC átló merőleges a CD oldalra, és felezi a BAD szöget. Mekkora a trapéz területe?

2. Adott egy háromszög két oldala, 15 és 12 cm, területe 45 cm^2. Milyen távol van a harmadik oldaltól az az ezzel párhuzamos egyenes, amely a háromszöget két egyenlő területű részre osztja, ha a harmadik oldalhoz tartozó magasság 2 : 1 arányban osztja a 15 és 12 cm hosszú oldalak által bezárt szöget?

Rábai Imre

LEGYENEK TANPÉLDÁINK!
FELADATCSALÁDOK
Milyenek legyenek a példatárak?

Példa I. Az $x^2 + bx - 1 = 0$ egyenlet gyökei 1-gyel kisebbek, mint az

1. $x^2 - b^2x + 3b - 4 = 0;$
2. $x^2 - b^2x + b + 4 = 0;$
3. $x^2 - b^2x + b^2 + 2b - 4 = 0;$
4. $x^2 - b^2x + b^2 + b = 0;$
5. $x^2 - b^2x + b^2 - 2 = 0;$
6. $x^2 - b^2x + b^2 + 1 = 0;$
7. $x^2 - b^2x + b^2 - 6 = 0$

egyenlet gyökei. Számítsa ki b értékét!

II. Oldja meg a következő egyenleteket!

1. $\dfrac{x-3}{x-2} + \dfrac{10}{x+2} = \dfrac{44}{4-x^2};$
2. $\dfrac{x-13}{x-2} + \dfrac{10}{x+2} = \dfrac{44}{4-x^2};$
3. $\dfrac{x-4}{x-2} + \dfrac{10}{x+2} = \dfrac{44}{4-x^2};$
4. $\dfrac{x-12}{x-2} + \dfrac{10}{x+2} = \dfrac{44}{4-x^2};$
5. $\dfrac{x-8}{x-2} + \dfrac{10}{x+2} = \dfrac{44}{4-x^2};$
6. $\dfrac{x-16}{x-2} + \dfrac{10}{x+2} = \dfrac{44}{4-x^2};$
7. $\dfrac{x-a}{x-2} + \dfrac{10}{x+2} = \dfrac{44}{4-x^2}$, ahol $a \in \mathbb{R}$, paraméter.

Rábai Imre

VARGA TAMÁS NAPOK 2005.

RÁCZ JÁNOS
tanár úr
emlékére

KLUBBESZÉLGETÉS
„HA ÉN EZT A KLUBBAN ELMESÉLEM"

1. Mi történt a matematika felvételi dolgozattal 1973-ban?

2. Az első matematika tagozatos osztály (1962–66) hiteles története. Az osztály és a világhír.

3. Ha..., akkor... (Kürschák József 1864–1933.)

4. Végtelen lépcső, végtelen szálloda, Kalmár-krumpli. (Kalmár László 1905–1975-2005.)

5. a) Nem baj, fiam, majd én elmondom. (Fejér Lipót.)
   b) Csak ne fizessenek érte! (Gallai Tibor.)

6. Tisztelet az elődöknek! Ki volt Kövi Imre tanár úr?

7. Mi az a „Zögtan"? (Mi az a „czifra"?)

8. $(n + 1)$-edszer a szűkítő azonosságokból!

9. A legpechesebb anyagrész!

10. Valóban felesleges? Valóban nem érthető?
$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} \equiv \sqrt{ab}$, $\log_a(-x) + \log_a(-y) \equiv \log_a xy, \ldots$

11. Szegény mértani sorozat! ($q = 0$?, $-1 < q < 1$, $q = 1$.)

12. Lehet egy kicsit precízebb?
$\sqrt{-1} = i(?)$; $z = a + ib$ és $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}(?)$; $\int \sqrt{1 - x^2}dx, \ldots$

13. Elnevezés tőlem! (Nemegyenlet; azonosságegyenlet.)

14. Az idők folyamán elveszett! (Arányosság tulajdonságai, ...)

15. A kétoldali megközelítés módszerének védelmében! (Kalmár László, Gallai Tibor.)

16. Tanpéldáim, feladataim.
   a) Készítsünk testvérfeladatokat!
   b) Legyen-e preparált egy feladat?

17. Túl a szinusz-, koszinusz- és tangenstételen. (Mollweide-formulák következménye a felvételi feladatok között, Tycho de Brahe-formulák.)

18. A kettős táblázat módszerem! (Faragó László és tanítási kísérlete.)

19. Mi legyen a hibák sorsa? (zöld példatár, tankönyvek,...)

20. Nem egyenlő! Mikor egyenlő? Nem azonos?
$\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}, \ldots$

21. Módszerek. a) Mikor van pontosan egy megoldás? b) Azonos egyenlőtlenségek alapvető igazolási módszerei. c) Egy sorozat pontosan akkor számtani, ha... d) Ismerjük a logaritmus azonosságait?

22. Hátha valaki nem ismeri! (A mértani közép kilóg a sorból!)

23. Római régiségek. (TRI-VIA-LIS)

24. Próba? Ellenőrzés?

MEGFORDÍTHATÓ?

PONTOSAN AKKOR – AKKOR ÉS CSAK AKKOR – SZÜKSÉGES ÉS ELÉGSÉGES

PAKKOR $\Leftrightarrow$ CSAKKOR

RÁBAI IMRE

HAJNAL ANDRÁS
matematikus barátom
tiszteletére

1. A középiskolában tanított megfordítható tételek. (Húrnégyszög és érintőnégyszög tétele, Pitagorasz tétele,...)

2. A középiskolában tanított egyes tételek megfordítása. (Befogótétel, magasságtétel, a háromszög belső szögfelezőjének osztásarány tétele,...)

3. Néhány egyszerű alaptétel és megfordításának alkalmazása
(például $A + B \equiv C \Longleftrightarrow A \equiv C - B$; $A \geq B \Longleftrightarrow A - B \geq 0$).

4. Egyszerű „tételecskék":

$\frac{a}{b} = 0 \Longleftrightarrow a = 0$ és $b \neq 0$; $a^2 = b^2 \Longleftrightarrow a = b$ vagy $a = -b$; $|a| = |b| \Longleftrightarrow a^2 = b^2$; $ab = 0 \Longleftrightarrow \dots$

5. Szigorúan monoton függvények tulajdonságaiból adódó megfordítható tételek:

$x \mapsto x^2$, $x \geq 0$: $x_1 = x_2 \Longleftrightarrow x_1^2 = x_2^2$

$x \mapsto x^2$, $x \leq 0$: $x_1 = x_2 \Longleftrightarrow x_1^2 = x_2^2$

$x \mapsto x^{2n}$, $x \geq 0 \dots$, $n = 1, 2, \dots$

Két nemnegatív (nempozitív) értéket felvevő kifejezés értelmezési tartománya pontosan akkor azonos, ha a négyzetük azonos.

$x \mapsto x^3$, $x \in \mathbb{R}$: $x_1 = x_2 \Longleftrightarrow x_1^3 = x_2^3$

$\vdots$

Alkalmazás egyenletek ekvivalens átalakítására. Szigorúan monoton függvény alkalmazása egyenletek megoldása során. Bijektív (kölcsönösen egyértelmű; egy-egyértelmű függvény).

6. A középiskolai tananyaghoz közvetlenül kapcsolódó kitűzhető feladatok. (geometria: parallelogramma, derékszögű háromszög,...; egyenletek...)

7. Néhány meglepő megfordítható állítás.

a) Az $x^4 + px^2 + q = 0$ egyenlet gyökei pontosan akkor egy számtani sorozat négy egymást követő tagja, ha $100q = ?$;...

b) Gerőcs tanár úr feladata:
Egy (nem egyenlő oldalú) háromszög oldalainak hossza pontosan akkor egy számtani sorozat három egymást követő tagja, ha a háromszög súlypontján és a beírható kör középpontján áthaladó egyenes párhuzamos a háromszög egyik oldalával.

c) Rábai Imre feladata:
Legyen egy háromszög oldalainak hossza a, b, c ($a \geq b \geq c$ vagy $a \leq b \leq c$), a beírható kör sugara ϱ, a b oldalhoz tartozó magasság hossza m_b. $m_b = 3\varrho$ pontosan akkor, ha a, b, c (vagy c, b, a) ebben a sorrendben egy számtani sorozat három szomszédos tagja.

8. Néhány triviális, a számításban gyakran alkalmazható állítás és megfordítása.

(1) Egy derékszögű háromszög egyik szöge pontosan akkor $60°$, ha...

(2) Egy háromszög pontosan akkor derékszögű, ha $a = c \cdot \cos\beta$;...

(3) $\frac{a}{b} > 0$ pontosan akkor, ha $ab > 0$;...

$\vdots$

MEGFORDÍTHATÓ!

I.

1. Igazolja, hogy az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) egyenletnek $x_0 = 1$ pontosan akkor gyöke, ha $a + b + c = 0$.

(a) $x_0 = -1$, $a - b + c = 0$; (b) $x_0 = 2$, $4a + 2b + c = 0$;...

2. Igazolja hogy $x = x_0$ az $x^2+px+q = 0$ egyenletnek pontosan akkor gyöke, ha $x = 2x_0$ az $x^2+2px+4q = 0$ egyenletnek gyöke.

(a) $x = -2x_0$, $x^2 - 2px + 4q = 0$; (b) $x = 3x_0$, $x^2 + 3px + 9q = 0$;...

3. Igazolja, hogy az $ax^2 + 2bx + 4c = 0$ ($a \neq 0$) egyenlet két gyöke pontosan akkor egyenlő, ha az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) egyenlet két gyöke is egyenlő.

(a) $ax^2 - 2bx + 4c = 0$; (b) $ax^2 - 3bx + 9c = 0$;...

4. Igazolja, hogy az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet egyik gyöke (ha van) pontosan akkor **kétszerese** a másik gyöknek, ha

a) $2p^2 = 9q$; b) $D = \frac{p^2}{9}$; c) $D = \frac{q}{2}$, ahol D az egyenlet diszkriminánsa ($D \geq 0$).

$x_2 = -2x_1$ (a1) $2p^2 + q = 0$; (b1) $D = 9p^2$; (c1) $D = -\frac{9}{2}q$;

$x_2 = 3x_1$ (a2) $3p^2 = 16q$; (b2) $D = \frac{1}{4}p^2$; (c2) $D = \frac{4}{3}q$;...

5. Igazolja, hogy az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet egyik gyöke (ha van) pontosan akkor 2-vel nagyobb a másik gyöknél, ha

a) $p^2 = 4q + 4$; b) $D = 4$.

3-mal nagyobb (a1) $p^2 = 4q + 9$; (b1) $D = 9$;

4-gyel nagyobb (a2) $p^2 = 4q + 16$; (b2) $D = 16$;...

6. Az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet gyökei valósak. Igazolja, hogy a gyökök különbségének abszolút értéke pontosan akkor k ($k \geq 0$), ha az egyenlet diszkriminánsa k^2.

II.

1. Igazolja, hogy egy négyszög pontosan akkor paralelogramma, ha

a) mindkét átló felezi a négyszög területét;

b) az átlók a négyszöget négy egyenlő területű részre osztják.

2. Igazolja, hogy egy négyszög pontosan akkor paralelogramma, ha az átlók négyzetének összege egyenlő az oldalak négyzetének összegével.

3. Az $ABCD$ négyszög csúcspontjainak helyvektorai rendre **a**, **b**, **c** és **d**. Igazolja, hogy a négyszög pontosan akkor paralelogramma, ha $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{d}$ ($\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{d} - \mathbf{c}$).

4. Igazolja, hogy az $ABCD$ konvex négyszög pontosan akkor paralelogramma, ha

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0.$$

5. Igazolja, hogy egy paralelogramma szögfelezői által határolt négyszög területe pontosan akkor negyede a paralelogramma területének, ha a paralelogramma egyik oldala kétszerese a másik oldalnak!

III.

1. Igazolja, hogy $A \equiv B + C$ pontosan akkor, ha $A - B \equiv C$!

   $(A \equiv B,\ A - B \equiv 0)$

2. Igazolja, hogy $A \geq B$ pontosan akkor, ha $A - B \geq 0$!

   $(A \geq B + C \Longleftrightarrow A - C \geq B)$

3.1. $ab = 0$ pontosan akkor, ha (pa) $a = 0,\ b \in \mathbb{R}$ vagy $b = 0,\ a \in \mathbb{R}$;

3.2. $\frac{a}{b} = 0$ pa $a = 0$ **és** $b \neq 0$;

3.3. $a^2 = b^2$ pa $a = b$ **vagy** $a = -b$;

3.4. $|a| = |b|$ pa $a^2 = b^2$;

3.5. $a^3 = b^3$ pa $a = b$;

3.6. $\frac{a}{b} = \frac{a}{c}$ pa $a = 0$ **és** $bc \neq 0$ vagy $b = c \neq 0$;

$(ab > 0, \ldots;\ ab < 0, \ldots)$

4. Függvények szigorú monotonitásából adódó tételek
   (egyenletek ekvivalenciája)

4.1. $x \mapsto x^2,\ x \geq 0$	$x_1 = x_2 \Longleftrightarrow x_1^2 = x_2^2$
4.2. $x \mapsto x^2,\ x \leq 0$	$x_1 = x_2 \Longleftrightarrow x_1^2 = x_2^2$
4.3. $x \mapsto \sqrt{x},\ x \geq 0$	$x_1 = x_2 \Longleftrightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$
4.4. $x \mapsto \log_a x,\ x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$	$x_1 = x_2 \Longleftrightarrow \log_a x_1 = \log_a x_2$
4.4.1 $x \mapsto \log_a x,\ x > 0,\ a > 1$	$x_1 > x_2 \Longleftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$
4.4.2 $x \mapsto \log_a x,\ x > 0,\ 0 < a < 1$	$x_1 > x_2 \Longleftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$

$(x \mapsto a^x,\ a > 0,\ a \neq 1, \ldots)$

IV.

1. Igazolja, hogy egy háromszög pontosan akkor derékszögű, ha

   a) két szögének összege egyenlő a harmadik szöggel;

   b) valamelyik oldala egyenlő a hozzá tartozó súlyvonal kétszeresével;

   c) $s(s-c) = (s-a)(s-b)$, ahol $2s = a + b + c$;

   d) $T = s(s-c)$, ahol T a háromszög területe;

   e) $T = (s-a)(s-b)$;

   f) $c^2 = (a-b)^2 + 4T$;

   g) $c^2 = (a+b)^2 - 4T$;

   h) $a + b = 2r + 2\varrho$, ahol r a háromszög köré, ϱ a háromszögbe írt kör sugara;

   i) $\varrho_a + \varrho_b = 2r$, ahol ϱ_a, illetve ϱ_b az a, illetve a b oldalhoz írt kör sugara.

   ⋮

2. Igazolja, hogy a háromszög pontosan akkor hegyesszögű, ha

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma > 0.$$

a) derékszögű, $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 0$, b) tompaszögű...

3. Legyenek egy háromszög oldalai a, b, c, az oldalakkal szemközti szögek α, β, γ, a köré írható kör sugara r. Igazolja, hogy a háromszög pontosan akkor derékszögű, ha

a) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$;

b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$;

c) $a^2 + b^2 + c^2 = 8r^2$;

d) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 1 = 0$.

(Pontosan akkor hegyesszögű, tompaszögű, ha...)

4. Igazolja, hogy a háromszög pontosan akkor derékszögű, ha

a) $\sin\gamma = \cos\alpha + \cos\beta$;

b) $\sin\alpha + \sin\beta = \cos\alpha + \cos\beta$, ahol α és β hegyesszögek;

c) $\sin\gamma = \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$.

V.

1. Egy háromszög oldalai a, b, c. Igazolja, hogy a c oldallal szemközti γ szög pontosan akkor 120°, ha

a) $c^2 - ab = a^2 + b^2$;

b) $\dfrac{c^2 - (a-b)^2}{ab} = 3$;

c) $c = \sqrt{\dfrac{a^3 - b^3}{a - b}}$, $a \neq b$;

d) $\dfrac{(a+b)^2 - c^2}{ab} = 1$;

e) $c^2 = \dfrac{a^3 - b^3 + c^3}{a - b + c}$;

f) $c^2 = \dfrac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c}$;

g) $\dfrac{1}{a+c} + \dfrac{1}{c-b} = \dfrac{3}{a-b+c}$, $b \neq c$;

h) $\dfrac{1}{a-c} - \dfrac{1}{b+c} = \dfrac{3}{a-b+c}$, $a \neq c$;

i) $4s(s-c) = ab$;

j) $4(s-a)(s-b) = 3ab$.

60°

(c1) $c = \sqrt{\dfrac{a^3 + b^3}{a + b}}$, $a \neq b$;

(e1) $c^2 = \dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c}$;

(f1) $c^2 = \dfrac{a^3 + b^3 - c^3}{a + b - c}$;

(g1) $\dfrac{1}{a+c} + \dfrac{1}{b-c} = \dfrac{3}{a+b-c}$, $b \neq c$;

(h1) $\dfrac{1}{a-c} + \dfrac{1}{b-c} = \dfrac{3}{a+b-c}$, $a \neq c$, $b \neq c$;

(i1) $4s(s-c) = 3ab$;

(j1) $4(s-a)(s-b) = ab$.

45°, 135°, 30°, 150°

1. Igazolja, hogy az ABC háromszögben a c oldallal szemközti γ szög pontosan akkor $120°$, ha

a) $T = \frac{\sqrt{3}}{4}(c^2 - a^2 - b^2)$,

b) $f_c = \frac{ab}{a+b}$,

ahol T a háromszög területe, f_c a C csúcsból induló belső szögfelezőszakasz hossza!

(a1) $60°$, $T = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 - c^2)$,

(a2) $30°$, $T = \frac{1}{4\sqrt{3}}(a^2 + b^2 - c^2)$,

(a3) $150°$, $T = \frac{1}{4\sqrt{3}}(c^2 - a^2 - b^2)$,

(a4) $90°$, $T = \frac{1}{4}(c^2 - (a-b)^2)$,

(b1) $f_c = \sqrt{3} \cdot \frac{ab}{a+b}$;

(b2) $f_c = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{ab}{a+b}$;

(b3) $f_c = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{ab}{a+b}$;

(b4) $f_c = \sqrt{2} \cdot \frac{ab}{a+b}$.

VI.

1. Igazolja, hogy az (a_n) sorozat pontosan akkor számtani sorozat, ha
   a) a sorozat n-edik tagja $a_n = An + B$, ahol $A, B \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$;
   b) a sorozat n tagjának összege $s_n = An^2 + Bn$, ahol $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $B \in \mathbb{R}$.
   c) $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, ahol $n = 2, 3, 4, \ldots$ ($n \geq 2$ pozitív egész szám).
   ($2a_n = a_{n-k} + a_{n+k}$, $n > k$ $n = 2, 3, 4, \ldots$)
2. Igazolja, hogy az (a_n) sorozat ($a_n \neq 0$, $d \neq 0$) pontosan akkor számtani sorozat, ha
$$\frac{1}{a_n \cdot a_{n-1}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}}\right)$$
3. Az (a_n) számtani sorozatra $a_k + a_n = a_m + a_l$ pontosan akkor, ha $k + n = m + l$.

VII.

Legyen $a > 0$, $a \neq 1$ és $b > 0$.
Igazolja, hogy

1. $\log_a b > 0$ pontosan akkor, ha $(a-1)(b-1) > 0$;
   ($\log_a b < 0 \Longleftrightarrow (a-1)(b-1) < 0$);
2. $\log_a b > c$ pontosan akkor, ha $(a-1)(b-a^c) > 0$;
   ($\log_a b < c$ pakkor $(a-1)(b-a^c) < 0$).

VIII.

1. Igazolja, hogy $\frac{ax+b}{cx+d} = k$ ($c \neq 0$, $cx + d \neq 0$) pontosan akkor, ha $a = kc$ és $b = kd$, ha $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, $c \neq 0$, $d \neq 0$.
2. Igazolja, hogy $\frac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1} = k$ ($a_1 \neq 0$, $a_1x^2 + b_1x + c_1 \neq 0$) pontosan akkor, ha $a = ka_1$, $b = kb_1$ és $c = kc_1$, ha $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $c_1 \neq 0$.

Rábai Imre: Mi legyen a hibák, hiányok sorsa
(Bizony nagyon problémás ez az elemi matematika)

Olvastam valahol:
... tudását sekinek sem adta át,
igaz, nem is kérték tőle!

Tolni Jenő tanár úr emlékére

1. Kell-e próba, ellenőrzés, vizsgálat geometriai számítási feladatok megoldása során? (AMBÁR tanár úr példája.)

2. Vezetőtanári tapasztalatom 1958-ból.

3. Ambrus András: Ellenőrzési módszerek a problémamegoldási folyamatban (Varga Tamás napi előadás, cikk).
„A problémamegoldási fázisok egyik legelhanyagoltabb területe a tanulók részéről az ellenőrzés ..."
ÉS A TANÁROK RÉSZÉRŐL? A TANKÖNYVÍRÓK RÉSZÉRŐL?...!

4. „VIGYÁZAT, NEM CSALOK!" (Egy tanulságos feladat ellenőrzés nélkül.)

Reményi Gusztávné tanárnő emlékére
Egy félévszázad problémás feladataiból

1. feladat: Egy téglatest egyik csúcsában összefutó három határlap átlói 18 dm, 28 dm és 38 dm hosszúak. Mekkora a testátló? (Tankönyvi feladat 1935.)

[„Válasz": a testátló hossza $d = \sqrt{1276}$ ($\approx 35{,}72$) dm. (Valóban?)]

2. feladat: Egy konvex négyszög szemközti oldalainak középpontját összekötve négy négyszögre bontható. Ha ezek közül háromnak a területe 8, 16, 20 területegység, akkor mekkora a negyedik résznégyszög területe? (Felvételi feladat 1995.)

[„Válasz" a javítási útmutatóból: a negyedik résznégyszög területe 28, 12 vagy 4 területegység. (Valóban?)]

3. feladat: Mely valós számokra igaz, hogy $\mathrm{tg}(2x) = \mathrm{ctg}x$? (Tankönyvi feladat 2004.)

[„Válasz": $x = \frac{\pi}{6} + m\pi$ $(m \in \mathbf{Z})$ vagy $x = -\frac{\pi}{6} + n\pi$ $(m \in \mathbf{Z})$ (Valóban?)]

4. feladat: Egy háromszög két oldala 15 cm és 12 cm, területe 45 cm^2. Milyen távol van a harmadik oldaltól az ezzel párhuzamos egyenes, amely a háromszöget két egyenlő területű részre osztja, ha a harmadik oldalhoz tartozó magasság 2:1 arányban osztja a 15 cm és 12 cm hosszú oldalak által bezárt szöget? (Egy napilap előkészítő *minta* feladata 2000.)

[„Válasz" (megoldás?): ... 2,96 cm-re van ... (Valóban?)]

5. feladat: Egy paralelogramma két oldala 5 cm és 2 cm hosszú, az átlók által bezárt hegyesszög 45°. Számítsa ki a paralelogramma területét! (Egy tanpéldám)

[„Válasz": $t = 10{,}5$ cm^2 (Valóban?)]

6. feladat: Egy háromszög két oldala 4 cm és 5 cm, a harmadik oldalhoz tartozó magasság 3 cm. Mekkora a háromszög harmadik oldala? (Ámbár tanár úr példája a filmben 2005.)

[„Válasz”: a harmadik oldal hossza $4+\sqrt{7}$ ($\approx 6{,}65$) cm (Valóban?)]

7. feladat: a) Oldjuk meg a következő egyenletet az x valós számok halmazán, ha a p paraméter valós szám:

$$\frac{2p+x}{2p-x}=\frac{8p^2-3x}{x^2-4p^2}-\frac{x+p}{2p+x}$$

A p ($p \in$ R) paraméter mely értékeire nincs megoldása az egyenletnek a valós számok halmazán? (Tanpéldatár 1990)

[„Válasz”: Kezdeti feltételek: $x \neq 2p$, $x \neq -2p$. Ha $p \neq \frac{3}{5}$, akkor $x=\frac{14p^2}{3-5p}$; ha $p=\frac{3}{5}$, vagy $p=\frac{1}{4}$, $p=-\frac{3}{2}$, akkor nincs megoldás. (Valóban? Mi van, ha $p = 0$? Miért így kérdezi a feladat?)]

b) Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán, ahol a p paraméter valós szám:

$$\frac{x+p-2p^2}{p^2-x^2}=\frac{x+p}{p-x}+\frac{x}{p+x},$$

ahol a p paraméter valós szám. A p ($p \in$ R) paraméter mely értékeire lesz az egyenletnek végtelen sok megoldása a valós számok halmazán? (Tanpéldatár 1990.)

[„Válasz”: Kezdeti feltételek: $p \neq x$, $p \neq -x$. Ha $p=\frac{1}{3}$, akkor $\forall\, x \in \mathbf{R}$ megoldása az egyenletnek.
Valóban?
Miért így kérdezi a feladat? „Minden” vagy „minden megengedett”?]

8. feladat: Egy mértani sorozat első eleme 3, n-edik eleme 13. Az első n elem reciprok értékeinek összege 8. Számítsa ki a mértani sorozat első n elemének az összegét! (Felvételi feladat 1970.)

[„Válasz”: $s_n = 312$. (Valóban?)]

9. feladat: Néhány elgondolkodtató megfogalmazás.

a) Ellenőrizhető, hogy ez valóban megoldás. (Szerepelt felvételi feladat javítási utasításában. De nem ellenőrizték, és nem volt megoldás.)

b) Megmutathatnánk, hogy ez a módszer nem vezet eredményre! Nem mutatták meg, és a módszer bizony eredményre vezet. (Iskolatelevízió tanpéldája)

c) Felmerül a kérdés, hogy van-e még egy megoldás. (Eddig kiváló.) És utána „belátják”, hogy nincs, pedig van! (Előkészítő példatár)