Mérőlapok felvételire III.
1981. április

Oldjunk meg paraméteres feladatokat!

1. Oldjuk meg x-re és vizsgáljuk az $(a^2-1)x = 2a^2 + 3a + 1$ egyenletet, ahol a valós paraméter!

2. Oldjuk meg a

$$4ax + ay = 9,$$
$$2ax + 18y = -27$$

egyenletrendszert, ahol a valós paraméter!

3. Oldjuk meg a $\sqrt{x-a} + \sqrt{x} = 1$ egyenletet, ahol a valós paraméter!

4. Határozzuk meg az a valós paraméter értékét úgy, hogy az

$$(a^2+1)x^2 + (a+1)x - 2 = 0$$

egyenletnek pontosan egyik gyöke essen a (0; 1) intervallumba!

5. Határozzuk meg az a valós paraméter értékét úgy, hogy az

$$(a^2-1)x^2 + 2(a-1)x + 2$$

polinom értéke minden x-re pozitív legyen!

6. Oldjuk meg a $\frac{2}{a} - \frac{2^x + a}{a \cdot 2^x} = \frac{2^x}{2^x - a}$ egyenletet, ahol a valós paraméter!

7. Oldjuk meg az $\frac{\lg x}{\lg\left(x - \frac{a^2-1}{4}\right)} = 2$ egyenletet, ahol a valós paraméter!

8. A $\cos x \cdot \mathrm{ctg} x - \sin x = a \cos 2x$ egyenletben az a valós paraméter. Adott valós a értékre hány olyan megoldása van az egyenletnek, amelyre $0 \le x \le 2\pi$?

1997. november

Kalmár László tanár úr emlékére
*[0]

1. Igazolja, hogy egy húrtrapéz pontosan akkor (akkor és csak akkor) érintőtrapéz is, ha a magassága a párhuzamos oldalak mértani közepe.

2. Oldja meg a valós számpárok halmazán az $x - y - \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} = \dfrac{12}{x+y}$, $xy = -15$ egyenletrendszert!

3. Oldja meg a

$$2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2x} a > 0$$

egyenlőtlenséget a valós számok halmazán, ahol a valós paraméter.

4. Legyenek p_1, p_2, q_1, q_2 olyan valós számok, amelyekre $p_1p_2 = 2(q_1 + q_2)$. Igazolja, hogy az

$$x^2 + p_1x + q_1 = 0 \qquad \text{és az} x^2 + p_2x + q_2 = 0$$

egyenletek közül legalább az egyiknek van valós megoldása.

Rábai Imre

[0]Ezt a feladatsort szakköri feldolgozásra ajánljuk.

1998. január

Rédei László professzor úr emlékére

1. Igazolja, hogy ha a, b, $c \in \mathbf{R}^+$, akkor

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq a+b+c.$$

2. a) Igazolja, hogy

$$S_n = 1\cdot 2+4\cdot 2^2+7\cdot 2^3+\cdots+(3n-2)\cdot 2^n = 10+(3n-5)\cdot 2^{n+1}.$$

b) Állítsa elő az

$$S_n' = 2\cdot 2+5\cdot 2^2+8\cdot 2^3+\cdots+(3n-1)\cdot 2^n$$

összeget n függvényeként.

3. Igazolja, hogy egy háromszög három oldalának hossza, a, b és c pontosan akkor (akkor és csak akkor) három egymást követő eleme egy számtani sorozatnak, ha

$$ac = 6r\varrho,$$

ahol r a háromszög köré, ϱ a háromszögbe írható kör sugara.

4. Legyenek A, B, C és D a sík (tér) tetszőleges pontjai. Igazolja, hogy

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=0$;

b) ha $AB\perp CD$ és $AD\perp BC$, akkor $CA\perp BD$.

c) Legyen ABC egy síkbeli háromszög. A b) alapján indokolja, hogy a háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást.

1998. november

[1]Ezt a feladatsort szakköri feldolgozásra ajánljuk.

Pogány János, a budapesti Piarista gimnázium kiváló matematika tanára emlékére.

1. Állapítsa meg, hogy az m valós paraméter mely értékeire lesznek a

$$2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m = 0$$

egyenlet gyökei valósak, és állapítsa meg ezekre az m értékekre az

$$f(m) = x_1 + x_2 + 4x_1x_2$$

kifejezés legnagyobb és legkisebb értékét, ahol x_1 és x_2 az adott egyenlet megoldásai.

2. a) Igazolja, hogy minden háromszögben

$$\varrho \cdot r = \frac{abc}{4s},$$

ahol a, b, c a háromszög oldalai, $a+b+c=2s$, ϱ a háromszögbe, r a háromszög köré írt kör sugara.

b) Tekintsük azokat a háromszögeket, amelyekben az egyik oldal hossza 2 egység, a másik két oldal összege 4 egység. Határozza meg a háromszögbe és a háromszög köré írható körök területei szorzatának a legnagyobb értékét.

3. Igazolja, hogy az

$$f(x) = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} \qquad (a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0;\ a_2x^2 + b_2x + c_2 \neq 0)$$

kifejezés értéke pontosan akkor (akkor és csak akkor) állandó (azaz értéke független x-től), ha van olyan $k \in \mathbf{R}$, hogy $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$, $c_1 = kc_2$.

4. Az (a_n) $(n \in \mathbf{N}^+)$ sorozatban $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ és $n \geq 3$ esetén $a_n = 2a_{n-2} - a_{n-1}$.

Írja fel a_n-et, majd S_n-et $(S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ n függvényeként.

Rábai Imre

1*

1999. január

A fővárosi Toldy Ferenc Gimnázium tiszteletére, ahol az 1957–58-as tanévben tanítottam.

1. Oldja meg a

$$\sqrt{x-1}+x-3 \geq \sqrt{2(x-3)^2+2x-2}$$

egyenlőtlenséget.

2. Az $ABCD$ konvex négyszög AC és BD átlóinak metszéspontja P. Legyen az APB, illetve CPD háromszögek területe t_1, illetve t_3. Az $ABCD$ négyszög területe $T=\left(\sqrt{t_1}+\sqrt{t_3}\right)^2$. Igazolja, hogy az $ABCD$ négyszög trapéz!

3. Oldja meg a

$$\sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

egyenletet a valós számok halmazán!

4. Igazolja, hogy minden háromszögben

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}+\frac{\cos\beta}{\sin\gamma\sin\alpha}+\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}=2.$$

Rábai Imre

1999. november

Szőkefalvi Nagy Béla professzor úr emlékére

1. Oldja meg a valós számpárok halmazán ($\mathbf{R}^2$) az

$$x^3 - y^3 = 21(x - y), \qquad x^3 + y^3 = 13(x + y)$$

egyenletrendszert.

2. *a*) Milyen α, β számokra igaz, hogy

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha + \sin\beta\ ?$$

b) Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin x + \sin\frac{\pi}{6}$$

egyenletet.

3. Igazolja, hogy egy négyszög pontosan akkor (akkor és csak akkor) paralelogramma, ha az átlók négyzetének összege megegyezik az oldalak négyzetének összegével.

4. Határozza meg az $x \mapsto \dfrac{x^2+4}{x+4}$, $x > -4$ függvény legkisebb értékét. Mely x helyen veszi fel a függvény ezt a legkisebb értéket?

Rábai Imre

2000. január

Lukács Sándor igazgató úr (barátom) emlékére

1. Határozza meg az a és a b paraméterek értékeit, ha az

$$x^3 - ax^2 + 18 = 0 \qquad \text{és az} \qquad x^3 + bx - 12 = 0$$

egyenleteknek két közös valós gyöke van. Oldja is meg az egyenleteket.

2. Igazolja, hogy minden háromszögben (a szokásos jelölésekkel)

$$(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right).$$

3. Oldja meg az

$$\log_{a^2x} x^3 + \log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} \sqrt{x} > 2$$

egyenlőtlenséget a valós számok halmazán, ahol $a > 0$ valós paraméter.

4. Az ABC háromszög oldalainak hossza a, b, illetve c egység. ($a \geq b \geq c$), a súlyvonalak hossza rendre s_a, s_b, s_c.

a) Igazolja, hogy $2b^2 = a^2 + c^2$ pontosan akkor (akkor és csak akkor), ha $2s_b^2 = s_a^2 + s_c^2$.

b) Igazolja, hogy az ABC háromszög súlyvonalaiból mint oldalakból alkotott háromszög pontosan akkor hasonló az ABC háromszöghöz, ha $2b^2 = a^2 + c^2$.

Rábai Imre

Felvételire előkészítő matematika feladatok
a Fazekas Mihály Gimnázium tanulói számára.

2003. Bp.

Összeállította Rábai Imre, a gimnázium volt tanára (1958–1966).

1. feladat: Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{4x+\sqrt{16x^2-4}}=\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+1}$;

b) $\dfrac{\log_x 7}{\log_x 3}=\dfrac{\log_3 4}{\log_7 4}$;

c) $\dfrac{(\cos x-\sin x-1)(\cos x-\sin x+1)}{\sin 2x}=-1$.

2. feladat: Oldja meg a következő egyenletrendszereket a valós számok halmazán! $(x, y \in \mathbf{R}^2)$

a) $x^2-xy=12$;
$xy+y^2=-2$.

b) $\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{15}{4}$,
$\log_3(x+5y)-\log_3(x-y)=1$.

3. feladat: Egy $ABCD$ trapéz két párhuzamos oldalának hossza $AB=a$ és $DC=c$, $a>c$. Az EF szakasz párhuzamos AB-vel és a trapézt úgy vágja ketté, hogy az $ABFE$ trapéz területe az $ABCD$ trapéz területének harmada. Fejezze ki a-val és c-vel az EF szakasz hosszát.
(Hány ilyen trapéz létezik?)

4. feladat: Az $ABCD$ téglalapban $AB=3\cdot BC$. A téglalap síkjának egy P pontja a B, A és D csúcsoktól rendre $PB=4$, $PA=1$ és $PD=\sqrt{2}$ távolságra van. Mekkora a téglalap területe?
(Hová esik a P pont?)

5. feladat: Az $x^2-px+q=0$ egyenlet egyik gyökének kétszerese gyöke az $x^2+4px-4q=0$ egyenletnek és $p^2-4q=64$. Számítsa ki p és q értékét!

6. feladat: Határozza meg az f: $\mathbf{D}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto f(x)=\dfrac{1}{\sin^6 x+\cos^6 x}$ függvény szélsőérték helyeit, és értékkészletét! (Mi a függvény periódusa?)

7. feladat: Az ABC háromszög két csúcsa: $A(7;6)$, $B(-1;0)$. A C csúcs az $x+2y+1=0$ egyenletű egyenesre illeszkedik. Az ABC háromszög területe 40. Számítsa ki a C csúcs koordinátáit!

8. feladat: **a)** Oldja meg az egész számok halmazán a $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\left(-x-\sqrt{x^2+3x-12}\right)\right)=0$ egyenletet!

b) Az m valós paraméter mely értékeire van megoldása a $\cos 2x+(2-5m)\sin x-3m^2+3m-1=0$ egyenletnek a valós számok halmazán?

c) Oldja meg az egyenletet, ha m értéke $-\dfrac{2}{3}$; 0; $\dfrac{2}{3}$; 1; illetve 2.

1997. november mv.

1. Legyen a húrtrapéz párhuzamos oldalainak hossza $2a$, illetve $2b$ $(a > b)$, a szárak hossza c, a magasságé m.

Ha a húrtrapéz egyben érintőtrapéz is, akkor $m = 2\varrho$, ahol ϱ a beírható kör sugara, és $c = a + b$. Így

$$4\varrho^2 = (a+b)^2 - (a-b)^2, \qquad m = 2\varrho = \sqrt{2a \cdot 2b},$$

tehát igaz az állítás. Ha $a = b$, akkor triviális az állítás.

Ha a húrtrapézban $m^2 = 2a \cdot 2b$, akkor

$$c^2 = 2a \cdot 2b + (a-b)^2,$$

tehát

$$c = a + b,$$

azaz a trapéz érintőnégyszög, hiszen a szemközti oldalak összege ($2a+2b$, illetve $2(a+b)$) megegyezik. Ha a trapéz téglalap (négyzet), akkor triviális az állítás.

2. Ha $x + y > 0$, akkor $(x+y)$-nal szorozva az első egyenletet $x^2 - y^2 - \sqrt{x^2-y^2} - 12 = 0$, ahonnan $\sqrt{x^2-y^2} = 4$, hiszen $\sqrt{x^2-y^2} \geq 0$. Így $x^2 - y^2 = 16$, és $xy = -15$. Helyettesítő módszerrel $x_1 = 5$, $y_1 = -3$ vagy $x_2 = -5$, $y_2 = 3$ adódik. Az $x_1 = 5$, $y_1 = -3$ számpár megoldás, a másik nem.

Ha $x + y < 0$, akkor $x^2 - y^2 + \sqrt{x^2-y^2} - 12 = 0$, ahonnan $\sqrt{x^2-y^2} = 3$, így $x^2 - y^2 = 9$ és $xy = -15$, majd $x^4 - 9x^2 - 225 = 0$, $x^2 = \frac{1}{2}\left(9 + 3\sqrt{109}\right)$.

Az $x_3 = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(9+3\sqrt{109}\right)}$, $y_3 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(3\sqrt{109}-9\right)}$ számpár megoldás,

az $x_4 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(9+3\sqrt{109}\right)}$, $y_4 = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(3\sqrt{109}-9\right)}$ számpár nem.

3. Nyilván $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $x \neq 1$, $ax > 0$, $ax \neq 1$, $a^2x > 0$ és $a^2x \neq 1$. Azonosságok alkalmával az egyenlőtlenség

$$\frac{2}{\log_a x} + \frac{1}{1 + \log_a x} + \frac{3}{2 + \log_a x} > 0.$$

Legyen $\log_a x = z$. Azonos átalakításokkal a

$$\frac{6\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{4}{3}\right)}{z(z+1)(z+2)} > 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amelynek megoldásai: $-2 < z < -\frac{4}{3}$ vagy $-1 < z < -\frac{1}{2}$ vagy $z > 0$. Így $-2 < \log_a x < -\frac{4}{3}$ vagy $-1 < \log_a x < -\frac{1}{2}$ vagy $\log_a x > 0$.

Ha $a > 1$, akkor a logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő, tehát

$$\frac{1}{a^2} < x < \frac{1}{\sqrt[3]{a^4}} \qquad \text{vagy} \qquad \frac{1}{a} < x < \frac{1}{\sqrt{a}} \qquad \text{vagy} \qquad x > 1,$$

55

ha $0 < a < 1$, akkor a logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, tehát

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^4}} < x < \frac{1}{a^2} \quad \text{vagy} \quad \frac{1}{\sqrt{a}} < x < \frac{1}{a} \quad \text{vagy} \quad 0 < x < 1.$$

4. Az első egyenlet diszkriminánsa $D_1 = p_1^2 - 4q_1$, a másodiké $D_2 = p_2^2 - 4q_2$. A feltétel alkalmazásával

$$D_1 + D_2 = p_1^2 + p_2^2 - 4(q_1 + q_2) = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 = (p_1 - p_2)^2 \geq 0.$$

Mivel a diszkriminánsok összege nemnegatív, azért D_1 és D_2 közül legalább az egyik nemnegatív, így az egyenletek közül legalább az egyiknek van valós megoldása.

Rábai Imre

1998. január mo.

1. Ismeretes, hogy ha $A > 0$ és $B > 0$, akkor $A+B \geq 2\sqrt{AB}$. Ezt alkalmazva

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab^2c}{ac}} = 2b, \qquad \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2c \quad \text{és} \quad \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2a.$$

Így

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right) \geq \frac{1}{2}(2b+2c+2a) = a+b+c.$$

Az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = b = c$.

2. a) Az állítás teljes indukcióval igazolható. Ha $n = 1$, akkor igaz az állítás, mert $S_1 = 1 \cdot 2 = 10 + (3-5) \cdot 2^2 = 2$. Tegyük fel, hogy n-re igaz, azaz $S_n = 10 + (3n-5) \cdot 2^{n+1}$. Be kell látnunk, hogy $(n+1)$-re is igaz, azaz hogy

$$S_{n+1} = 10 + (3(n+1)-5) \cdot 2^{n+2} = 10 + (6n-4) \cdot 2^{n+1}.$$

Ez is fennáll, hiszen

$$S_{n+1} = S_n+(3(n+1)-2)\cdot 2^{n+1} = 10+(3n-5)\cdot 2^{n+1}+(3(n+1)-2)\cdot 2^{n+1} = 10+(6n-4)\cdot 2^{n+1}.$$

Így az állítást igazoltuk.

b) Észrevehető, hogy S'_n k-adik tagja 2^k-nal nagyobb az S_n k-adik tagjánál. Ezért

$$S'_n = S_n + (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) = S_n + 2(2^n - 1) = 8 + (3n-4) \cdot 2^{n+1}.$$

3. a) Ismeretes, hogy a háromszög területe $T = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ és $c = 2r\sin\gamma$, tehát $T = \frac{abc}{4r}$, azaz $r = \frac{abc}{4T}$.

Mivel $\varrho = \frac{T}{s}$, ahol $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, azért ha $ac = 6r\varrho$, akkor $ac = 6\cdot\frac{abc}{4T}\cdot\frac{T}{s} = \frac{3abc}{a+b+c}$, amiből $a+b+c = 3b$, $a+c = 2b$, $a-b = b-c$, azaz a, b, c valóban egy számtani sorozat három szomszédos eleme.

b) Legyen a, b, c egy számtani sorozat három szomszédos eleme. Ekkor $a+c = 2b$, ezért

$$6r\varrho = 6 \cdot \frac{abc}{2T} \cdot \frac{2T}{a+b+c} = 3\frac{abc}{3b} = ac.$$

4. a) Legyen $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{c}$ és $\overrightarrow{DA} = \mathbf{d}$. Világos, hogy $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d} = \mathbf{0}$.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD} = \mathbf{ac}+\mathbf{b}(-\mathbf{d})+(\mathbf{c}+\mathbf{d})(\mathbf{b}+\mathbf{c}) =$$
$$\mathbf{ac}-\mathbf{bd}+\mathbf{bc}+\mathbf{c}^2+\mathbf{bd}+\mathbf{cd} = \mathbf{c}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}) = 0.$$

b) A feltétel szerint $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$, ezért skaláris szorzatuk nulla, azaz $\mathbf{ac} = 0$, és hasonlóan $(-\mathbf{d})\mathbf{b} = 0$.

Azt kell belátni, hogy $CA \perp BD$. Mivel $\overrightarrow{CA} = \mathbf{c} + \mathbf{d}$ és $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, ezért elegendő belátni, hogy $(\mathbf{c} + \mathbf{d})(\mathbf{b} + \mathbf{d}) = 0$. Ez pedig teljesül, mert

$$(\mathbf{c} + \mathbf{d})(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{cb} + \mathbf{c}^2 + \mathbf{db} + \mathbf{dc} = \mathbf{c}(\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{c}(-\mathbf{a}) = 0,$$

hiszen $\mathbf{db} = 0$, $\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = -\mathbf{a}$ és $\mathbf{ca} = 0$.

c) A b) feltétele szerint, ha a D pont rajta van a C-ből és az A-ból induló magasságvonalon, akkor a bizonyított állítás szerint rajta van a B-ből induló magasságvonalon is, tehát az ABC háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást.

Rábai Imre

1998. november mo.

1. Az egyenlet gyökei akkor valósak, ha a diszkriminánsa nemnegatív, azaz ha

$$4(m+1)^2 - 4\cdot 2(m^2+2m) \geq 0,$$

ami akkor teljesül, ha

$$-1-\sqrt{2} \leq m \leq -1+\sqrt{2}.$$

Mivel $x_1 + x_2 = -(m+1)$ és $4x_1x_2 = 4\cdot\dfrac{m^2+2m}{2} = 2m^2+4m$, azért

$$f(m) = 2m^2+3m-1.$$

$f(m)$ legkisebb értéke a $[-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}]$ intervallumon $-\dfrac{17}{8}$, amit az $m = -\dfrac{3}{4}$ helyen vesz fel, míg legnagyobb értéke $2\left(\dfrac{1}{4}+\sqrt{2}\right)^2 - \dfrac{17}{8}$, amit az $m = -1-\sqrt{2}$ helyen vesz fel.

2. a) Ismeretes, hogy minden háromszögben $\varrho = \dfrac{T}{s}$ és $r = \dfrac{abc}{4T}$, így $\varrho r = \dfrac{abc}{4s}$.

b) A háromszög egyik oldala 2 egység, a másik két oldal összege 4 egység. Célszerű jelöléssel a két oldal $2-x$, illetve $2+x$, ahol $0 \leq x < 1$. A szóban forgó körök területének szorzata

$$f(x) = \varrho^2\pi\cdot r^2\pi = \pi^2(\varrho r)^2 = \pi^2\cdot\left(\frac{2\cdot(2-x)(2+x)}{4\cdot 3}\right)^2,$$

hiszen $2s = 6$, $s = 3$.

Az $f(x) = \dfrac{\pi^2}{36}(4-x^2)^2$ függvény a $[0,\ 1)$ intervallumban akkor a legnagyobb, ha $x = 0$, hiszen $4-x^2 > 0$, és így a négyzete akkor a legnagyobb, ha $4-x^2$ a legnagyobb.

Az $f(x)$ legnagyobb értéke $\dfrac{4}{9}\pi^2$, ami akkor adódik, ha a háromszög egyenlő oldalú.

3. Ha van ilyen k, azaz $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$ és $c_1 = kc_2$, akkor

$$f(x) = \frac{k(a_2x^2+b_2x+c_2)}{a_2x^2+b_2x+c_2} = k, \qquad \text{tehát } f(x) \text{ értéke állandó.}$$

Ha $f(x)$ értéke állandó minden megengedett x-re, azaz

$$f(x) = \frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2} = K,$$

akkor

$$(a_1-Ka_2)x^2 + (b_1-Kb_2)x + (c_1-Kc_2) = 0, \tag{1}$$

azaz az (1) *legfeljebb* másodfokú egyenletnek kettőnél több megoldása van, ami csak úgy lehetséges, hogy minden együttható nulla (a polinom azonosan nulla), tehát $a_1 - Ka_2 = 0$, $b_1 - Kb_2 = 0$, $c_1 - Kc_2 = 0$, így valóban van olyan $K \in \mathbf{R}$, hogy $a_1 = Ka_2$, $b_1 = Kb_2$ és $c_1 = Kc_2$.

4. A rekurzív definícióból következik, hogy

$$a_n - a_{n-1} = 2a_{n-2} - 2a_{n-1} = (-2)(a_{n-1} - a_{n-2}).$$

A $b_k = a_{k+1} - a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ különbségsorozat a $q = -2$ hányadosú mértani sorozat, $b_1 = a_2 - a_1 = 1$, ezért $b_k = (-2)^{k-1}$. Így

$$a_2 - a_1 = 1, a_3 - a_2 = -2, a_4 - a_3 = 4, \vdots a_n - a_{n-1} = (-2)^{n-2}.$$

Adjuk össze az egyenleteket:

$$a_n - a_1 = \frac{1 - (-2)^{n-1}}{1 - (-2)},$$

ahonnan $a_n = 1 + \frac{1}{3}(1 - (-2)^{n-1}) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}(-2)^{n-1}$.

$$S_n = \frac{4}{3}n - \frac{1}{3}(1 - 2 + \cdots + (-2)^{n-1}) = \frac{4}{3}n - \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - (-2)^n}{1 - (-2)} = \frac{4}{3}n - \frac{1}{9}(1 - (-2)^n).$$

Rábai Imre

64

1999. január mo.

A januári szakköri feladatok megoldásvázlatai, eredményei

1. Csak olyan x szám lehet megoldás, amelyre $\sqrt{x-1}+x-3\ge 0$, azaz $x \ge 2$. Legyen $x - 3 = z$ és $\sqrt{x-1}=y\quad (>0)$. Ekkor $y+z\ge\sqrt{2x^2+2z^2}$, ami ekvivalens az $y^2 + z^2 + 2yz \ge 2y^2 + 2z^2$ és így az $(y - z)^2 \le 0$ egyenlőtlenséggel: tehát $y = z$, $\sqrt{x-1}=x-3$, $x-1-\sqrt{x-1}-2=0$. $\sqrt{x-1}=2$ (hiszen $\sqrt{x-1}>0$), $x = 5$. Az adott egyenlőtlenséget egyetlen szám, $x = 5$ elégíti ki.

2. Jelölje a BPC, illetve a DPA háromszögek területét t_2, illetve t_4, a négyszög területét T. Mivel egyrészt $T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$, másrészt $T=t_1+t_3+2\sqrt{t_1t_3}$, azért $t_2+t_4=2\sqrt{t_1t_3}$.

Legyen $AP = e_1$, $PC = e_2$, $BP = f_1$, $PD = f_2$.

Az egyenlő magasságú háromszögek területének arányára vonatkozó állítás alkalmazásával: $\frac{t_1}{t_2}=\frac{e_1}{e_2}$ és $\frac{t_4}{t_3}=\frac{e_1}{e_2}$, tehát $t_1t_3=t_2t_4$.

Így $t_2+t_4=2\sqrt{t_2t_4}$, $\left(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_4}\right)^2=0$, azaz $t_2=t_4$.

Ha az átlók szöge φ, akkor $t_2=\frac{1}{2}e_2f_1\sin\varphi$ és $t_4=\frac{1}{2}e_1f_2\sin\varphi$, amiből $e_1f_2=e_2f_1$, $\frac{e_1}{f_1}=\frac{e_2}{f_2}$.

Az APB és CPD háromszögek tehát hasonlók, $PAB\angle = PCD\angle$, ezért AB párhuzamos CD-vel, azaz a négyszög valóban trapéz.

3. Szorozzuk meg $2\cdot\frac{1}{\sqrt2}$-vel az egyenlet mindkét oldalát, a bal oldalon alakítsunk szorzattá.

$(2\sin x\cos x)\left(\frac{1}{\sqrt2}\sin x-\frac{1}{\sqrt2}\cos x\right)=1,\qquad \sin 2x\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1.$

Ez csak úgy lehetséges, ha

a) $\sin 2x = 1$ és $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$ vagy **b)** $\sin 2x = -1$ és $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$.

a) $2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ és $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $x=\frac{3\pi}{4}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$ ilyen x tehát nincs.

b) $2x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ és $x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}+2n\pi$, $x=\frac{7\pi}{4}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$.

Az egyenlet megoldásai az $x=\frac{7\pi}{4}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$ számok.

4. Az igazolandó egyenlőség ekvivalens a következőkkel:
cosαsinα + cosβsinβ + cosγsinγ = 2sinαsinβsinγ,
sin2α + sin2β + sin2γ = 4sinαsinβsinγ.
Így elegendő ez utóbbit igazolni.

Mivel sin2α + sin2β = 2sin(α + β)cos(α – β), és felhasználva, hogy γ = 180° – (α + β), 2γ = 360° – 2(α + β),
sin2γ = –sin2(α + β) = –2sin(α + β)cos(α + β),
tehát sin2α + sin2β + sin2γ = 2sin(α + β)cos(α – β) – cos(α + β) =
2sin(180° – (α + β))·2sinαsinβ = 4sinαsinβsinγ.

1999. november mo.

1. Mindkét egyenletet rendezzük nullára, majd alakítsunk szorzattá.

$$(x-y)(x^2+xy+y^2-21)=0, (x+y)(x^2-xy+y^2-13)=0.$$

Ez az egyenletrendszer ekvivalens a következő *négy* egyenletrendszerrel:

(I) $x-y=0, x+y=0$;(II) $x-y=0, x^2-xy+y^2=13$;(III) $x^2+xy+y^2=21, x+y=0$;(IV) x^2+xy +

Ezek megoldásai egyben az adott egyenletrendszer megoldásai is.
(I): $x_1=0$, $y_1=0$;
(II): $x_2=\sqrt{13}$, $y_2=\sqrt{13}$; $x_3=-\sqrt{13}$, $y_3=-\sqrt{13}$;
(III): $x_4=\sqrt{21}$, $y_4=-\sqrt{21}$; $x_5=-\sqrt{21}$, $y_5=\sqrt{21}$;
(IV): $x_6=1$, $y_6=4$; $x_7=4$, $y_7=1$; $x_8=-1$, $y_8=-4$; $x_9=-4$, $y_9=-1$.

2. *a*) Mivel

$$\sin(\alpha+\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\quad \text{továbbá}\quad \sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

és

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=(-2)\sin\alpha\cdot\sin\beta,$$

azért a feltételellel ekvivalens a következő egyenlet:

$$\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}=0.$$

A megoldások: $\alpha+\beta=2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$; $\alpha=2n\pi$, $\beta\in\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{Z}$ vagy $\alpha\in\mathbf{R}$, $\beta=2m\pi$, $m\in\mathbf{Z}$.

b) A megoldások: $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ vagy $x=2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

3. Az igazolást vektorok alkalmazásával végezzük. Felhasználjuk, hogy egy vektornak önmagával való skaláris szorzata megegyezik a vektor hosszának négyzetével, azaz $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}^2=|\mathbf{x}|^2$.

Legyen az $ABCD$ négyszög D csúcsa az origó, $\overrightarrow{DA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{DB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{DC}=\mathbf{c}$. Ekkor $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}-\mathbf{a}$, $\overrightarrow{CB}=\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\overrightarrow{BA}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

Ezzel a jelöléssel az $ABCD$ négyszög pontosan akkor paralelogramma, ha $\mathbf{b}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$.

Ha az $ABCD$ négyszög paralelogramma, akkor $\mathbf{b}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$. Az oldalak négyzetének összege ekkor valóban megegyezik az átlók négyzetének összegével, hiszen

$$DA^2+AB^2+BC^2+CD^2=2\mathbf{a}^2+2\mathbf{c}^2,$$

az átlók négyzetének összegének összege pedig

$$DB^2+CA^2=\mathbf{b}^2+(\mathbf{a}-\mathbf{c})^2=(\mathbf{a}+\mathbf{c})^2+(\mathbf{a}-\mathbf{c})^2=2\mathbf{a}^2+2\mathbf{c}^2.$$

Ha az oldalak négyzetének összege megegyezik az átlók négyzetének összegével, akkor

$$\mathbf{a}^2+(\mathbf{b}-\mathbf{a})^2+(\mathbf{c}-\mathbf{b})^2+\mathbf{c}^2=\mathbf{b}^2+(\mathbf{a}-\mathbf{c})^2,$$

ahonnan

$$\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2-2\mathbf{ab}-2\mathbf{bc}+2\mathbf{ac}=0,$$
$$(\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b})^2=0,$$

ami csak úgy lehetséges, ha $\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b}=\mathbf{0}$, azaz $\mathbf{b}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$, tehát a négyszög valóban paralelogramma.

4. Felhasználjuk, hogy ha $A>0$, $B>0$, akkor $A+B\geq 2\sqrt{AB}$, és az egyenlőség pontosan $A=B$ esetén teljesül. Azonos átalakításokkal

$$\frac{x^2+4}{x+4}=\frac{x^2-16+20}{x+4}=x-4+\frac{20}{x+4}=-8+\left(x+4+\frac{20}{x+4}\right)\geq -8+2\sqrt{20}=4\sqrt{5}-8,$$

hiszen $x+4>0$.

A függvény legkisebb értéke $4\sqrt{5}-8$, amit akkor vesz fel, ha $x+4=\dfrac{20}{x+4}$ (és $x+4>0$), azaz ha $x=2\sqrt{5}-4$.

Rábai Imre

2000. január mo.

1. Ha az x_0 szám közös gyöke az $f(x)=0$ és a $g(x)=0$ egyenleteknek, akkor minden A, B valós számra gyöke az $Af(x)+Bg(x)=0$ egyenletnek is, hiszen $f(x_0)=0$ és $g(x_0)=0$, tehát $Af(x_0)+Bg(x_0)=0$. Mivel az egyenleteknek két közös gyöke van, azért ezek a gyökök közös megoldásai az

$$(x^3+bx-12)-(x^3-ax^2+18)=0 \quad \text{és a} \quad 2(x^3-ax^2+18)+3(x^3+bx-12)=0,$$
$$ax^2+bx-30=0, \qquad x(5x^2-2ax+3b)=0$$

egyenleteknek is.

Az $a=0$ nem lehetséges, hiszen akkor nem volna két közös gyök. Az $x=0$ egyik egyenletnek sem gyöke. Így

$$x^2+\frac{b}{a}x-\frac{30}{a}\equiv x^2-\frac{2}{5}ax+\frac{3b}{5},$$

ahonnan $\frac{b}{a}=-\frac{2}{5}a$ és $-\frac{30}{a}=\frac{3b}{5}$, tehát $a=5$, $b=-10$, a közös gyökök az $x^2-2x-6=0$ egyenlet gyökei, $x_1=1+\sqrt{7}$, $x_2=1-\sqrt{7}$.

A harmadik gyökök $x_3=3$, illetve $x_4=-2$, hiszen $\frac{x^3-5x^2+18}{x^2-2x-6}=x-3$ és $\frac{x^3-10x+12}{x^2-2x-6}=x+2$.

2. Jelölje T a háromszög területét. Ekkor $\sin\alpha=\frac{2T}{bc}$, $\sin\beta=\frac{2T}{ca}$, $\sin\gamma=\frac{2T}{ab}$ és

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{2T}{bc}}=\frac{b^2+c^2-a^2}{4T},$$
$$\operatorname{ctg}\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{4T}, \qquad \operatorname{ctg}\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{4T},$$

tehát $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=2T\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$ és

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=\frac{1}{4T}(b^2+c^2-a^2+a^2+c^2-b^2+a^2+b^2-c^2)=\frac{1}{4T}(a^2+b^2+c^2).$$

Ezekből következik az állítás.

3. Az $x>0$, $xa^2\neq 1$ és az $\frac{x}{\sqrt{a}}\neq 1$ feltételeknek teljesülnie kell. Ha $a=1$, akkor

$$\log_x x^3+\log_x\sqrt{x}\equiv 3+\frac{1}{2}>2,$$

tehát ekkor minden $x>0$, $x\neq 1$ szám megoldás. Ha $a\neq 1$ ($a>0$), akkor azonos átalakításokkal, majd rendezéssel

$$\frac{3\log_a x}{2+\log_a x}+\frac{\frac{1}{2}\log_a x}{\log_a x-\frac{1}{2}}-2>0,$$

$$\frac{\frac{3}{2}(\log_a x - 1)\left(\log_a x - \frac{4}{3}\right)}{(\log_a x + 2)\left(\log_a x - \frac{1}{2}\right)} > 0.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $\log_a x < -2$ vagy $\frac{1}{2} < \log_a x < 1$ vagy $\log_a x > \frac{4}{3}$.

Ha $a > 1$, akkor a megoldások: $0 < x < \frac{1}{a^2}$ vagy $\sqrt{a} < x < a$ vagy $x > a^{\frac{4}{3}}$;

ha $0 < a < 1$, akkor a megoldások: $x > \frac{1}{a^2}$ vagy $a < x < \sqrt{a}$ vagy $0 < x < a^{\frac{4}{3}}$.

4. *a)* Ismeretes, hogy $4s_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$, $4s_b^2 = 2(a^2 + c^2) - b^2$ és $4s_c^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2$.

Ha $2b^2 = a^2 + c^2$, akkor egyrészt $2s_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{2} = \frac{3b^2}{2}$, másrészt

$$s_a^2 + s_c^2 = \frac{1}{4}\left((2b^2 + 2c^2 - a^2) + (2a^2 + 2b^2 - c^2)\right) = \frac{1}{4}(4b^2 + a^2 + c^2) = \frac{1}{4}\cdot 6b^2 = \frac{3b^2}{2},$$

így valóban $2s_b^2 = s_a^2 + s_c^2$.

Megfordítva, ha $2s_b^2 = s_a^2 + s_c^2$, akkor $\frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{2} = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2)$, ahonnan $2b^2 = a^2 + c^2$.

b) Ha $a \geq b \geq c$, akkor $s_c \geq s_b \geq s_a$.

Ismeretes, hogy ha az ABC háromszög területe T_1, a súlyvonalakból mint oldalakból alkotott háromszög területe T_2 területegység, akkor $\frac{T_2}{T_1} = \frac{3}{4}$.

Ha a két háromszög hasonló, akkor $\frac{T_2}{T_1} = \frac{s_a^2}{c^2} = \frac{s_b^2}{b^2} = \frac{s_c^2}{a^2} = \frac{3}{4}$, tehát $\frac{s_a^2}{c^2} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4c^2} = \frac{3}{4}$, ahonnan $2b^2 = a^2 + c^2$.

Ha $2b^2 = a^2 + c^2$, akkor $\frac{s_a^2}{c^2} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4c^2} = \frac{3c^2}{4c^4} = \frac{3}{4}$, azaz $\frac{s_a}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hasonlóan $\frac{s_b}{b} = \frac{s_c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tehát a két háromszög hasonló.

Rábai Imre

70