Mérőlapok

Édesapám családja asztalosdinasztia volt, édesanyám apja kereskedő volt. Nálunk nem volt könyvtár, de már az alsó osztályokban kiderült, hogy nekem van érzékem a matematikához. Az elemi után gimnáziumba mentem (akkoriban csak nyolcosztályos gimnázium volt). A szegedi Klauzál Gábor Gimnáziumba jelentkeztem, amit ma Radnóti Miklós Gimnáziumnak hívnak. Simon Elemér tanár úr tanított, aki rögtön az elején több felmérést íratott, hogy lássa, mit hoztunk az elemiből, és talán az egyik legjobb voltam. Az első szülői értekezleten azt mondta az édesanyámnak, hogy lehet, hogy ebből a gyerekből mennyiségtantanár lesz. (Akkor nem használták a „matematika" szót, „mennyiségtan" szerepelt a bizonyítványban is.) Valóban az lettem. Így indult.

Simon Elemér tanár úrral később is tartottam a kapcsolatot. A Műegyetemen egy szóbeli felvételin egy tanuló igen jól szerepelt. Megkérdeztem tőle, ki a matematikatanára. Ő nem a tanárát, hanem a felvételire előkészítő tanárát említette. Ő Simon Elemér tanár úr volt, aki Szombathelyen tanított. A Szombathelyen megrendezett Rátz László Vándorgyűlésen tartott előadásomhoz készített jegyzetet Simon Elemér tanár úr emlékére ajánlottam. Ő akkoriban hunyt el, a feleségét felkerestem, és örömmel tapasztaltam, hogy a tanár úr könyvtárában a neki dedikált könyvem megtalálható volt. [...]

Ebben az időszakban indítottam el a TIT-ben az egyetemi tematikatanulásra felkészítő tanfolyamokat. Nem az egyetemi felvételire, hanem az egyetemi tanulásra felkészítőt. Ez két nagyon különböző dolog. Kétféle országos tanfolyamot vezettem, az egyik a Matematika Otthon, ez egy levelezés volt. Kiküldtem feladatsorokat, és a megoldásokat levélben küldték vissza. Mivel sok vidéki jelentkező volt, ez látszott jó megoldásnak.

A Műszaki Egyetemen én voltam a FEB-nek (a Felvételi Előkészítő Bizottságnak) a matematikai felelőse. Eredetileg a Műszaki egyetemi előkészítőkre készítettem el a Matematikai leveleket, amit nagyon sokan használtak, nem csak a műegyetemekre jelentkezők. Ez kétszer tizenhat levél volt.

1977-78-ban *Készüljünk együtt a felvételire!* címmel a *Magyar Ifjúság* című újságban is elindítottam egy sorozatot, azóta mások is csináltak hasonló egyetemi előkészítő sorozatot újságokban. A *Készüljünk együtt a felvételire!* sorozatban volt egy szóbeli fiktív felvételi sorozat is. A szóbeli felvételi sorozat összeállításában volt némi gyakorlatom, ugyanis a gépészkaron kétszer állítottam össze szóbeli felvételi sorozatot. Szokták kérdezni, hogy milyen feladatokat érdemes szóbelire adni. Szerintem semmiképpen sem szabad nehéz feladatokat. Azok a jó feladatok, amelyek alkalmat teremtenek arra, hogy elkezdhessünk a felvételizővel beszélgetni. Emlékszem, egyszer föladtam egy könnyűnek tűnő feladatot, és odajött egy kolléganőm, és megkérdezte: „Imre, hogy lehet ilyen pimf (emlékszem, így fejezte ki a nagyon könnyűt) feladatot adni?" Akkor megkérdeztem: „Te hogy oldanád meg?" Megoldotta. Erre mondtam neki: „Látod, ez a közepes." Most jövök én, még kérdezek, és ha ezt is megoldja, akkor négyes, és akkor még tovább kérdezek, hogy eljuthassunk a feladat teljes megoldásához.

A *Középiskolai Matematikai Lapok*ban 1979-ben indult a *Mérőlapok felvételire* rovat. 25 éven keresztül jelentek meg itt próbafelvételi feladataim. A feladatok között mindig volt olyan, amivel valamit meg lehetett tanítani.

Néhány évtizeden keresztül nagyon sok tanárhoz, diákhoz eljutottak a gondolataim. Úgy hiszem, sok tanárnak, diáknak segítettem. De még mindig van mondanivalóm. Talán még ezek egy részét is közzé tudom tenni. [...]

(Részletek *A matematikatanítás mestersége, Gondolat Kiadó, 2007.* c. könyvből.)

Mérőlap felvételire készülőknek

*Simon Elemér tanár úr emlékére**

1. a) Egy mértani sorozat első tagja 2, az első n tag összege 16, az első n tag reciprokainak összege 4. Írja fel a sorozat első n tagját.

b) Egy mértani sorozat első tagja $\frac{1}{2}$, az első n tag összege 20, az első n tag reciprokainak összege $\frac{80}{27}$. Írja fel a sorozat első n tagját.

2. Egy háromszög oldalainak hossza $a = 6{,}8$, $b = 22{,}1$, $c = 25{,}5$ egység. Számítsa ki a háromszög

a) területét; b) köré írható körének sugarát; c) beírt körének sugarát.

3. Oldja meg a valós számhármasok halmazán ($\mathbf{R}^3$) a következő egyenletrendszert:
$x + y = 2z^2,\quad y + z = 2x^2,\quad z + x = 2y^2.$

4. Bizonyítsa be, hogy ha egy háromszög oldalai a, b és c, a velük szemközti szögek pedig rendre α, β és γ, akkor

$$a^2 + b^2 - (\sqrt{6} + \sqrt{2})\, ab \cos(\gamma + 75°) = b^2 + c^2 - (\sqrt{6} + \sqrt{2})\, bc \cos(\alpha + 75°).$$

Írjon fel c, a és β függvényeként egy, az előző két kifejezéssel egyenlő kifejezést.

5. Tekintsük az $1 < x < 64$ valós számokra értelmezett

$$x \mapsto f(x) = (\log_2 x)^4 + 12(\log_2 x)^2 \cdot \log_2 \frac{8}{x}$$

függvényt. Állapítsa meg a függvény legnagyobb értékét! Mely x helyen veszi fel a függvény ezt a legnagyobb értéket?

6. Az év elején 100 000 Ft hitelt vettünk fel egy banktól hat hónapra. A visszafizetés hat részletben, az első hónap végétől kezdve minden hónap végén történik. A bank az első három hónapban havi 2,5%-os, a következő három hónapban havi 2%-os kamatot számolt fel. A havi törlesztőrészlet az első három hónapban egyenlő. A második három hónapban is megegyeznek a törlesztőrészletek, de ezek kétszer akkorák, mint az első három hónapban. Számítsa ki a törlesztőrészleteket.

7. Egy rombusz két oldalegyenesének egyenlete $x - y - 7 = 0$, illetve $x + 7y - 31 = 0$. Írja fel a rombuszba írható kör egyenletét, ha a kör sugara $\rho = 2\sqrt{2}$ egység.

8. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\sqrt{x^2 + x + \frac{p^2}{(x-1)^2}} = x - \frac{p}{x-1}$$

egyenletet, ahol p valós paraméter. A p mely értékénél van az egyenletnek két különböző megoldása?

**Simon Elemér a szerző matematikatanára volt a szegedi Klauzál Gábor Gimnáziumban. (1936-40)*

Rábai Imre

MÉRŐLAP-FELADATOK ÉS MEGOLDÁSI MÓDSZEREK

HAJNAL IMRE
tanár úr
(barátom)
emlékére

Bevezető feladatok

1. Egy paralelogramma két oldalának hossza 3, illetve 1 egység, az átlók által bezárt szög 45°. Számítsa ki a paralelogramma területét!

2. Az $ABCD$ négyszögben az A és a B csúcsoknál fekvő szögek derékszögek, $AD = 15$, $BC = 24$ egység. A CD oldal felező merőlegese az AB oldal egyenesét az E pontban metszi, $AE = 20$ egység. Számítsa ki az AB és CD oldal hosszát!

3. Egy trapéz egyik párhuzamos oldalának hossza 20 egység, a két szár hossza 13, illetve 15 egység, a trapéz magassága 12 egység. Számítsa ki a trapéz területét!

4. a) Oldja meg az

$$|\lg(x-1)+\lg(4-x^2)| = |\lg(x-1)| + |\lg(4-x^2)|$$

egyenletet a valós számok halmazán!

b) Indokolja a következő állításokat!
(1) $|a+b| = |a| + |b|$ pontosan akkor, ha $ab \geq 0$;
(2) $|a+b| < |a| + |b|$ pontosan akkor, ha $ab < 0$;
Mikor teljesül az $|a+b| > |a| + |b|$ egyenlőtlenség?

c) Oldja meg az

$$|\lg(x-1)+\lg(4-x^2)| < |\lg(x-1)| + |\lg(4-x^2)|$$

egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

I.

1. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} 2x + 1.$$

1. a. $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} x - 1$;
1. b. $\operatorname{tg}\left(x+\frac{3\pi}{4}\right) = 1 + \operatorname{ctg} x$;
1. c. $\operatorname{tg} 2x + 3\operatorname{ctg} x = 0$. (felvételi feladat)

2. Melyik az a másodfokú egyenlet, amelyben a másodfokú tag együtthatója 1, az egyenlet egyik gyöke 2, a másik gyöke egyenlő az egyenlet diszkriminánsával?

2. a. $ax^2+bx+c=0$, $a=1$, $b=?$, $c=?$, $x_1=3$, $x_2=2D$, ahol D az egyenlet diszkriminánsa;
2. b. $ax^2+bx+c=0$, $a=1$, $b=?$, $c=?$, $x_1=1$, $x_2=D$. (felvételi feladat)

3. Az $x^2+2px+2q=0$ és az $x^2-2px+6q=0$ egyenleteknek van közös gyöke. Tudjuk, hogy az $p^2-2q=9$. Számítsa ki p és q értékét!

3. a. Az $x^2+px-q=0$ egyenlet egyik gyökének kétszerese az $x^2-3px+q=0$ egyenlet gyöke. Számítsa ki p és q értékét, ha $p^2+4q=36$!

Eger

3. b. Az $x^2 + px + q = 0$ és az $x^2 - 2px - q = 0$ egyenleteknek van közös gyöke. Tudjuk, hogy $p^2 - 4q = 64$. Számítsa ki p és q értékét! (felvételi feladat)

4. Oldja meg az

$$(a-4)\cdot 2^x + a\cdot 2^{-x} = 2a$$

egyenletet, ahol a valós paraméter!

4. a. $(a-9)\cdot 3^x + a\cdot 3^x = 2a$;

4. b. $(a-1)\cdot 10^x + a\cdot 10^{-x} = 2a$. (felvételi feladat)

5. Egy háromszög oldalai a, b, c, ezekkel szemközti szögei rendre α, β, γ. Számítsa ki közelítő értékek alkalmazása nélkül $\sin\beta$ **pontos** értékét, ha $3b = 2(a+c)$ és $\gamma - \alpha = 60°$!

5. a. $2b = a + c$ és $\gamma - \alpha = 90°$;

5. b. $2b = a + c$ és $\gamma - \alpha = 60°$. (felvételi feladat)

6. Bizonyítsa be, hogy ha egy háromszög oldalai a, b és c, a velük szemközti szögek rendre α, β, γ, akkor $a^2 + b^2 - ab\sqrt{2}\cos(\gamma + 45°) = b^2 + c^2 - bc\sqrt{2}\cos(\alpha + 45°) = c^2 + a^2 - ca\sqrt{2}\cos(\beta + 45°)$!

6. a. $a^2 + b^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}ab\cos(\gamma + 30°) = b^2 + c^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}bc\cos(\alpha + 30°) = c^2 + a^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}ac\cos(\beta + 30°)$;

6. b. $a^2+b^2-2ab\cos(\gamma+60°) = b^2+c^2-2bc\cos(\alpha+60°) = c^2+a^2-2ac\cos(\beta+60°)$; (felvételi feladat)

6. c. $a^2 + b^2 - (\sqrt{6} + \sqrt{2})ab\cos(\gamma + 75°) = b^2 + c^2 - (\sqrt{6} + \sqrt{2})bc\cos(\alpha + 75°) =$
$= c^2 + a^2 - (\sqrt{6} + \sqrt{2})ca\cos(\beta + 75°)$.

7. Bizonyítsa be, hogy ha $\sin(\alpha - \beta) = 0$, akkor $\sin(2\beta - \alpha) = \sin\alpha$! Igaz-e az állítás megfordítása?

7. a. Ha $\sin(\alpha + \beta) = 0$, akkor $\cos(\alpha + 2\beta) = \cos\alpha$.

7. b. Ha $\cos(\alpha + \beta) = 0$, akkor $\sin(\alpha + 2\beta) = \sin\alpha$. (felvételi feladat)

8. Egy mértani sorozat első harmadik és ötödik tagjának összege 63. A negyedik és a második tag különbsége a hányados kilencszerese. Számítsa ki a sorozat első tagját és hányadosát!

8. a. $a_1 + a_3 + a_5 = 182$, $a_2 + a_4 = 20q$, $a_1 = ?$, $q = ?$ (felvételi feladat)

8. b. Egy mértani sorozat első négy tagjának összege 16 és $2(a_4 - a_1) = 7(a_3 - a_2)$. Számítsa ki a sorozat első tagját és hányadosát!

8. c. Egy mértani sorozatban $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 22$ és $7(a_2 + a_3) + 2(a_1 + a_4) = 0$, $a_1 = ?$, $q = ?$

9. I. Egy mértani sorozat első tagja 2, az első n tag összege 16, az első n tag reciprokainak összege 4. Írja fel a sorozat első n tagját!

II. Egy mértani sorozat első tagja $\frac{1}{2}$, az első n tag összege 20, az első n tag reciprokainak összege $\frac{80}{27}$. Írja fel a sorozat első n tagját!

9. a. Egy mértani sorozat első tagja 3, az első n tag összege 93, az első n tag reciprokainak összege $\frac{31}{48}$. Adja meg a sorozat első n tagját! (felvételi feladat)

9. b. Egy pozitív számokból álló mértani sorozat első n tagjának összege S, az első n tag reciprokainak összege R. Fejezze ki az első n tag szorzatát az S-sel, R-rel és n-nel! (felvételi feladat)

9. c. Egy mértani sorozat első tagja 3, az n-edik tagja 13, az első n tag reciprokainak összege 8. Számítsa ki az első n tag összegét! (felvételi feladat)

10. Vegyük az első n pozitív, hárommal osztva 2 maradékot adó egész szám összegét, és osszuk el az első n pozitív, 4-gyel osztva 1 maradékot adó egész szám összegével. Mekkora az n, ha a hányados $\frac{26}{33}$?

10. a. Vegyük az első n pozitív, hárommal osztva 1 maradékot adó egész szám összegét, és osszuk el az első n pozitív, 4-gyel osztva 3 maradékot adó egész szám összegével. Mekkora az n, ha a hányados $\frac{5}{7}$?

10. b. Mekkora az n, ha az első n pozitív páros szám összegének és az első n pozitív páratlan szám összegének a hányados $\frac{21}{20}$? (felvételi feladat)

II.

1. Oldja meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletet!

a) $x^2 + 4x\cos xy + 4 = 0$; b) $4\sin^2 x - 4\cos x \cdot \sin y - 5 = 0$.

1. a. $x + \frac{4}{x} = 4\sin y$; **1. b.** $2\sin^2 \frac{y + x^2}{3} = 3^x + 3^{-x}$;

1. c. $\log_2\left(\cos^2(xy) + \frac{1}{\cos^2(xy)}\right) = \frac{2}{y^2 - 4y + 6}$; **1. d.** $x^2 + 2x\sin xy + 1 = 0$;

1. e. $2\cos^2 \frac{x^2 + 3y}{6} = 3^x + 3^{-x}$; **1. f.** $\log_2\left(\sin^2(xy) + \frac{1}{\sin^2(xy)}\right) = \frac{2}{y^2 - 2y + 2}$.

(felvételi feladatok)

2. Az ABC háromszögben a B csúcsnál levő szög az A csúcsnál levő szög kétszerese. A BC oldal háromszorosa egyenlő az AC oldal kétszeresével. A háromszög területének mérőszáma a C csúcsnál levő szög szinuszának 12-szerese. Számítsa ki a háromszög oldalait!

2. a. Egy háromszög két szöge: $\beta = 50°$ és $\gamma = 100°$; a velük szemközti oldalak b, illetve c; a háromszög harmadik oldala a. Bizonyítsa be, hogy $ab = c^2 - b^2$! (felvételi feladat)

2. b. Az ABC háromszögben az a csúcsnál levő szög a B csúcsnál levő szög kétszerese, továbbá a BC oldal kétszerese egyenlő az AC oldal háromszorosával; a háromszög területének mérőszáma pedig a C csúcsnál levő szög szinuszának 27-szerese. Számítsa ki a háromszög oldalait! (felvételi feladat)

3. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az $A(3; 6)$ ponton, és egyenlő távolságra van a $P(-1; 3)$ és a $Q(11; -3)$ pontoktól!

3. a. $A(1; 8)$, $P(-3; 5)$, $Q(9; -1)$. (felvételi feladat)

3. b. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az $A(4; 7)$ ponton, és a $P(-5; 4)$, illetve a $Q(5; 1)$ pontoktól való távolságának aránya $3:2$!

4. Írja fel annak a $P(-1; 4)$ ponton átmenő egyenesnek az egyenletét, amelynek az $x - 3y = -1$ egyenletű e és a $3x + y = -3$ egyenletű f egyenesek közé eső szakaszát a P pont az e egyenestől számítva $3:2$ arányban osztja!

4. a. Írja fel annak a $P(4; 1)$ ponton áthaladó egyenesnek az egyenletét, amelynek az $x - y = -1$ egyenletű e és az $x + 2y = 11$ egyenletű f egyenesek közé eső szakaszának a P az egyik harmadoló pontja. Melyik a másik harmadoló pont?

4. b. Írja fel annak a $P(2; 1)$ ponton áthaladó egyenesnek az egyenletét, amelynek az $x - y = 2$ egyenletű e és az $x + 2y = 14$ egyenletű f egyenesek közé eső szakaszát a P pont felezi!

5. Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(0; 16)$, $B(0; 0)$, $C(3; 0)$. Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(-6; 0)$ ponton, és két egyenlő területű részre osztja az ABC háromszöget!

5. a. Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges a $2x + y = 20$ egyenletű egyenesre, és felezi az adott egyenes és a koordinátatengelyek által határolt háromszög területét!

5. b. Egy háromszög csúcspontjai $A(0; 0)$, $B(2; 6)$, $C(2; 2)$. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely felezi az ABC háromszög területét, és párhuzamos az x-tengellyel!

5. c. Az $x + y = 30$ egyenletű egyenesnek az x- és y-tengellyel való metszéspontjait jelölje A, illetve B, és legyen az origó O. Írja fel annak az e egyenesnek az egyenletét, amelyik párhuzamos az $x - 3y = 6$ egyenletű egyenessel, metszi az OB szakaszt a C, az AB szakaszt a D pontban, és amelyre az $OADC$ négyszög területe 234 egység! (felvételi feladat)

6. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely az x-tengelyt az origóban érinti, és érinti az $y = x + 4$ egyenletű egyenest is!

6. a. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti az x-tengelyt és a $3x + 4y = 63$ egyenletű egyenest a 9 ordinátájú pontjában!

6. b. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti az x-tengelyt és az $(x - 12)^2 + (y - 13)^2 = 25$ egyenletű kört a 9 ordinátájú pontjában!

7. Az $(x - 4)^2 + (y - 8)^2 = 32$ egyenletű körből az origón áthaladó e egyenes 8 egység hosszú húrt metsz ki. Írja fel az e egyenes egyenletét, és számítsa ki a húr végpontjainak koordinátáit!

7. a. Az $(x - 5)^2 + (y + 10)^2 = 50$ egyenletű körből az origón áthaladó e egyenes 10 egység hosszú húrt metsz ki. Írja fel az e egyenes egyenletét, és számítsa ki a kimetszett húr végpontjainak koordinátáit!

8. Állapítsa meg, hogy a következő kifejezés mely valós x értékekre értelmezhető! Van-e legnagyobb és legkisebb értéke; ha van, mivel egyenlő, és mely x helyen veszi fel?

$$2^{2|x+1|-|x-2|-8}$$

8. a. $\lg\left(8 + |x - 2| - 2|x + 1|\right)$

8. b. $\sqrt{8 + |x - 2| - 2|x + 1|}$.

9. Az ABC háromszög oldalai $AB = 13$, $AC = 15$, $BC = 14$ egység. Az A ponton áthaladó magasságon vegyünk fel egy P ponton át a BC oldallal párhuzamosan húzott e egyenes az AB oldalt az E, az AC oldalt az F pontban metszi. Az e egyenesen, a háromszögön kívül, a PE, illetve PF félegyenesen vegyük fel a B', illetve a C' pontokat úgy, hogy $EB' = EA$ és $FC' = FA$ teljesüljön. Milyen távol van a P pont az A ponttól, ha a $BCC'B'$ trapéz területe a legnagyobb?

9. a. Legyen az ABC háromszög kerülete $2s = 24$ egység. Húzza meg a beírt kör körének az oldalakkal párhuzamos érintőit! Ezen érintőknek a háromszögön belül eső szakaszai közül válassza ki a legnagyobbat! Mely ABC háromszög esetén lesz ez az érintő szakasz a lehető legnagyobb?

9. b. Milyen határok között mozog $p - q$ értéke, ha p és q olyan valós számok, hogy az $x^2 - px + q = 0$ egyenletnek valós gyökei vannak, és az egyenlet gyökeire fennáll az $x_1^2 + x_2^2 = 2$ összefüggés?

9. c. Egy 8 egység sugarú, 16 egység magasságú forgáskúpba forgáshengert helyezünk el úgy, hogy a henger tengelyének egyenese egybeessen a kúp tengelyével, alaplapja a kúp alaplapjára, fedőlapja kerületköre a kúp palástjára essen. Mekkora a hengerpalást felszínének a maximuma?

9. d. Az e és f párhuzamos egyenesek távolsága $4\sqrt{2}$ egység. Az e egyenesen vegyük fel az A és B pontokat úgy, hogy $AB = 3\sqrt{2}$ egység legyen. Az f egyenesen vegyünk fel egy C pontot. Legyen P az AC szakasz egy pontja; a BP egyenes D pontban metszi az f egyenest. Az e egyenestől mekkora távolságra fekszik a P pont, ha az ABP és a PCD háromszögek területének összege a lehető legkisebb? Mekkora ez a legkisebb terület?

10. Határozza meg az m paraméternek mindazokat az értékeit, amelyekkel a $p(x) = x^2 - 4mx + 4m^2 - 4m + 2$ (pontosan) másodfokú polinomfüggvény a $[0; 2]$ intervallumban felvett legkisebb értéke 4!

10. a. Tekintsük a $p(x) = mx^2 - (5m + 1)x + 5$ (legfeljebb) másodfokú polinomfüggvényt, ahol m valós paraméter. Az m értékétől függően mikor vesz fel a $]2; 4[$ (nyitott) intervallumban $p(x)$ csak pozitív és mikor csak negatív értékeket?

10. b. Tekintse az $x \mapsto (1 - p)x^2 - 2(2p + 1)x - 4p - 1$ függvényt, ahol x bármely valós szám és p valós paraméter. Határozza meg a p értékét úgy, hogy a függvény legnagyobb helyettesítési értéke 8 legyen!

SOPRON
1996

BEVEZETŐ FELADATOK

FARAGÓ LÁSZLÓ
matematika-módszertani
munkásságának emlékére

1. Oldja meg az

$$\frac{x-2}{4}=\frac{x^2-4}{2x^2-x-10}$$

egyenletet a valós számok halmazán!

2. Számítsa ki a következő kifejezések pontos értékét!

a) $\left(\frac{5\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\sqrt{15}\right):\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$; **b)** $9\cdot(0{,}027)^{-\frac{1}{3}}\cdot 25^0\cdot 9^{\frac{3}{2}}$;

c) $\log_{\sqrt{3}} 27\sqrt{3}$; **d)** $3^{\log_{\frac{1}{9}} 3}$; **e)** $(1-\sin 75^\circ)\,(1+\cos 15^\circ)$.

3. Mekkorák az oldalai annak a paralelogrammának, amelynek kerülete 96 egység, a magasságok aránya pedig $7:5$. E paralelogrammák közül melyiknek legnagyobb a területe?

4. Oldja meg a következő egyenletet és egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $4^x+2^{x+1}=80$; **b)** $4^x+2^{x+1}>80$; **c)** $4^x+2^{x+1}<80$.

5. Igazolja, hogy az $(a-x)(c-x)=b^2$ egyenletnek minden valós a, b, c paraméter esetén van valós megoldása!

6. Határozza meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, ahol értelmezhetők a következő kifejezések!

a) $\sqrt{2x^2-7x-4}$; **b)** $\lg\left(4+7x-2x^2\right)$; **c)** $\sqrt[4]{2\cos^2 x+7\sin x+2}$.

7. Egy háromszög oldalai a, b és c. Számítsa ki az a oldallal szemközti szöget, ha

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{bc}=1\,!$$

8. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely az x tengelyt az origóban érinti, és érinti az $y=x+4$ egyenletű egyenest is!

SOPRON **MÉRŐLAP FELVÉTELIRE**

1996

1. Egy húrtrapéz átlóinak hossza 16 egység, a száraknak hossza megegyezik a köré írható kör sugarával. Számítsa ki a trapéz területét!

2. A k valós paraméter mely értékeire van két különböző előjelű valós gyöke az

$$x^2 + 2(2k - 3)x + k^2 - 9k - 112 = 0$$

egyenletnek?

3. Számítsa ki $\sin x$ és $\cos x$ pontos értékét, ha

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 2\sqrt{3}!$$

4. Oldja meg a

$$\sqrt{\left(x^2 + 8\right)^2 - 12x^3 - 96x + 36x^2} = p$$

egyenletet a valós számok halmazán, ahol p valós paraméter!

5. Egy trapéz egyik párhuzamos oldalának hossza 60 egység, két szárának hossza 13, illetve 37 egység. Számítsa ki a trapéz területét, ha a trapéz magassága 12 egység.

6. Egy háromszög egyik szöge 75°, a szög csúcsából induló magasságvonal a szemközti oldalt $\sqrt{6}$ és $\sqrt{2}$ egység hosszú részekre osztja. Számítsa ki a háromszög másik két szögét!

7. Írja fel annak a $P(-1; 4)$ ponton átmenő egyenesnek az egyenletét, amelynek az $x - 3y = -1$ egyenletű e és a $3x + y = -3$ egyenletű f egyenesek közé eső szakaszát a P pont az e egyenestől számítva $3:2$ arányban osztja!

8. Az ABC háromszög magasságpontja M. Számítsa ki az AB oldallal szemközti γ szöget, ha $AB = \sqrt{3} \cdot MC$! A γ szög ismeretében igazolja, hogy $AB = \sqrt{3} \cdot MC$!

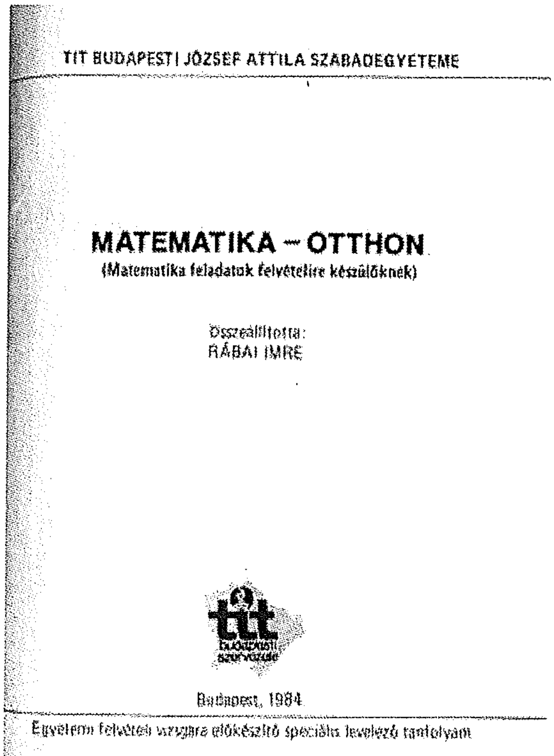
Három felvételi feladat – időben távol egymástól

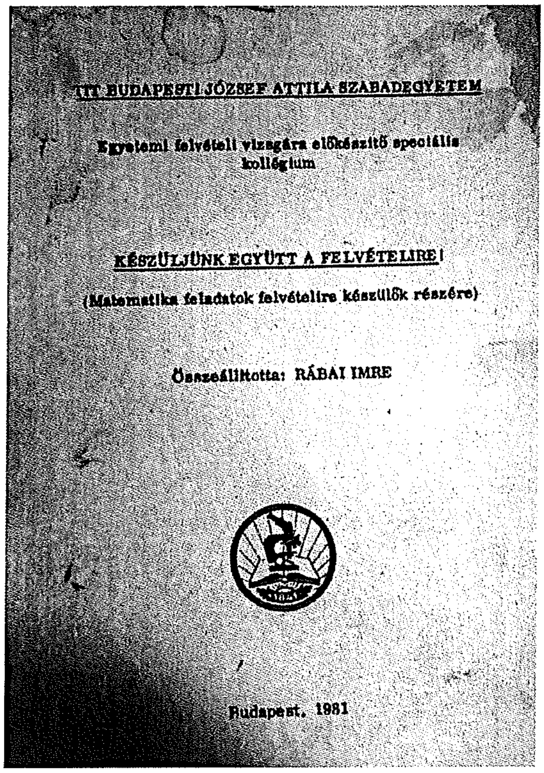
Róka Sándor tanár úrnak a megemlékezéséért

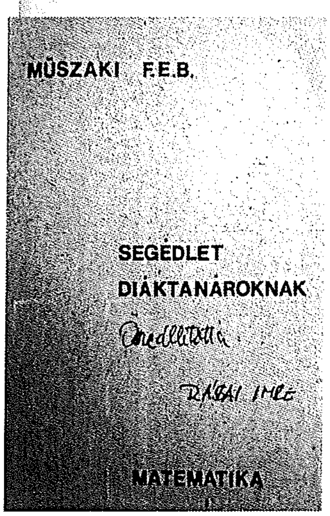
1. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely az y tengelyt az origóban érinti és érinti az $y = x + 1$ egyenletű egyenest is.
Felvételi kb. 1962.

2. A k kör érinti az x tengelyt és a $3x + 4y = 69$ egyenletű e egyenest; a kör és az e egyenes közös pontjának abszcisszája 11. Írja fel a kör egyenletét!
Felvételi 1989.

3. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti az x tengelyt, és a $P(4; 8)$ pontban (…) érinti az $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 100$ egyenletű kört. / (…) = belülről /
Felvételi 1995.







Próbafelvételi feladatok

I.

1. Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} > 3$; b) $\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} > 3$.

2. Az $r = 5$ egység sugarú kör egyik húrja a kör középpontjától $d = 1$ egység távolságra van. Számítsa ki *annak* a húrnak a középponttól való távolságát, amelyhez feleakkora ív tartozik, mint az előző húrhoz!

3. Egy mértani sorozat első, harmadik és ötödik elemének összege 63, a második és a negyedik elem különbsége a sorozat hányadosának 36-szorosa. Számítsa ki a sorozat első elemét és hányadosát!

4. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges a $3x + y = 30$ egyenletű egyenesre és felezi az adott egyenes és a koordinátatengelyek által határolt háromszög területét!

5. Oldja meg a

$$12\log_{4x} 2 - 6\log_{2x} 2 = 1$$

egyenletet a valós számok halmazán!

6. Az ABC háromszögben a B csúcsnál levő szög az A csúcsnál levő szög kétszerese. A BC oldal háromszorosa egyenlő az AC oldal kétszeresével. A háromszög területének mérőszáma a C csúcsnál levő szög szinuszának 12-szerese. Számítsa ki a háromszög oldalait!

7. Az m valós paraméter mely értékeire van megoldása a

$$3\cos 2x - 2m\sin x + 4m^2 - 3 = 0$$

egyenletnek a valós számok halmazán? Oldja meg az egyenletet, ha $4m^2 = 9$!

8. Oldja meg a valós számhármasok halmazán az

$$xy = 4, \qquad x + y = 2 + 2\sin^2 z$$

egyenletrendszert!

II.

1. Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $x^2 - 6|x| - 7 < 0$; b) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \dfrac{27}{64}$.

2. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely átmegy az $A(1; 4)$ ponton és érinti a $2x + y = 2$, illetve a $2x + y = 22$ egyenletű egyeneseket!

3. Az $ABCD$ négyszögben az A és a B csúcsnál fekvő szögek derékszögek. $AD = 3{,}9$ egység, $BC = 5{,}6$ egység. A CD oldal felezőmerőlegese az AB oldal egyenesét az E pontban metszi. $AE = 5{,}2$ egység. Számítsa ki az $ABCD$ négyszög területét!

4. Oldja meg a

$$\sin\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

egyenletet a valós számok halmazán!

5. A bankba tett pénzünk az év első hat hónapjában havi 1,1, a második hat hónapjában pedig havi 0,9 százalékkal kamatozik. Az év első négy hónapjának elején havi 2000, a második négy hónap elején havi 1000 forintot helyezünk el a bankban. Mennyi pénzünk lesz a bankban az év végén?

6. Számítsa ki azokat az $(x; y)$ valós számpárokat, amelyekre az $|x+y|$ kifejezés értéke maximális, ha $x^2 + y^2 = 4$. Számítsa ki a legnagyobb értéket is!

7. Számítsa ki m értékét úgy, hogy a

$$\log_2(4^x + m) = x$$

egyenletnek pontosan egy megoldása legyen! Oldja is meg ezen esetekben az egyenletet!

8. Az $x^2 + px - q = 0$ és az $x^2 - \left(p^2 + 4\right)x + 6 - pq = 0$ egyenlet gyökei valósak. Az utóbbi egyenlet gyökei 3-mal nagyobbak az előbbi egyenlet gyökeinél. Számítsa ki p és q értékét!

Próbafelvételi feladatok I. (megoldások)

1. a) Az egyenlőtlenségnek akkor van értelme, ha $x \geq -1$ és $\sqrt{x+1} \neq 2$, vagyis $x \neq 3$.

Mivel $\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \dfrac{x+1-4}{\sqrt{x+1}-2} = \sqrt{x+1}+2$, ezért $\sqrt{x+1}+2 > 3$, azaz $x > 0$.

A megoldások: $0 < x < 3$ vagy $x > 3$.

b) $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$, $\quad 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$, így

$$\operatorname{tg}^2 x > 3, \quad |\operatorname{tg} x| > \sqrt{3}, \quad \text{azaz } \operatorname{tg} x > \sqrt{3} \text{ vagy } \operatorname{tg} x < -\sqrt{3}.$$

A megoldások: $\dfrac{\pi}{3} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ vagy $\dfrac{\pi}{2} + k\pi < x < \dfrac{2\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

2. Készítsen ábrát! Legyen az O középpontú $r = 5$ egység sugarú kör szóbanforgó húrja AC, felezőpontja F, az AC-re merőleges átmérő BD. A feltétel szerint $OF = 1$ egység.

Az AC húrhoz két ív tartozik. Szimmetria okokból a BC, illetve a DC húrokhoz feleakkora ív tartozik, mint az AC húrhoz. Legyen x, illetve y a BC, illetve CD húrok távolsága a kör középpontjától.

$$CD = 2x, \text{ illetve } BC = 2y.$$

Mivel $DF = 5 - 1 = 4$ egység, $BF = 5 + 1 = 6$ egység és $BD = 10$ egység, ezért a BCD derékszögű háromszögben a befogótétel alkalmazásával $4x^2 = 4 \cdot 10$ és $4y^2 = 6 \cdot 10$, tehát a húrok távolsága a kör középpontjától

$$x = \sqrt{10}, \text{ illetve } y = \sqrt{15} \text{ egység.}$$

3. A feltétel szerint $a_1 + a_1q^2 + a_1q^4 = 63$ és $a_1q - a_1q^3 = 36q$.

A második egyenletből ($q(a_1(1-q^2) - 36) = 0$)

$$q = 0 \text{ vagy } a_1(1-q^2) = 36.$$

Ha $q = 0$, akkor $a_1 = 63$.

Ha $a_1(1-q^2) = 36$, akkor $\dfrac{1+q^2+q^4}{1-q^2} = \dfrac{63}{36}$, ahonnan $q^2 = \dfrac{1}{4}$, innen

$q = \dfrac{1}{2}$ és $a_1 = 48$ vagy $q = -\dfrac{1}{2}$ és $a_1 = 48$.

4. A $3x + y = 30$ egyenletű egyenes az x-tengelyt az $A(10; 0)$, az y-tengelyt a $C(0; 30)$ pontban metszi. Az OAC háromszög területe

$$t = \frac{10 \cdot 30}{2} = 150 \text{ területegység.}$$

A szóbanforgó egyenesre merőleges egyenes egyenletét $y = \dfrac{1}{3}x + b$ alakban kereshetjük (a feltételekből következik, hogy $b > 0$). Ez az y-tengelyt a $B(0; b)$, az adott egyenest a D pontban metszi. A BCD háromszög területe 75 területegység, így

$$75 = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot m,$$

ahol m a D pont x-koordinátája, így

$$30 - 3m = \frac{1}{3}m + b,$$

ahonnan $m = \dfrac{3}{10}(30 - b)$ és $BC = 30 - b$. Így

$$75 = \frac{1}{2} \cdot (30 - b) \cdot \frac{3}{10}(30 - b),$$

ahonnan $(b - 30)^2 = 5 \cdot 100$, $\; b = 30 - 10\sqrt{5}$ vagy $b = 30 + 10\sqrt{5}$.

Ez utóbbi most nem ad megoldást, az előbbi igen. A keresett egyenes egyenlete:

$$y = \frac{1}{3}x + 30 - 10\sqrt{5}.$$

5. Alkalmazzuk az $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1)$ azonosságot, majd $\log_2 x$ helyett írjunk y-t:

$$\frac{12}{\log_2 4x} - \frac{6}{\log_2 2x} = 1,$$

$$\frac{12}{2+y} - \frac{6}{1+y} = 1,$$

ahonnan $y^2 - 3y + 2 = 0$, $y_1 = 1$ vagy $y_2 = 2$.

Ha $\log_2 x = 1$, akkor $x_1 = 2$, ha $\log_2 x = 2$, akkor $x_2 = 4$, s mindkettő megoldása az adott egyenletnek.

6. Legyen $BC = 2x$, s mivel $2AC = 3 \cdot 2x$, ezért $AC = 3x$. Jelölje γ a C csúcsnál levő szöget. A feltétel szerint

$$12\sin\gamma = \frac{2x \cdot 3x \cdot \sin\gamma}{2},$$

ahonnan $x^2 = 4$, $x = 2$ $(x > 0)$, azaz $BC = 4$ és $AC = 6$ egység.

Hosszabbítsuk meg az AB oldalt B-n túl a $BD = 4$ egység hosszú szakasszal. Jelölje α, illetve β az A, illetve a B csúcsnál levő szöget. A feltétel szerint $\beta = 2\alpha$. A BCD háromszögben $BC = BD$, így $BCD\sphericalangle = CDB\sphericalangle = \alpha$. Az ADC háromszög A és D csúcsánál levő szög α, tehát az ADC háromszög egyenlő szárú, $DC = AC = 6$ egység, és hasonló a BCD háromszöghöz, így

$$\frac{AB+4}{6} = \frac{6}{4}, \text{ tehát } AB = 5 \text{ egység.}$$

7. Alkalmazzuk a $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ azonosságot.

$$3\sin^2 x + m\sin x - 2m^2 = 0, \text{ innen } \sin x = -m \text{ vagy } \sin x = \frac{2}{3}m.$$

Az egyenletnek akkor van valós megoldása, ha az $|-m| \leq 1$ és az $\left|\dfrac{2}{3}m\right| \leq 1$ egyenlőtlenségek közül legalább az egyik teljesül, azaz ha $-\dfrac{3}{2} \leq m \leq \dfrac{3}{2}$.

$4m^2 = 9$, ha $m = \dfrac{3}{2}$ vagy $m = -\dfrac{3}{2}$.

Ha $m = \dfrac{3}{2}$, akkor $\sin x = 1$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$,

Ha $m = -\dfrac{3}{2}$, akkor $\sin x = -1$, $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

8. Az első egyenletből adódik, hogy x és y egyező előjelű, a második egyenlet figyelembe vételével x és y egyaránt pozitív. Helyettesítéssel

$$x + \frac{4}{x} = 2 + 2\sin^2 z.$$

Tudjuk, hogy ha $A > 0$ és $B > 0$, akkor $A + B \geq 2\sqrt{AB}$, ahol az egyenlőség $A = B$ esetén teljesül. Ennek alkalmazásával

$$x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4.$$

Mivel $2 + 2\sin^2 z \leq 4$, ezért azok az x és z számok a megoldások, amelyekre $x + \dfrac{4}{x} = 4$, ahonnan $x = 2$ és $2 + 2\sin^2 z = 4$, amiből $\sin^2 z = 1$.
Az egyenletrendszer megoldásai:

$$x = 2,\ y = 2,\ z = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

$\Big($Az $x^2 - \left(2 + 2\sin^2 z\right)x + 4 = 0$, x-re másodfokú egyenlet megoldásával is eredményre juthatunk.$\Big)$

Próbafelvételi feladatok II. (megoldások)

1. a) Mivel $x^2 = |x|^2$, így $|x|^2 - 6|x| - 7 = (|x| + 1)(|x| - 7)$.

$$x^2 - 6|x| - 7 < 0$$

tehát akkor teljesül, ha

$$|x| < 7, \text{ azaz ha } -7 < x < 7.$$

b) $\frac{27}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$. A $\frac{3}{4}$ alapú exponenciális függvény szigorú monoton fogyása miatt

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-x^2+6x+10} < \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$-x^2 + 6x + 10 > 3,$$

azaz ha

$$-1 < x < 7.$$

2. A keresett kör középpontja rajta van az adott két párhuzamos egyenes középpárhuzamos egyenesén, amelynek egyenlete $2x + y = 12$.

A keresett kör átmérője az adott két párhuzamos egyenes távolsága, $2r = 4\sqrt{5}$.

A keresett kör középpontja az $A(1; 4)$ ponttól $r = 2\sqrt{5}$ távolságra van, tehát ha a keresett kör középpontja $K(u; v)$, akkor $2u + v = 12$, $v = 12 - 2u$ és $(1 - u)^2 + (4 - (12 - 2u))^2 = 20$. Innen

$$5u^2 - 34u + 45 = 0, \quad u_1 = 5, u_2 = \frac{9}{5} \text{ és } v_1 = 2, \quad v_2 = \frac{42}{5}.$$

A feltételeknek két kör felel meg. Ezek egyenlete:

$$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 20, \text{ illetve } \left(x - \frac{9}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{42}{5}\right)^2 = 20.$$

3. Készítsünk elemző ábrát! Az $ABCD$ négyszög derékszögű trapéz.

Az ADE derékszögű háromszögben $AD = 3{,}9$, $AE = 5{,}2$ egység, így az átfogó (Pitagorasz-tétellel számolva), $DE = 6{,}5$ egység. Ebből $EC = 6{,}5$.

Jelöljük EB előjeles szakasz hosszát x-szel. Az EBC derékszögű háromszögben

$$x^2 = 6{,}5^2 - 5{,}6^2, \quad x^2 = 3{,}3^2, \text{ tehát } x_1 = 3{,}3 \text{ vagy } x_2 = -3{,}3.$$

Így a trapéz magassága

$$m_1 = AB_1 = 5{,}2 + 3{,}3 = 8{,}5 \text{ vagy } m_2 = AB_2 = 5{,}2 - 3{,}3 = 1{,}9 \text{ egység.}$$

A feltételeknek két trapéz felel meg. Ezek területe:

$$t_1 = \frac{3{,}9 + 5{,}6}{2} \cdot 8{,}5 = 40{,}375 \text{ vagy } t_2 = \frac{3{,}9 + 5{,}6}{2} \cdot 1{,}9 = 9{,}025 \text{ területegység.}$$

4. Mivel $\sin\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(2x - \frac{3\pi}{2} + 2\pi\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ és $2x + \frac{\pi}{2} = 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, ezért az $y = \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ új változót vezethetjük be. Ekkor

$$\sin 2y + \operatorname{tg} y = 0, \text{ ahol } y \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \ n \in \mathbf{Z}.$$

Szorozzuk meg $(\cos y)$-nal az egyenlet mindkét oldalát, majd alakítsunk szorzattá.

$2\sin y \cdot (\cos y)^2 + \sin y = 0$, $(\sin y)\left(2\cos^2 y + 1\right) = 0$, ahonnan

$\sin y = 0$, hiszen $2\cos^2 y + 1 > 0$ minden megengedett y-ra.

$y = k\pi$, $x + \frac{\pi}{4} = k\pi$.

Az egyenlet megoldásai:

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbf{Z}.$$

5. Legyen $q_1 = 1{,}011$ és $q_2 = 1{,}009$. A feltétel szerint az év végére

$P = 1000 \cdot \left(2q_1^6 \cdot q_2^6 + 2q_1^5 \cdot q_2^6 + 2q_1^4 \cdot q_2^6 + 2q_1^3 \cdot q_2^6 + q_1^2 \cdot q_2^6 + q_1 q_2^6 + q_2^6 + q_2^5\right)$ pénzünk lesz.

$$P = 1000 \cdot \left(2q_1^3 \cdot q_2^6 \cdot \frac{q_1^4 - 1}{q_1 - 1} + q_2^6 \cdot \frac{q_1^3 - 1}{q_1 - 1} + q_2^5\right) \approx 13\,115.$$

A bankban az év végére 13 115 forintunk lesz.

$\left(q_1^3 \approx 1{,}033364, \quad \frac{q_1^3 - 1}{q_1 - 1} \approx 3{,}0330909, \quad q_2^6 \approx 1{,}055229, \; q_1^4 \approx 1{,}044731, \quad \frac{q_1^4 - 1}{q_1 - 1} \approx 4{,}0664545,\right.$

$\left. q_2^5 \approx 1{,}045817.\right)$

6. Ismeretes, hogy $2xy \le x^2 + y^2$, hiszen $(x-y)^2 \ge 0$. Az egyenlőség $x = y$ esetén teljesül.

Mivel $|a| = \sqrt{a^2}$, ezért

$$|x + y| = \sqrt{x^2 + 2xy + y^2} \le \sqrt{2\left(x^2 + y^2\right)} = \sqrt{2 \cdot 4} = 2\sqrt{2}.$$

A feltételnek megfelelően $|x + y|$ legnagyobb értéke $2\sqrt{2}$, amit az $x = y$ és $x^2 + y^2 = 4$ egyenletrendszer $x_1 = \sqrt{2}$, $y_1 = \sqrt{2}$ és $x_2 = -\sqrt{2}$, $y_2 = -\sqrt{2}$ megoldásai esetén vesz fel.

$\Big(x = 2\cos\alpha,\ y = 2\sin\alpha$ helyettesítéssel $|x + y| = 2|\sin\alpha + \cos\alpha| = 2\sqrt{2}\left|\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right| \le 2\sqrt{2}.$

Egyenlőség $\alpha = \frac{\pi}{4}$ vagy $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ esetén teljesül.$\Big)$

7. A logaritmus definíciója szerint $4^x + m = 2^x$, $\quad 4^x - 2^x + m = 0$. Ez utóbbi (2^x-re) másodfokú egyenlet, diszkriminánsa $D = 1 - 4m$.

Ha $D = 0$, vagyis $m = \frac{1}{4}$, $\quad 2^x = \frac{1}{2}$, $\quad x_0 = -1$.

Ha $D > 0$, azaz $1 - 4m > 0$, $m < \frac{1}{4}$, akkor $2^{x_1} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4m}}{2}$ vagy $2^{x_2} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4m}}{2}$.

Mivel $m < \frac{1}{4}$ esetén $\frac{1 + \sqrt{1 - 4m}}{2} > 0$, $x_1 = \log_2 \frac{1 + \sqrt{1 - 4m}}{2}$ megoldás. $\frac{1 - \sqrt{1 - 4m}}{2} > 0$, ha $m > 0$, és ekkor $x_2 = \log_2 \frac{1 - \sqrt{1 - 4m}}{2}$, így ekkor két megoldás van.

Pontosan egy megoldás így akkor van,

ha $m = \frac{1}{4}$ (ekkor kapjuk x_0-t) vagy ha $m \le 0$ (ekkor kapjuk x_1-et).

8. Az egyenletek gyökei valósak, így $p^2 + 4q \ge 0$ és $(p^2 + 4)^2 - 4(6 - pq) \ge 0$.

Ha az $x^2 + px - q = 0$ egyenlet gyökei x_1 és x_2, akkor az $x^2 - \left(p^2 + 4\right)x + 6 - pq = 0$ egyenlet gyökei $x_1 + 3$ és $x_2 + 3$, így

(1)	$x_1 + x_2 = -p,$	és	(3)	$x_1 + x_2 + 6 = p^2 + 4,$
(2)	$x_1 x_2 = -q,$		(4)	$(x_1 + 3)(x_2 + 3) = 6 - pq.$

x_1 és x_2 kiküszöbölhető. Egyrészt az (1) és (3) egyenletekből

$$-p + 6 = p^2 + 4, \quad p^2 + p - 2 = 0, \quad p_1 = -2,\ p_2 = 1.$$

másrészt az (1), (2) és (4) egyenletekből

$$x_1 x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9 = 6 - pq, \quad -q - 3p + 3 + pq = 0, \quad (q - 3)(p - 1) = 0.$$

Ha $p = -2$, akkor $q = 3$, és mindkét diszkrimináns pozitív.

Ha $p = 1$, akkor q bármely megengedett szám lehet. Most $q \ge -\frac{1}{4}$, $q \in \mathbf{R}$, hiszen a diszkriminánsok vizsgálatával $1 + 4q \ge 0$, $\quad q \ge -\frac{1}{4}$.

A Középiskolai Matematikai Lapokban megjelent első és utolsó mérőlap (1979. január – 2004. április)

Mérőlapok felvételire I.
1979. január

1. Egy a oldalú négyzet két szemközti oldalára „befelé" állítsunk egyenlő oldalú háromszögeket. Fejezzük ki a-val e két háromszög közös részének területét!

2. Oldjuk meg az

$$x^2 = y + 2,$$
$$y^2 = x + 2$$

egyenletrendszert!

3. Számítsuk ki a derékszögű háromszög szögeit, ha $5r = 2R$, ahol r a beírt, R pedig a körülírt kör sugara!

4. A $2x - y = 10$ egyenletű egyenesen határozzuk meg azt a pontot, amelynek a P és a Q pontoktól való távolságának összeg a legkisebb, ha

$P(-5; 0)$ és $Q(-3; 4)$.

5. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\lg^2(4-x) + \lg(4-x)\lg\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2\lg^2\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

6. Egy háromszög területe $t = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2\right)$, ahol a, illetve b a háromszög két oldalának a hossza. Számítsuk ki a háromszög szögeit!

7. Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \frac{x-4}{a+1} - \frac{a+2}{x-4}$$

függvénynek legyen zérushelye.

8. Oldjuk meg a

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}} = \sin x + \cos x$$

egyenletet!

Mérőlapok felvételire
2004. április

Ágoston György (Miskolc, Szeged), Kellner Károly, Holczer Tamás és a többi, a holokauszt idején elpusztított barátom emlékére

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$; *b)* $\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$;

c) $\cos\left(3x-\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$; *d)* $\cos\left(\frac{5\pi}{6}-3x\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

2. Oldjuk meg a

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-4a+4}=2$$

egyenletet a valós számok halmazán, ahol a valós paraméter.

3. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magasság CD. Az ACD, illetve BCD háromszögekbe írható kör sugara $\varrho_1=3$, illetve $\varrho_2=4$. Számítsuk ki az ABC háromszögbe írható kör sugarát.

4. Az ABC háromszög B, illetve C csúcspontján áthaladó súlyvonal egyenlete $3x+5y=10$, illetve $3x-2y=3$. A háromszög egyik csúcspontja $(-3;1)$. Számítsuk ki a másik két csúcspont koordinátáit.

5. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $\lg^2(5-x)+2\lg^2(x+1)=3\big(\lg(5-x)\big)\big(\lg(x+1)\big)$,

b) $3^{2x+1}+3^{2-2\sqrt{x}}=4\cdot 3^{1+x-\sqrt{x}}$; *c)* $2\sin^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x+4\cos^4 x=1$.

6. Mely n egész számokra lesz a

$$\frac{18nx+36x+12n+6n^2}{3n^2x+15nx+18x+6n+5n^2+n^3}$$

kifejezés értéke egész szám, ha x tetszőleges egész számot jelenthet?

7. Az $x^2+(2p-1)x+\frac{3}{2}p^2-5p+\frac{1}{4}=0$ egyenlet valós gyökeinek négyzetösszege a valós p paraméter mely értékeinél a legkisebb, illetve a legnagyobb? Mennyi ez a legkisebb, illetve legnagyobb érték?

8. Az ABC háromszög AB oldalán levő K, a BC oldalán levő L pontokra $3AK=KB$, illetve $BL=LC$. Az AL és CK szakaszok metszéspontja Q.

a) Hányadrésze az ABC háromszög területének az AQB, illetve a BQC háromszög területe?

b) Milyen arányban osztja a Q pont az AL, illetve a CK szakaszt?

FELVÉTELEKET ELŐKÉSZÍTŐ BIZOTTSÁG
Budapest, XI., Műegyetem rkp. 3.
Levélcím: 1521 Budapest Pf. 112
Telefon: 664-011, 665-011

MATEMATIKA
FELVÉTELI MINTAFELADATOK

Kedves Barátunk!

A levelezés befejezése után a felvételire való felkészülés érdekében küldünk négy feladatsorozatot. Próbáld meg ezeket időre, **180 perc alatt megoldani**, hiszen ezek a felvételi feladatokhoz hasonlók. Ezek megoldását ne küldd el hozzánk. Ha valamelyik feladat megoldása során problémád van, fordulj tanárodhoz segítségért. Sikeres felvételit kívánunk!

I.

1./ Egy derékszögű háromszögbe írt kör az átfogót olyan pontban érinti, hogy az átfogót 5 és 12 egység hosszúságú részekre osztja. Számítsuk ki a befogók hosszát és a hegyesszögeket!

2./ Oldjuk meg a következő egyenleteket:

a./ $x^2 = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 3$; **b./** $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$;

c./ $\dfrac{\mathrm{tg}2x \cdot \mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}2x - \mathrm{tg}x} = \sin 2x$!

3./ Az $ABCDE$ gúla alaplapja az $ABCD$ téglalap, amelyben $AB = 1$, $AD = \sqrt{3}$ egység. Az EC él merőleges az alaplap síkjára. Az EA él az alaplappal $60°$-os szöget zár be. Számítsuk ki a gúla térfogatát és felszínét!

4./ Tekintsük az $x^2 - (2k + 1)x + k^2 = 0$ egyenletet, ahol k valós paraméter. A k mely értékeire van valós megoldás? Az egyenlet gyökeinek aránya milyen k érték esetén $1{:}4$?

5./ Milyen x-ekre értelmezhetők a következő kifejezések?

a./ $\sqrt{3^{x+1} + 3^x - 2^{x+2}}$; **b./** $\dfrac{1}{\lg \cos 2x}$;

c./ $\sqrt{2 - x} + \lg\dfrac{6 + x - x^2}{x + 5}$.

6./ Egy rombusz terüete 25 területegység, a hosszabb átlójának egyik végpontja $A(-2; 2)$, a rövidebb átló egyenesének egyenlete: $4x + 3y = 23$. Határozza meg a hiányzó csúcsok koordinátáit!

7./ Legyen D az ABC háromszög BC oldalának tetszőleges pontja. Igazoljuk, hogy az ABD és az ACD háromszögek köré írt körök sugarának aránya nem függ a D helyzetétől. Mivel egyezik meg ez az arány?

8./ A $\cos x \cdot \mathrm{ctg}\, x - \sin x = a \cdot \cos 2x$ egyenletben az „a" valós paraméter. Hány olyan megoldása van az egyenletnek, amelyekre $0 \le x \le 2\pi$?

II.

1./ Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 9. Ha a számot 12-vel osztjuk, akkor a hányados megegyezik a szám második jegyével, a maradék pedig ennél 2-vel nagyobb. Melyik ez a kétjegyű szám?

2./ Az $ABCD$ konvex húrnégyszögben $AB = 13$, $BC = 24$, $CD = 10$ és a C-nél lévő szög derékszög. Számítsuk ki a négyszög többi szögének mérőszámát, valamint az AD oldal hosszát!

3./ Oldjuk meg a következő egyenleteket:

a./ $\dfrac{x-7}{x^2-49} = 0$; **b.**/ $\sin x = \sin 70°$;

c./ $\dfrac{\log_x 3}{\log_x 2} = \dfrac{\lg 3}{\lg 2}$.

4./ Adott három pont a koordinátáival: $A(0; 2)$, $B(6; 4)$, $C(3; 5)$. Az origón átmenő és AC-vel párhuzamos egyenes metszi az AB és a BC oldalt; a metszéspontokat jelöljük M-mel, illetve N-nel! Számítsuk ki az ABC háromszög és az $AMNC$ trapéz területét!

5./ Oldjuk meg a

$$6a^{5x+2} - 7\sqrt{a^{8x+4}} + a^{3x+2} = 0 \quad (a > 0)$$

egyenletet!

6./ Szimmetrikus trapézba három, egymást páronként érintő r sugarú kör írható úgy, hogy a három kör közül a trapéz hosszabbik párhuzamos oldalát két kör érinti, a többi három oldalt pedig egy-egy kör. A trapéz rövidebbik párhuzamos oldala $2r$ hosszúságú. Mekkorák a trapéz hegyesszögei?

7./ Mely valós x-ekre negatív a $\cos 2x - 3\cos x + 2$ kifejezés értéke?

8./ Egy derékszögű háromszög köré írt kör sugara a háromszögbe írt kör sugarának $\dfrac{13}{4}$-szerese. Mekkorák a háromszög hegyesszögei?

III.

1./ Egy téglalap egyik oldalát 10 %-kal növeljük, a szomszédos oldalát 10 %-kal csökkentjük. Az így kapott szakaszokból ismét téglalapot szerkesztünk. Megegyezik-e a két téglalap területe?

2./ Döntsük el, hogy a következő két szám közül melyik a nagyobb:

$$a=\left(\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\sqrt{6}\right):\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right),$$

$$b=\left(\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt{6}\right):\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right),$$

3./ Oldjuk meg a következő egyenleteket:

a./ $2x+9=\dfrac{(x+4)(x-1)}{x^2+3x-4}$,

b./ $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

c./ $\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{x+4}\sqrt{x-1}$.

4./ Adott a derékszögű háromszög átfogója c, és tudjuk, hogy háromszorosa a hozzá tartozó magasságnak. Fejezze ki c-vel a befogókat!

5./ Egy háromszög csúcspontjai: $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 3)$. Hol helyezkednek el a síkon azok a P pontok, amelyekre
$PA^2+PB^2+PC^2=20$?

6./ Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\lg(x+10)+\frac{1}{2}\lg x^2=2-\lg 4.$$

7./ Az a paraméter mely értékeire lesz az

$\lg\left(ax^2+(a+1)x+a+1\right)$

kifejezés minden valós x számra értelmezhető?

8./ Az ABC háromszögön belül vegyünk fel egy tetszés szerinti O pontot. Az O ponton át a háromszög oldalaival húzzunk párhuzamos egyeneseket. Ezek az egyenesek az ABC háromszöget hat részre osztják, melyek közül három háromszög. E háromszögekbe írt körök sugarai r_1, r_2, r_3, az ABC háromszögbe írt kör sugara r. Igazoljuk, hogy

$r_1+r_2+r_3=r$.

IV.

1./ Egy paralelogramma átlói $60°$-os szöget zárnak be. Az átlók együttes hossza 28 cm, a rövidebb oldal hossza $2\sqrt{13}$ cm. Számítsuk ki a parallelogramma területét és másik oldalának hosszát!

2./ Oldjuk meg a következő egyenleteket:

a./ $\left(x^2+2x+1\right)\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)=0$;

b./ $\sqrt{(3-x)^2}=x-3$;

c./ $\sin^2 x=3\cos^2 x$;

d./ $\lg(4^{4x}-2)=\lg(16^{2x}-2)$.

3./ Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az $x+y=0$ egyenletű egyenest az origóban érinti és érinti az $y-x=2$ egyenletű egyenest is!

4./ Egy számtani és egy mértani sorozatnak közös az első és a második eleme; a mértani sorozat harmadik eleme eggyel nagyobb a számtani sorozat harmadik eleménél, és hárommal nagyobb a mértani sorozat első eleménél. Írjuk fel mindkét sorozat első három elemét!

5./ Oldjuk meg a

$$\left.\begin{aligned}3\cdot 2^x-2^{x+y}+2&=0\\5\cdot 2^{x+1}-2^{x+y-1}&=16\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert!

6./ Az ABC háromszög köré irt kör C pontjában húzott érintő az AB egyenest az M pontban metszi. A CMA szög szögfelezője CA-t D-ben, CB-t E-ben metszi. Igazoljuk, hogy $CD=CE$!

7./ Határozza meg az a értékét úgy, hogy a

$$\left.\begin{aligned}2x^2-y^2&=-a^2+a-2\\x+y&=a\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek legyen megoldása a valós számok körében! Milyen a esetén van egy megoldása az egyenletrendszernek? Oldjuk meg ez esetben az egyenletrendszert!

8./ Az ABC háromszögben $AB=5$ cm, $AC=3$ cm, $CD=2{,}5$ cm, ahol D az AB oldal felezőpontja. Az ADC, illetve a BCD háromszögbe irt kör középpontja O_1, illetve O_2. Számítsuk ki az O_1O_2 távolságot!