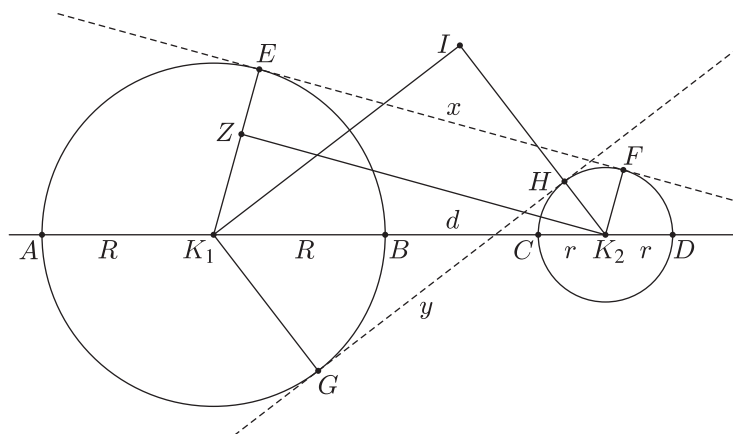


2. Két, egymást nem tartalmazó, közös ponttal nem rendelkező kör közös szimmetriatengelye a köröket rendre az A, B, C, D pontokban metszi. Mutassuk meg, hogy a közös külső illetve belső érintőszakaszok felírhatók két-két olyan szakasz mértani közepeként, amelyek végpontjai az A, B, C, D pontok közül valók!

Megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit! A külső érintőszakasz $x := EF$, a belső érintőszakasz $y := GH$, a körök távolsága $d := BC$, a nagyobb kör sugara R , a kisebb kör sugara r . (A leírt számolások $R = r$ esetben is működnek, ilyenkor az egyik Pitagorasz-tétel trivialisitássá egyszerűsödik.)



A feladat feltételeit helyesen feltüntető ábra.

1 pont

Mivel az érintő merőleges a sugárra, K_1E szakasz párhuzamos K_2F szakasszal. Legyen K_2Z párhuzamos EF -fel, így $K_2Z = x$ és $K_1Z = R - r$. Mivel $K_1ZK_2 \sphericalangle = 90^\circ$, ezért Pitagorasz tétele alapján:

1 pont

$$\begin{aligned} x^2 &= (R + d + r)^2 - (R - r)^2 = d^2 + 2dR + 2dr + 4Rr = d(d + 2R) + 2r(d + 2R) = \\ &= (d + 2R)(d + 2r). \end{aligned}$$

1 pont

Tehát

$$x = \sqrt{AC \cdot BD}.$$

1 pont

Hasonló módon: $K_1I = y$, $K_2I = R + r$ és $K_1IK_2 \sphericalangle = 90^\circ$.

1 pont

Pitagorasz tétele alapján:

$$y^2 = (R + d + r)^2 - (R + r)^2 = d^2 + 2dR + 2dr = d(d + 2R + 2r).$$

1 pont

Tehát

$$y = \sqrt{BC \cdot AD}.$$

1 pont

Összesen: 7 pont