5. Két pozitív egész szám hasonló, ha

– a két szám (*tízes számrendszerbeli alakjában*) ugyanazokat a számjegyeket tartalmazza;

– a két számban a közös számjegyek darabszáma azonos;

– valamint egyik szám sem tartalmazza a 0-s számjegyet.

(Pl. hasonlóak a 1454412, és a 4441125, de hozzájuk nem hasonló az 1245 szám.)

Van-e három olyan 2016-jegyű A, B, C szám, hogy A hasonló B-vel, A hasonló C-vel, és $C = A + B$?

Megoldás. Megmutatjuk, hogy vannak a feltételeknek megfelelő A, B, C számok.

Először keressünk „kicsi” ilyen számokat. A feltételek miatt B is hasonló C-vel. Ha A, B, C 9-es maradékait vizsgáljuk, adódik, hogy – a 9-cel való oszthatósági szabály miatt – a három szám azonos maradékot ad 9-cel osztva. 1 pont

Mivel $A + B = C$, ez csak úgy lehet, ha mind a három szám 9-cel osztható. 1 pont

Könnyen látható, hogy egyjegyű, és kétjegyű ilyen számok nincsenek. 1 pont

Háromjegyű számokat már találhatunk. Először próbálkozzunk olyan háromjegyű számokkal, ahol a számjegyösszeg: $a + b + c = 9$.

Legyenek A, B, C jegyei valamilyen sorrendben a, b, c (a jegyek között lehetnek azonosak is akár)!

Konkrétan: $A = \overline{abc}$, $B = \overline{a'b'c'}$ és $C = \overline{a''b''c''}$, ahol a $'$-s, és $''$-s jegyek az a, b, c jegyek valamilyen permutációi.

Mivel a jegyek összege 9, ezért $c = 9 - a - b$, $c' = 9 - a' - b'$, $c'' = 9 - a'' - b''$.

A, B utolsó jegyeinek összege vagy C utolsó jegye, vagy attól 10-zel több, vagyis

$$18 - a - b - a' - b' \equiv 9 - a'' - b'' \pmod{10}, \quad \text{innen}$$
$$18 - a - b - a' - b' - c'' \equiv 9 - a'' - b'' - c'' = 0 \pmod{10}, \quad \text{majd}$$
$$18 \equiv a + b + a' + b' + c'' \pmod{10} \quad \text{adódik.}$$

Innen két eset lehet, az egyik, hogy a, b, a', b', c'' között A, B, C mind a három jegye előfordul, ekkor – mivel ezek összege 9 – a maradék két számjegy (az általánosság megszorítása nélkül mondjuk a, b') összege is $a + b' = 9$. Mivel az összeg páratlan, ezért itt két különböző jegyről van szó, viszont ekkor a harmadik jegy okvetlenül 0, ami ellentmondás.

A másik eset, hogy a, b, a', b', c'' között A, B, C három jegye közül pontosan kettő fordul elő, egyik 3-szor, a másik 2-szer. Ez azt jelenti – megint az általánosság megszorítása nélkül –, hogy $18 \equiv 3a + 2b \pmod{10}$. Vagyis $3a + 2b$ vagy 8 vagy 18 vagy 28 vagy 38.

Ha $8 = 3a + 2b \to$ a páros csak $a = 2$, $b = 1 \to c = 6$ lehet, ez nem ad eredményt.

Ha $18 = 3a + 2b \to 3 \mid b$ csak $b = 3 \to a = 4$, $c = 2$ és $b = 6 \to a = 2$, $c = 1$ lehet, ezek sem adnak eredményt.

Ha $28 = 3a + 2b \to 27 < 28 = 3a + 2b < 3(a + b) \to 9 < a + b$ vagyis ekkor már túl nagy lenne a számjegyek összege. (A 38-as eset ugyanígy!)

Vagyis nincsenek olyan háromjegyű számok, ahol a számjegyösssszeg 9. 1 pont

Végül, ha a számaink háromjegyűek, és a számjegyösszeg 18, akkor már találunk megoldást:

$$18 = 9+8+1 = 9+7+2 = 9+6+3 = 9+5+4 = 8+8+2 = 8+7+3 =$$
$$= 8+6+4 = 8+5+5 = 7+7+4 = 7+6+5 = 6+6+6$$

felbontások lehetnek jók.

Ezek közül (a számjegyek további vizsgálatával – pl. a végződések, illetve a számok első jegyeinek a vizsgálatával) csak a $18 = 9+5+4$ jöhet szóba.

Kis próbálkozás után $A = 459$, $B = 495$, és $C = 954$ három megfelelő szám. 1 pont

Az $A = 459$, $B = 495$, és $C = 954$ számokból többféle módon tudunk megfelelő 2016-jegyű számokat csinálni.

I.) Pl. (mivel $2016 = 3 \cdot 672$)

$$A = 459459459\ldots459, \quad B = 495495\ldots495 \quad \text{és} \quad C = 954954\ldots954$$

megfelelő három szám (minden szám 672 blokkból áll).

II.) Pl.

$$A = 499\ldots9959, \quad B = 499\ldots995 \quad \text{és} \quad C = 99\ldots9954$$

is megfelelő (mind a három számban pontosan 2014 darab 9-es jegy van). 2 pont

Ha a diák megtalál megfelelő számokat, és az A, B, C számokról meg is mutatja, hogy megfelelnek a feltételeknek, kapja meg a 7 pontot, puszta eredményközlésért – ha a kapott eredményt nem ellenőrzi – csak az utolsó rész 2 pontját kapja.

Összesen: 7 pont