2. Az a valós paraméter mely értékeire lesz az

$$\left|\frac{x^2-4ax+4a^2+1}{x-2a}\right|+x^2-2x-1=0$$

egyenletnek pontosan egy valós megoldása?

<u>Megoldás:</u>

Az egyenlet bal oldalán szereplő tört nevezője miatt $x \neq 2a$.
Alkalmazva a két tag különbségének négyzetére vonatkozó azonosságot a tört számlálójában, és az $x^2-2x-1=x^2-2x+1-2=(x-1)^2-2$ azonos átalakítást:

$$\left|\frac{(x-2a)^2+1}{x-2a}\right|+x^2-2x+1-2=0,$$

illetve

(1) $$\left|(x-2a)+\frac{1}{x-2a}\right|+(x-1)^2=2.$$ 2 pont

Mivel a tört számlálója biztosan pozitív, (1) ekvivalens az

$$\frac{(x-2a)^2+1}{|x-2a|}+(x-1)^2=2$$

egyenlettel.

Az egyenletben szereplő törtet átalakítva, és figyelembe véve, hogy

$$|a+b|=|a|+|b|$$

abban az esetben, ha mindkét tag azonos előjelű, az egyenlet

(2) $$|x-2a|+\frac{1}{|x-2a|}+(x-1)^2=2$$

alakban írható. 2 pont

Egy pozitív számnak és reciprokának az összege legalább 2.

Egyenlőség akkor áll fenn, ha maga a szám egyenlő 1-gyel.

Ezért a (2) egyenlet csak úgy teljesülhet, ha

$$|x-2a|=1, \text{ és } x=1$$

egyszerre teljesül.

Ezekből:

(3) $$|1-2a|=1.$$

A (3) egyenlet szerint $1-2a=1$, vagy $1-2a=-1$, azaz $a=0$ vagy $a=1$. 2 pont

Megvizsgáljuk, hogy ezekre a paraméterekre pontosan egy valós megoldása van-e az egyenletnek.

Ha $a = 0$, akkor az eredetivel ekvivalens (1) egyenletből kapjuk, hogy

(4) $$\left| x + \frac{1}{x} \right| + (x-1)^2 = 2.$$

Mivel a (4) egyenletben az abszolút-értékes tényező legalább 2, a jobb oldal értéke pedig pontosan 2, ezért egyenlőség csak $(x-1)^2 = 0$, azaz $x = 1$ esetben áll fenn.
Az egyenletnek $a = 0$ mellett tehát valóban egy megoldása van. 2 pont

Ha $a = 1$, akkor az (1) egyenletből:

(5) $$\left| (x-2) + \frac{1}{x-2} \right| + (x-1)^2 = 2.$$

Az (5) egyenletben az abszolút-értékes tag szintén legalább 2, a jobb oldal értéke pedig pontosan 2, ezért egyenlőség ismét csak $(x-1)^2 = 0$, azaz $x = 1$ esetben áll fenn, ezért az $a = 1$ mellett is pontosan egy valós megoldása van az egyenletnek. 2 pont

Összesen: 10 pont