1. Az a_n számsorozat tagjaira teljesül, hogy $a_0 = 5$, és minden $n \geq 1$ pozitív egész számra $a_n = \frac{1+a_{n-1}}{1-a_{n-1}}$. Határozza meg az a_{2014} szám értékét!

Megoldás: számítsuk ki a sorozat első néhány tagját. 1 pont

Az $a_n = \frac{1+a_{n-1}}{1-a_{n-1}}$ képzési szabály alapján $a_1 = \frac{1+a_0}{1-a_0} = \frac{1+5}{1-5} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$.

Hasonlóképpen

$$a_2 = \frac{1+a_1}{1-a_1} = \frac{1-\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}} = -\frac{1}{5}, \text{ és } a_3 = \frac{1+a_2}{1-a_2} = \frac{1-\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{5}} = \frac{2}{3},$$

továbbá

(1) $$a_4 = \frac{1+a_3}{1-a_3} = \frac{1+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 5.$$ 2 pont

Az $a_n = \frac{1+a_{n-1}}{1-a_{n-1}}$ képzési szabály és (1) alapján nyilvánvaló, hogy az a_n számsorozat tagjai periodikusan ismétlődnek, mégpedig

(2) $$a_{4k} = 5,\ a_{4k+1} = -\frac{3}{2},\ a_{4k+2} = -\frac{1}{5},\ a_{4k+3} = \frac{2}{3}$$

ahol $k \in N$. 3 pont

Mivel

$$2014 = 2012 + 2 = 4 \cdot 503 + 2,$$ 2 pont

ezért

$$a_{2014} = -\frac{1}{5}.$$ 2 pont

Összesen: 10 pont