1. Határozza meg a tízes számrendszerbeli $x = \overline{abba}$ és $y = \overline{abab}$ ($a \neq b$) páros természetes számokat úgy, hogy az $x + y$ összeg osztható legyen 7-tel!

<u>Megoldás:</u>

Mivel $x = \overline{abba}$ és $y = \overline{abab}$ tízes számrendszerbeli számok, ezért

(1) $x = 1001a + 110b$ és $y = 1010a + 101b$. 1 pont

A két szám összege

(2) $x + y = 2011a + 211b$. 1 pont

Maradékos osztással $2011 = 287 \cdot 7 + 2$ és $211 = 30 \cdot 7 + 1$, ezért (2)-ből az következik, hogy

$$x + y = 287 \cdot 7a + 30 \cdot 7b + 2a + b,$$

innen pedig

(3) $x + y = 7 \cdot (287a + 30b) + 2a + b$. 2 pont

(3) szerint $x + y$ pontosan akkor osztható 7-tel, ha $2a + b$ osztható 7-tel. 1 pont

A feltétel szerint a és b páros számjegyek, valamint $a \neq b$, így a $2a + b$ összeg 24-nél kisebb 7-tel osztható pozitív páros szám, azaz

(4) $2a + b = 14$. 2 pont

(4)-ből két megoldást kapunk:

$a = 6$; $b = 2$, valamint $a = 4$; $b = 6$. 2 pont

A feladatra összesen 2 megoldáspár adódik

$x = 6226$; $y = 6262$, illetve $x = 4664$; $y = 4646$. <u>1 pont</u>

Összesen: 10 pont