2. feladat
Egy háromszög oldalszakaszain felvettünk egy-egy pontot úgy, hogy az ezek összekötésével keletkező négy részháromszög területe egyenlő. Mutassuk meg, hogy a pontok az oldalak felezőpontjai.

Első megoldás: Legyenek az ABC háromszög AB, BC, AC oldalán felvett pontok rendre C_1, A_1, B_1. Legyen még $AC_1/AB = x$, $BA_1/BC = y$, és $CB_1/CA = z$. A háromszög területére vonatkozó képlet alapján

$$\frac{T_{AB_1C_1}}{T_{ABC}} = \frac{AB_1 \cdot AC_1 \cdot \sin\alpha}{AB \cdot AC \cdot \sin\alpha} = (1-z)\cdot x = 1/4\,.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy $(1-x)\cdot y = 1/4$, valamint $(1-y)\cdot z = 1/4$. (3 pont)
Az első egyenletből z-t kifejezve majd a harmadikba helyettesítve $(1-y)\cdot(1-1/(4x)) = 1/4$, azaz $1-y = x/(4x-1)$. Ezt a második egyenletbe helyettesítve x-re az

$$(1-x)\,\frac{3x-1}{4x-1} = \frac{1}{4}$$

egyenlet adódik. Innen átrendezéssel $4x^2 - 4x + 1 = 0$, amit egyedül az $x = 1/2$ érték elégít ki. (3 pont)
Ezt az egyenletekbe visszahelyettesítve $y = z = 1/2$, vagyis a pontok valóban az oldalak felezőpontjai. (1 pont)

Második megoldás: Használjuk az előző megoldásban bevezetett jelöléseket. Válasszuk meg az egységet úgy, hogy az ABC háromszög területe éppen 1 legyen. Ekkor az AB_1C_1, BC_1A_1, CB_1A_1 háromszögek mindegyikének területe $1/4$, és rendre egyenlő az $x(1-z)$, $y(1-x)$, $z(1-y)$ értékekkel. (3 pont)
A számtani és mértani közép közötti egyelőtlenségek alapján

$$\frac{3}{2} = \sqrt{T_{AB_1C_1}} + \sqrt{T_{BC_1A_1}} + \sqrt{T_{CB_1A_1}} \le \frac{x+(1-z)}{2} + \frac{y+(1-x)}{2} + \frac{z+(1-y)}{2} = \frac{3}{2}\,.$$

(3 pont)
Egyenlőség csak úgy állhat, ha $x = 1-z$, $y = 1-x$, és $z = 1-y$, ahonnan $x = y = z = 1/2$ adódik. Az osztópontok tehát felezőpontok. (1 pont)