463. Igazoljuk, hogy ha az α, β és γ pozitív szögek nem mind egyenlők, és

$$\alpha + \beta + \gamma \leq 360^\circ,$$

akkor

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} < \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3},$$

ha pedig

$$\alpha + \beta + \gamma \leq 180^\circ,$$

akkor meg:

$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3} < \cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}.$$

Megoldás: A Jensen-féle egyenlőtlenség alkalmazására gondolunk, de ez nem alkalmazható közetlenül, mivel a sínusfüggvény nem konkáv az egész $[0^\circ, 360^\circ]$ intervallumban és a cosinusfüggvény sem a $[0^\circ, 180^\circ]$ intervallumban. Ezért a bal oldalt előbb átalakítjuk:

$$\frac{1}{3}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = \frac{1}{6}[(\sin\alpha + \sin\beta) + (\sin\beta + \sin\gamma) + (\sin\gamma + \sin\alpha)] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} + 2\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\right].$$

A jobb oldalon szereplő sínusok pozitívak, mivel argumentumuk 180°-nál kisebb, a cosínusok helyébe 1-et írva pedig a jobb oldalt növeljük. Tehát:

$$\frac{1}{3}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) < \frac{1}{3}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\frac{\beta+\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)$$

Minthogy $\frac{\alpha+\beta}{2} \leq 180^\circ$, $\frac{\beta+\gamma}{2} \leq 180^\circ$, $\frac{\gamma+\alpha}{2} \leq 180^\circ$; a jobb oldalra most már alkalmazható a Jensen-féle egyenlőtlenség, és így lesz:

$$\frac{1}{3}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\frac{\beta+\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\right) \leq \sin\frac{\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\gamma+\alpha}{2}}{3} = \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3},$$

úgy, hogy tényleg:

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} < \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}.$$

Az előzőkhöz hasonlóan kapjuk, hogy

$$\frac{1}{3}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = \frac{1}{6}[(\cos\alpha + \cos\beta) + (\cos\beta + \cos\gamma) + (\cos\gamma + \cos\alpha)] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} + \cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\right) <$$

$$< \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\beta+\gamma}{2} + \cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\right) \leq \cos\frac{\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\gamma+\alpha}{2}}{3},$$

úgy, hogy végeredményben:

$$\frac{1}{3}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) < \cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}.$$

Fila Jenő, Zilah és Kőváry Károly, Budapest