2008. szeptember 19.

Ezen a szakkörön a Ceva és Menelaosz tételt elevenítettük fel, több gyakorló feladattal, néhány lehetséges általánosítással. További feladatok:

1. $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ (n=1, 2, …) Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész számot, amely relatív prím a sorozat minden tagjához.

2. Az *ABCD* konvex ngyszögben *BC*=*AD*, de nem párhuzamosak. *E* és *F* rendre *BC* és *AD* belső pontjai, *BE*=*DF*. Most egyenesek következnek: *AC* és *BD* metszete *P*, *BD* és *EF* metszete *Q*, *EF* és *AC* metszete *R*. *E* és *F* változnak, tekintjük az összes *PQR* háromszöget. Biz. ezek körülírt köreinek van *P*-től különböző közös pontja.

3. Egy versenyen 6 feladat volt. Bármely két feladatra igaz, hogy a versenyzők 2/5-öd részénél többen oldották meg mindkettőt. Senki nem oldotta meg mind a hatot. Biz. van legalább két olyan versenyző, aki pontosan 5 feladatot oldott meg.

4. Teljes hatványnak nevezzük a t^s alakú számokat, ahol *t*,*s*>1 egészek. Mutassuk meg hogy minden *n*-hez létezik olyan *n* elemű halmaz, melynek bármely nem üres részhalmazában az elemek átlaga teljes hatvány.

2008.október 2.

A szakkörön bebizonyítottuk az Euler-Fermat és a Wilson tételt. A feladatok a következők voltak:

1. Biz. minden páratlan *n*-re $n \mid 2^{n!} - 1$.

2. Mi lesz 1793^{8642} utolsó két jegye?

3. Tegyük fel $19 \mid a^{40} + b^{40}$ Biz *b* 19-cel osztható.

4. Mely p prímre van olyan *b*, hogy $p \mid b^2 + 1$?

5. Biz. minden egésznek van olyan többese, amely néhány 1-es majd néhány 0-ból áll.

6. Biz. 100 egész közül kiválasztható néhány, amelyek összege 100-zal osztható.

7. Igazoljuk, hogy minden pozitív egész *n* számnak van olyan többese, amelyben a jegyek összege *n*.

Házi feladat:

8. Mely számoknak van olyan többese, amelyben csak 1-es és 2-es jegyek vannak?

9. Legyen *k* nem neg. egész. Tegyük fel $a_1, \dots, a_n$ egészek legfeljebb 2*k* különböző maradékot adnak *n*+*k*-val osztva. Bizonyítsuk be, hogy a számok közül néhány összege osztható *n*+*k*-val.

2008. október 17.

A szakkörön polinomos feladatok szerepeltek és a hozzájuk kapcsolódó ismereteket beszéltük meg.

1. *p*(*x*) egész együtthatós polinomra *p*(3)=*p*(7)=2. Lehet-e egész helyen 9 a helyettesítési érték?

2. Lehet-e $x^3 - 2x^2 - 2x - d$ mindhárom gyöke racionális?

3. Egy egész együtthatós polinomot (x-1)-gyel osztva a maradék 2, (x-2)-vel osztva 1. Mennyi a maradék (x-1)(x-2)-vel osztva?

4. Tudjuk, hogy $xp(x)=(x-3)p(x+1)$ minden valós számra és $p(4)=-12$. Mi lehet $p(x)$ polinom?

5. Határozzuk meg azokat a különböző $a_1, \dots ,a_n$ egész számokat, amikre a $1+\prod(x-a_i)$ felírható két legalább elsőfokú egész együtthatós polinom szorzataként.

6. $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$, n>1 egész. Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ nem írható fel két legalább elsőfokú polinom szorzataként, ahol mindkét polinom együtthatói egészek.

Házi feladat

7. Legyen $p(x)$ negyedfokú racionális együtthatós polinom, főegyütthatója 1. Tudjuk, hogy egyetlen valós gyöke van. Igazoljuk, hogy ez a gyök racionális.

2008. november 7.

1. (a) $\sum_{k=1}^{n} k^2$; (b) $\sum_{k=1}^{n} k^3$; (c) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)$; (d) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2$; (e) $\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!$

2. (a) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$; (b) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$; (c) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{k}{(4k^2-1)}$

3. Mennyi N egész része. $N=\sum_{k=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{k}}$

4. Biz. $\sqrt{1+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}}+\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}\le n+1$.

5. Mennyi M egész része

$$M=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+...+\frac{1}{\sqrt{2009^2-2}+\sqrt{2009^2-1}}.$$

6. Biz $\sum_{k\in S}\frac{1}{k-1}$=1, ahol S={pozitív egészek legalább második hatványai}.

2008. november 21.

Jelöléseink: r beírt kör sugara, R köréírt kör sugara, m_a magasság, f_a belső szögfelező, s_a súlyvonal, r_a hozzáírt kör sugara, d_a oldalegyenestől mért távolság, R_a csúcstól vett távolság

1. Biz tetszőleges háromszögnél:

   (a) $9r\le\sum m_a\le\sum f_a\le\sum s_a\le 4{,}5R$;

   (b) $\sum f_a\le\sum\sqrt{r_a r_b}\le\sqrt{3}s\le\sum r_a=r+4R$;

(c) $27r^2 \le \sum m_a^2 \le \sum f_a^2 \le s^2 \le \sum s_a^2 = \frac{3}{4}\sum a^2 \le \frac{27}{4}R^2$

(d) $\frac{1}{r} = \sum \frac{1}{r_a} = \sum \frac{1}{m_a} \ge \sum \frac{1}{f_a} \ge \sum \frac{1}{s_a} \ge \frac{2}{R}$

(e) $\sum r_a^2 \ge 27r^2$; (f) $4R < \sum r_a \le 4{,}5R$

2. Erdős –Mordell egyenlőtlenség: tetszőleges belső pontra $\sum R_a \ge 2\sum d_a$.

3. Legyen *P* az *ABC* hegyesszögű háromszög belsejében fekvő pont. Bizonyítandó, hogy a háromszög kerületén fekvő pontoknak a *P*-től való távolságai közül a legnagyobb legalább kétszer akkora, mint a legkisebb.

4. Egy körbe írt sokszög oldalainak négyzetösszege mikor lesz maximális?

5. *ABC* háromszög magasságpontja *M*, *M* vetülete az oldalakon *A'*, *B'*, *C'*.

   Biz $\prod MA' \le \frac{Rr^2}{2}$.

2008. december 12.

1. Mely p, q prímekre teljesül, hogy $p^3 - q^5 = (p+q)^2$?

2. Biz, nincs egész (nem triviális) megoldása (a) $x^5 - y^2 = 4$; (b) $4xy - x - y = z^2$.

3. Igazoljuk, hogy megadható n különböző pozitív egész, amelyek reciprokának összege 1.

4. Lehet-e néhány szomszédos egész reciprokának összege egész?

5. Igazoljuk, hogy minden pozitív egész *n*-re van egész megoldása: $x^2 + xy + y^2 = 7^n$.

6. Van-e végten sok olyan egész oldalú derékszögű háromszög, ahol a befogók különbsége 1?

7. Nemnegatív egész megoldásokat keresünk (a) $x^3 + 2y^3 = 4z^3$; (b) $2^x - 1 = xy$.

2009. január 9.

A szakkör feladatai: 2008/9-es OKTV II. kat 2. forduló és 2000/1-es OKTV III. kat döntő

1. Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, melyen az *f*(*x*) függvény értelmezhető és határozzuk meg a függvény értékkészletét ezen az értelmezési tartományon.

   $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x - \sqrt{2 - x}}}$.

2. Határozzuk meg a következő egyenlet valós megoldásait: $\left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right] = \frac{x}{7}$.

3. Egy 1 milliárd lakosú országban egy olcsó AIDS teszt bevezetését tervezik. Tudjuk, hogy kb. minden ezredik ember fertőzött. Kiderült, hogy a betegek 99,9\%-ánál pozitív, viszont sajnos az

egészségesek 0,1\%-ánál is pozitív eredményt ad a teszt. Ilyen paraméterek mellett elvetették a használatát. Egy matematikus azt javasolta, hogy végezzék el kétszer egymás után a vizsgálatot és ha mindkettő pozitív, csak akkor küldjék orvoshoz a pácienst. Így már bevezethető lett a teszt. A következő két kérdéssel arra keressük a választ, mi ennek a magyarázata. (a) Számítsuk ki a valószínűségét, hogy beteg valaki, ha az első teszt pozitív. (b) Számítsuk ki a valószínűségét, hogy beteg valaki, ha mind a két teszt pozitív.

4. Az a, b, c oldalú t területű hegyesszögű háromszögre $abc=a+b+c$ teljesül. Biz. be, hogy $\frac{\sqrt{3}}{2}<t<\frac{3}{2}$.

5. Legyen a c pozitív egész és jelölje c_1, c_3, c_7 és c_9 rendre a c azon pozitív osztóinak a számát, amelyek utolsó számjegye 1, 3, 7 ill.9. Bizonyítsuk be, hogy $c_1+c_9\geq c_3+c_7$.

6. Adottak a síkon a k_1 és k_2 körök, valamint a P pont. Szerkesztendő olyan a P-n átmenő e egyenes, amely a köröket (i=1,2) A_i, B_i pontokban metszi úgy, hogy a k_i körvonalak alkalmas C_i pontjaira $A_1C_1=A_2C_2=B_1C_1=B_2C_2$ teljesül. (Nem szükséges annak diszkutálása, hány ilyen e egyenes létezik, illetve létezik-e egyáltalán ilyen e egyenes.)

7. Adott $k+m$ darab különböző, 1-nél nagyobb egész szám, $a_1,a_2,\dots,a_k,b_1,b_2,\dots,b_m$ ahol mindegyik a_i páros sok, mindegyik b_j pedig páratlan sok (nem feltétlenül különböző) prím szorzata. Hányféleképpen lehet a $k+m$ darab szám közül néhányat (akár egyet sem, akár az összeset) kiválasztani úgy, hogy bármelyik b_j-nek (j=1, 2, …, m) a kiválasztott számok között páros sok osztója legyen?

2009. január 23.

1. Biz. $a_1,a_2,\dots,a_n$ pozitív számokra
$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\dots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geq\frac{1}{2}\sum a_i .$$

2. Mely (x,y,z) pozitív egészekre teljesül: $x!+y!=15\cdot 2^{z!}$?

3. Határozzuk meg a legkisebb valós c számot, amelyre bármely háromszög kerületén van két pont, melyek a kerületet felezik és távolságuk nem nagyobb a kerület c-szeresénél.

4. Mely poz. prím valamely poz. eg. kitevős hatványa írható fel két pozitív egész köbének összegeként.

5. Van-e olyan $f(x)$ egész együtthatós, 2009-edfokú polinom, amelyre bármely n egészre az $f(n)$, $f(f(n))$, $f(f(f(n)))$,… számok páronként relatív prímek?

6. Legyen n>2, az $a_1,a_2,\dots,a_n$ számok összege pozitív. Ezen számok egy $b_1,b_2,\dots,b_n$ permutációját jónak hívjuk, ha $b_1+b_2+\dots+b_k>0$, k=1,2,…,n esetén. Legalább hány jó permutáció van?

7. Az ABC háromszög A, B, C csúcsainak merőleges vetülete rendre a C, A, B- ből induló külső szögfelezőre A', B', és C'. Az $A'B'C'$ köréírt kör sugara d. ABC háromszögbe írt kör sugara r,

félkerülete *s*. Biz. $d^2 = r^2 + s^2$.

8. Adott egy n^2 pontú egyszerű gráf. (n=3k+1, k. poz.eg.). Legalább hány éle van, ha bármely n pont közt lesz négy, amely teljes négyes?

2009. február 6.
A 2002-es IMO feladatai

2009. február 20
A 2003-as IMO feladatai

2009. március 6.
Az OKTV II és III kategória döntős feladatai

2009. március 20.
A Surányi János emlékverseny (első olimpiai válogató) feladatai:

1. A derékszögű koordinátarendszerben nevezzük *doboznak* az olyan téglalapokat, amelyeknek oldalai a tengelyekkel párhuzamosak. Ha két doboznak van közös belső, vagy határpontja, akkor őket metszőknek nevezzük.
   Legfeljebb mekkora lehet n, ha megadható n doboz $B_1, B_2, \ldots, B_n$ úgy hogy B_i és B_j akkor és csak akkor metszők, ha n nem osztja sem i–(j+1)-et, sem i–(j-1)-et.

2. Az *ABC* háromszög beírt köre az *AB* és *AC* oldalakat rendre a *D* és *E* pontokban érinti. A beírt körnek és az *AEB* háromszög köré írt körnek *E*-től különböző közös pontja legyen *F*, a *D* pont merőleges vetülete az *EB* egyenesen *G*. Igazoljuk, hogy $2ABE\angle = BFG\angle$.

3. Igazoljuk, hogy a $\binom{2^n-1}{0}, \binom{2^n-1}{1}, \binom{2^n-1}{2}, \ldots, \binom{2^n-1}{2^{n-1}-1}$ számok csupa különböző, páratlan maradékot adnak 2^n-nel osztva.

Továbbá a Romániai Matematikai Mesterek verseny 2009 feladatai: