2011. szeptember 16.

Bemelegítő feladatok régi Kürschák versenyekről:

1. Biz. $17|2x+3y \Leftrightarrow 17|9x+5y$.

2. Az A, B, C, D pontok egy egyenesen vannak. Szerkesztendő olyan négyzet, melynek két átellenes oldalának egyenese A-n és B-n, a másik kettő C-n és D-n megy át.

3. Biz. x^4+2x^2+2x+2 nem írható fel két másodfokú egész együtthatós kifejezés szorzataként.

4. $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, Biz. $12|(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$.

5. Hány zérussal végződik 1000!

6. Egy kör gördül egy kétszer akkora sugarú kör belsejében. Milyen pályát ír le a gördülő kör kerületének valamely pontja?

22. Balkán Olimpia feladatai:

7. Legyen ABC hegyesszögű háromszög, melynek beírt köre az AB ill. AC oldalakat D ill. E pontokban érinti. Legyenek X ill. Y az $ACB\angle$ ill. $ABC\angle$ szögek szögfelezőinek metszéspontjai a DE egyenessel és legyen Z a BC szakasz felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy az XYZ háromszög akkor és csak akkor egyenlőoldalú, ha $BAC\angle = 60°$.

8. Határozzuk meg az összes olyan p prímszámot, amire p^2-p+1 egy egész szám köbe.

Az 1-6. és a 8-as feladatokat megbeszéltük, a 7. házi feladat.

Szeptember 30.

Az IMK és az olimpiai szakkör közös délutánja
Az IMO2011 feladatainak megbeszélése, ez a foglalkozás a Szent István Gimnáziumban volt.

Október 14.

1. Egy konvex 2002 szöget egymást nem metsző átlókkal háromszögekre darabolunk. Lehet-e a háromszögeknek pont a fele olyan, hogy mindhárom oldala átló?

2. Anna és Bálint gondol egy pozitív egészre és megsúgják Cilinek. Cili elárulja nekik, hogy a két szám összege, vagy szorzata 2002. Anna erre kijelenti, hogy ebből nem tudja kitalálni Bálint számát. Ezt hallva Bálint megjegyzi, hogy ő sem tudja kitalálni Anna számát. Mi lehetett Bálint száma?

3. Egy versenyen a feladatok legalább 2/3-ára igaz, hogy ezek egyikét sem oldotta meg a versenyzőknek legalább a 2/3-a. Másrészt a versenyzők legalább 2/3-a olyan, hogy mindegyikük megoldotta a feladatok legalább 2/3-át. (a) Lehet ez? (b) 2/3 helyett 3/4. (c) 2/3 helyett 7/10.

4. Van 2002 kártyánk, rajtuk a számok 1, 2, …, 2002. Két játékos felváltva húznak. A végén az nyer akinek a kártyáin szereplő számok összegének az utolsó jegye nagyobb. Hogy érdemes játszani?

5. Egy szög belsejében levő ponton áthalad három egyenes, melyek a szög szárait három pontban metszik. Lehet-e, hogy a három pont közül a középső felezőpont mindkét száron?

6. Egy kör mentén van 2002 különböző szám, szomszédosak különbsége 2, vagy 3. Legfeljebb mennyi lehet a legnagyobb és legkisebb szám különbsége?

7. Egy kör mentén van 50 pont, a szomszédosak közti ívek hossza 1, 2, …, 50. A „szemközti" ívek hosszának különbsége 25. Igazoljuk, hogy az 50 pont konvex burkának van párhuzamos oldalpárja.

8. Osztóban 19 999 ember lakik, továbbá Nagyagy a polgármester, aki megszámozza őket 2-től 20 000-ig, de senkinek nem árulja el, mi a száma. Bármely két embernek viszont hajlandó elárulni, mi a számuk legnagyobb közös oszója. Kideríthető-e mindenkiről a száma?

9. Legyenek a, b, c pozitív valós számok. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget. Mikor áll fenn egyenlőség?

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$$

Ugyanezen a napon volt az Eötvös verseny. A 9. feladat házinak maradt.

Október 28.

1. a,b,c,d valós számok. $a^2+b^2=c^2+d^2=1$ és $ac+bd=0$. $ab+cd$ = ?

2. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott AB, a beírt és az AB-hez hozzáírt kör sugara.

3. Egy kocka alakú terem falain mozog három pók. Hálójuk az általuk alkotott háromszögben feszül ki. A teremben röpköd egy légy. A pókok és a légy sebessége azonos. Elkaphatják-e a pókok a legyet?

4. Ketten amőbáznak. Amíg A játékos minden lépésben egy mezőt jelölhet be, addig B játékos minden lépésben kettőt. Akkor nyer B, ha tíz szomszédos jelöltje lesz. Megakadályozhatja-e A, hogy B nyerjen?

5. A k kör belsejében van az $ABCD$ négyzet. Tekintsük azt a kört, amely belülről érinti k-t és érinti az AB és AD egyenesek A-ból induló B-t és D-t nem tartalmazó felét, ez a kör k-t A'-ben érinti. Hasonlóan kapjuk B', C' és D' pontokat. Igazoljuk, hogy AA', BB', CC' és DD' egy ponton mennek át.

6. Hány olyan $p(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$ polinom van, amelynek együtthatói 100-nál nem nagyobb különböző pozitív egészek és $p(x)$ osztható x^2+x+1-gyel?

7. a, b olyan pozitív egészek, hogy $p=\frac{b}{4}\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$ prímszám. Legfeljebb mekkora lehet p?

8. BBH a t területű háromszögben $4t\left(tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\gamma}{2}\right)\le 9R^2$, ahol R a köréírt kör sugara.

Az 1-6. feladatokat megbeszéltük, a 7-8. házi feladat.

November 25.

1. 6 irracionális szám között mindig található-e három olyan, amelyek közül bármely kettő összege irracionális? És 5 között?

2. 3 fiú és 7 lány táncol. Biz lesz 2 fiú és 2 lány akik vagy egyáltalán nem táncoltak egymás közt, vagy minden párosításban táncoltak.

3. 10 ember találkozik, bármely 3 közt volt 2, akik nem fogtak kezet. Biz van 4, akik közt nem volt kézfogás.

4. K_6 éleit két színnel színezve legkevesebb hány egyszínű háromszög kleletkezik? K_7, K_8?

5. Egymás mellett van 10 kül. poz. eg. Max hány bekarikázását vállaljuk, hogy azok szig. mon. rendben legyenek.

6. Az 1, 2, …,n közt minden párt összekötünk piros, fehér, vagy zöld vonallal. Határozzuk meg a legkisebb n értéket, amire lesz $a<b<c<d$, melyekre ab, bc, cd színe azonos.

7. Legyen ABC hegyesszögű háromszög, melynek beírt köre az AB ill. AC oldalakat D ill. E pontokban érinti. Legyenek X ill. Y az $ACB\angle$ ill. $ABC\angle$ szögek szögfelezőinek metszéspontjai a DE egyenessel és legyen Z a BC szakasz felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy az XYZ háromszög akkor és csak akkor egyenlőoldalú, ha $BAC\angle = 60°$.

8. Egy számtani sorozat tagjai és differenciája is pozitív egészek. A sorozat első n tagjának a tízes számrendszerbeli alakjában sehol sem szerepel 9-es számjegy. Legfeljebb mekkora lehet n?

9. A K kerületű háromszög csúcsainak távolságösszege a sík tetszőleges P pontjától D, a háromszög oldalegyeneseinek távolságösszege P-től M. Bizonyítsuk be, hogy $4D^2\geq 4M^2+K^2$.

Házi feladat a 7.8.9. és az okt. 28-ai szakkör utolsó két példája.