## 2012. szeptember 14.

Ezen a szakkörön először megbeszéltük az idei olimpia két geometria feladatát. Ezt követően az 1-4 példákat megoldottuk, az 5-7 maradt házi feladatnak. A következő alkalmat Pelikán József tanár úr tartja szeptember 21-én. Erre előre elküldött egy példát házinak, melynek megoldása beadható névvel, iskolával emilcímmel a pénteki szakkör kezdetén.

IMO 2012.1. Az *ABC* háromszög *A* csúccsal szemközti hozzáírt körének középpontja *J*. Ez a hozzáírt kör a *BC* oldalt az *M* pontban, az *AB* és *AC* egyeneseket pedig a *K* ill. *L* pontban érinti. Az *LM* és *BJ* egyenesek metszéspontja *F*, a *KM* és *CJ* egyenesek metszéspontja pedig *G*. Legyen *S* az *AF* és *BC* egyenesek metszéspontja, *T* pedig az *AG* és *BC* egyenesek metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy *M* az *ST* szakasz felezőpontja.

**IMO 2012.5** Legyen az *ABC* háromszögben *C*-nél derékszög és legyen *D* a *C*-ből induló magasságvonal talppontja. Legyen a *X* a *CD* szakasz belső pontja. Legyen *K* az *AX* szakasznak az a pontja, amire *BK*=*BC*. Hasonlóan legyen *L* a *BX* szakasznak az a pontja, amire *AL*=*AC*. Legyen *M* az *AL* és *BK* egyenesek metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy *MK*=*ML*.

1. Egy háromszög két kisebb oldala a és b. Tudjuk, hogy $t=r_a r_b$. Mekkora a háromszög legnagyobb szöge?

2. Az *ABC* háromszög *AB* oldalához hozzáírt kör *AB*-t a *C*’ pontban érinti. Az *A*-ból induló magasságvonal felezőpontja *X*. Igazoljuk, hogy *XC*’ áthalad a beírt kör középpontján.

3. Egy nem szabályos háromszög köréírt körének középpontja *O*, az oldalegyeneseket érintő körök középpontjai: $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$. Bizonyítsuk be, hogy az $A_i$, $A_j$, $A_k$ pontok $OA_n$ egyenestől mért előjeles távplságainak az összege nullával egyenlő; (*i*,*j*,*k*,*n* az 1,2,3,4 számok tetszőleges permutációját jelentik. Két pontnak egy egyenestől mért távolsága akkor azonos előjelű, ha az egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak.)

4. Adottak a $k_1$, $k_2$ közös pont nélküli körök. Hatványvonaluk egy *P* pontjából a körökhöz húzott érintők az első kört *A*-ban és *B*-ben, a másodikat *C*-ben és *D*-ben érintik. Bizonyítsuk be, hogy az *ABCD* konvex négyszög átlóinak metszéspontja minden megengedett *P* pont esetében ugyanaz.

5. Az *ABC* háromszög *AB* oldalát kívülről érintő hozzáírt kör *AB*-t a *P* pontban, *AC* egyenesét a *Q* pontban érinti; a *BC* oldalt kívülről érintő kör pedig *AC* egyenesét az *U* pontban, *AB* egyenesét az *X* pontban érinti.
   Bizonyítsuk be, hogy a *PQ* és az *UX* egyenesek metszéspontja egyenlő távol van az *AB* és a *BC* egyenesektől.

6. Legyen az *ABC* háromszög *BC* oldalához írt körének *BC*-n lévő érintési pontja *G*. Igazold, hogy az *AG*-re *G*-ben állított merőlegesnek a *B* ill. *C* csúcsnál lévő külső szögfelező közti szakaszát *G* felezi!

7. Tegyük fel, hogy az *ABC* háromszög *AB* oldalán a *P* és *Q* pontok úgy helyezkednek el, hogy az *APC* és *QBC* háromszögek beírt köre egyenlõ sugarú. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az *AQC* és *PBC* háromszögek beírt köre is egyenlõ sugarú.

Jövő hétre házi feladat:
Határozzuk meg az összes olyan (*x*,*y*), egész számokból álló számpárt, amire teljesül:
$x^2+12=y^3$ .

## 2012. szeptember 21.

Ezt a szakkört Pelikán József tanár úr tartotta.

## 2012. október 12.

1. Fedhető-e a sakktábla 15 fekvő és 17 álló dominóval?

2. Egy $n \times n$-es tábla egy sarkát levágták, a maradék fedhető uannyi fekvő és álló dominóval. Mi lehet $n$?

3. Egy $10 \times 10 \times 10$-es doboz kitölthető-e $1 \times 1 \times 4$-es téglatestekkel?

4 Legyen $n$ poz. egész. $1 \times n$-es téglalapokból kirakunk egy $a \times b$ méretűt. Biz. $n$ osztja $a$-t, vagy $b$-t.

5. Egy $6 \times 6$-os táblát $1 \times 2$-es dominókkal fedtek. Biz. van olyan osztóvonal, amely nem vág ketté dominót.

6. Egy $n \times n$-es tábla négy sarkát levágjuk. Mely $n$-re fedhető a maradék $L$ alakú tetraminókkal ?

7. Egy $23 \times 23$-as táblát $1 \times 1$-es , $2 \times 2$-es és $3 \times 3$-as négyzetekkel fedünk. Legalább hány $1 \times 1$-es kell?

8. Egy nagy téglalapot kisebb téglalapokra vágtunk, melyeknek legalább egyik oldala egész hosszúságú. Biz. a nagy téglalap legalább egyik oldala egész hosszú.

9. Egy $5 \times 7$-es tábla fedhető-e L alakokkal (egy $2 \times 2$-esből elhagyok egy mezőt) úgy, hogy minden mezőt ugyanannyi rétegben fedünk? A L alakok nem lóghatnak le a tábláról.

10. Egy $8 \times 8$-as sakktábla mezőin lépegetünk, mindig oldalszomszédosakra és minden mezőt egyszer érintve visszajutunk a kiinduló mezőre. Lehet-e, hogy mindkét irányban 32 lépést tettünk?

11. Mely $n \times m$-es téglalapok fedhetők horgokkal? (Horog azon egységnégyzetek együtt, amelyek bal alsó sarka: (0;0) (0;1) (0;2) (1;2) (2;2) (2;1)

12. Az $ABC$ háromszög $AB$ oldalának hosszát ismerjük továbbá adott a $C$ pont és az $AB$ felezőpontjának helye. Hol lehet az $ABC$ magasságpontja?

## 2012. október 26.

Ezt a szakkört Pelikán József tanár úr tartotta.

## 2012. november 9.

1. A sík pontjait (a) 2; (b) 2012 színnel színeztük. Biz lesz téglalap, melynek csúcsai ugyanolyan színűek. (Téglalap helyett négyzettel a feladat sokkal nehezebb.)

2. A tér pontjai pirosak, vagy kékek. Biz vagy van egységnégyzet 3 piros csúccsal, vagy 4 kékkel.

3. (a) A sík pontjai pirosak, vagy kékek. (b) A tér pontjai 3 színűek. Biz valamelyik színből létezik két pont tetszőleges távolságra.

4. Tekintjük az ABCDA'B'C'D' kocka élvázát, az XX' felezőpontja X", AB' felezőpontja E, CD' felezőpontja F. További élek: A"E, EB, EB',B"C", C"F, FD, FD', D"A". Van-e minden ponton át út?

5. (a) A sík pontjai 3 színűek. Biz van két azonos színű pont 1 távolságra. (b) Tetszőleges színezés esetén van olyan szín, hogy az ilyen színű pontpárok közti távolságok közt minden pozitív valós szám előfordul.

6. Biz ha $n$ legalább 5, akkor $n$ síkbeli pont kiszínezhető két színnel úgy, hogy ne legyen olyan egyenes, melynek egyik oldalán vannak a kékek, másikon a pirosak. 5 helyett írhatunk kisebb számot is?

7. (a) Egységnégyzetek oldalait 4 színnel színezzük, majd összeragaszthatjuk az azonos színű élek mentén. Mely $k$ és $m$-re készíthető $k\times m$-es téglalap, melynek négy oldala különböző színű? (b) uez kockával, hat színnel és téglatesttel.

8. (a) A sík; (b) a gömbfelület pontjai két színűek. Biz van szabályos háromszög ugyanolyan színű csúcsokkal.

9. Piroska és Kálmán felváltva színezik a sík pontjait. Piroska egy pontot színez pirosra, Kálmán 100-at kékre. Létrehozhat-e Piroska piros csúcsú szabályos háromszöget, ha Kálmán ezt nem szeretné?

10. Egy egyszerű $n$ pontú teljes gráf éleit pirosra vagy kékre színezzük. Igazoljuk, hogy a gráf legalább $\frac{n(n-1)(n-5)}{24}$ egyszínű háromszöget tartalmaz.

## 2012. november 23.

Ezt a szakkört Pelikán József tanár úr tartotta.

## 2012. december 7.

1. Robinson kiúszott a partra és ott talált egy cédulát, melyen ez állt: „A kókuszpálmától lépkedj el a sziklaoszlopig, számold a lépéseket, ott fordulj balra derékszögben és lépj ugyananannyit. Ez a pont legyen *X*. Menj vissza a kókuszpálmához és lépkedj el a forrásig, újra számold a lépéseket, fordulj jobbra derékszögben és lépj ugyanennyit. Ez a pont legyen *Y*. *X* és *Y* közt félúton ástuk el a kincset.” Sajnos a kókuszpálmát kidönthette a vihar, a szikla és a forrás megvan. Segíts Robinsonnak megtalálni a kincset.

2. Egy négyszög oldalaira kifele négyzeteket rajzoltunk. Biz a szemköztiek középpontjait összekötő szakaszok egyenlő hosszúak és merőlegesek.

3. A tér négy pontja *A*, *B*, *C* és *D*. Ha a tér minden *X* pontjára $AX^2+CX^2=BX^2+DX^2$, akkor *ABCD* …..

4. Az *ABC* háromszög oldalaira kifele rajzoljuk a következő téglalapokat: $ABB_1A_2$, $BCC_1B_2$, $CAA_1C_2$. Bizonyítsuk, hogy az $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$ felezőmerőlegesei egy ponton mennek át.

5. Biz. az *ABC* szab.Δ köréírt körének tetsz. *P* pontjára a $PA^n+PB^n+PC^n$ mindig uannyi, ha $n=2$, vagy 4.

6. (Euler tétele) Az *ABCD* négyszög középvonalai *MN* és *PQ*, akkor $AC^2+BD^2=2MN^2+2PQ^2$.

7. Biz a tér tetsz. *A*, *B*, *C* és *D* pontjára (a) $AB^2+BC^2+CA^2\le 3(DA^2+DB^2+DC^2)$; (b) *AB* és *CD* akkor és csak akkor merőlegesek, ha $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$.

8. Az *ABCD* húrnégyszög oldalfelezőpontjaiból merőlegeseket állítunk a szemközti oldalakra. Biz egy ponton mennek át ezek a vonalak.

9. Az *ABCD* konvex négyszög átlóinak metszéspontja *P*, $AB=AC=BD$. Az *ABP* Δ köré és beírt körének közepe *O* és *I*. Biz, ha *O* és *I* különbözőek, akkor *OI* és *CD* merőlegesek.

10. Az *ABCD* húrnégyszög köréírt kör közepe *O*. Az *AB* és *CD* egyenesek metszéspontja *M*. Az *ACM* és *BDM* háromszögek köréírt köreinek közös pontjai *M* és *N*. Biz $MNO\angle=90°$.

## 2013. január 11.

0. OKTV II. kategória második forduló 2-3-4-es feladatok.

1. Legyen *n* adott poz. egész. Mutassuk meg, hogy az $x^2+y^2=n+z^2$ egyenletnek végtelen sok egész megoldása van.

2. Igazoljuk, hogy egyiknek sincs egész megoldása a) $4x^3-7y^3=2003$; b) $x^3+y^4=7$.

3. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan egész van, amely felírható két köb különbségeként, de nem írható fel két köb összegeként.

4. Igazoljuk, hogy $1/n+1/(n+1)+\ldots+1/(n+k)$ nem lehet egész.

5. $1+1/2+1/3+\ldots+1/(p-1)=a/b$. $p$ prím. Mutassuk meg, hogy $p|a$. Igaz-e, hogy ha $p>5$, akkor $p^2|a$?

## 2013. január 25.

1. Létezik-e olyan $N$ egész szám, amire $\left(\sqrt{1997}-\sqrt{1996}\right)^{1998}=\sqrt{N}-\sqrt{N-1}$ teljesül?

2. Határozzuk meg azokat az $\alpha$ valós számokat, amelyekre teljesül az, hogy minden n pozitív egészhez létezik olyan m egész szám, hogy $\left|\alpha-\frac{m}{n}\right|<\frac{1}{3n}$.

3. Az $ABC$ hegyesszögű háromszög köréírt körének középpontja $O$, a csúcsokhoz tartozó átmérők a szemközti oldalakat rendre az $A'$, $B'$, $C'$ pontokban metszik. Mekkorák lehetnek a háromszög oldalai, ha köréírt körének sugara $2p$ ($p$ prímszám), és tudjuk, hogy az $OA'$, $OB'$, $OC'$ szakaszok hossza egész szám?

4. Mennyi az $a$, $b$, $c$ betűkből készített olyan, 1997 hosszú sorozatok száma, amelyekben az $a$,$b$,$c$ betűk mindegyike páratlan sokszor fordul elő?

5. Az $ABC$ háromszög oldalaira kívülre rajzolt négyzetek legyenek $ABB_1A'$, $ACC_1A''$, és $BCDE$, a $BCDE$ négyzet középpontja legyen $P$. Bizonyítsuk be, hogy az $A'C$, $A''B$ és $PA$ egyenesek egy ponton mennek át.

6. Felbontható-e egy zárt körlemez két, közös pont nélküli, egybevágó rész egyesítésére?

7. Legyen $k$ tetszőleges egész szám. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan $m$ pozitív egész szám van, amihez találhatók $e_1$, $e_2$, …, $e_m$ számok úgy, hogy $k=e_1 1^2+e_2 2^2+\ldots+e_m m^2$ és minden $e_i$ 1 vagy -1.

## 2013. február 22.

1. Egy játékos a következő játékot játssza: ismételten feldob egy szabályos pénzérmét és tippel arra, hogy melyik oldalára esik. Ha eltalálja, egy pontot kap, ha nem, elveszti az addig esetleg megszerzett pontját. 0 ponttal kezd és akkor fejeződik be a játék, amikor 2 pontja lett.
   a, Mi annak a $p_n$ valószínűsége, hogy a játék pontosan n pénzfeldobás után ér véget?
   b, Mi a várható értéke ("átlaga") a játék befejeződéséig végrehajtott dobások számának?

2. Az ABC hegyesszögű háromszög köréírt körének középpontja O, sugara R. Az OBC, OCA, OAB háromszögek beírt köreinek sugarai $r_1$, $r_2$, $r_3$. Bizonyítsuk be, hogy
$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\geq\frac{1}{R}\left(4\sqrt{3}+6\right).$$

3. Legyenek a, b, c, n, k pozitív egészek. Legyen $f(x)=ax^2+bx+c$. Bizonyítsuk be, hogy található n egymás utáni pozitív egész szám: $a_1, a_2, ...., a_n$ úgy, hogy az $f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)$ számok mindegyikének legalább k különböző prímszámosztója van.

4. (EGMO valogató 1.) Az EF átmérőjű k kört az e egyenes az E pontban érinti. Tekintsük az e egyenes összes olyan A, B pontpárját, melyre az AB szakasz az E pontot tartalmazza és $AE \cdot EB$ egy rögzített állandó. Egy ilyen A, B pár esetén legyen A' és B' a k kör metszéspontja az AF és BF szakaszokkal. Bizonyítsuk be, hogy az A'B' húrok egy ponton mennek át.

5. (EGMO valogató 2.) Egy H különböző egész számokból álló halmazban egyik számnak sincs 30-nál nagyobb prímosztója.
   (a) Igazoljuk, hogy ha |H|=2013, akkor lehetséges, hogy nincs három olyan szám köztük, amelyek szorzata köbszám.
   (b) Igazoljuk, hogy ha |H|=80000, akkor biztosan van köztük három, melyek szorzata köbszám.

## 2013. március 8.

Ezen a szakkörön megbeszéltük a II. kategória OKTV döntős feladatait, a III. kategória feladatai közül pedig az 1. és 2. feladatokat.

## 2013. március 22.

1. Az $ABC$ háromszög egyik szöge $120°$-os. Bizonyítsa be, hogy a belső szögfelezőknek a szemben levő oldalakkal való metszéspontjai derékszögű háromszöget határoznak meg!

2. (EGMO válogató 3.) Határozzuk meg az összes pozitív egész megoldását:
   $$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i} = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} k_i = 5n-4.$$

3. (EGMO válogató 4.) Egy városban három iskola van A, B és C, melyek mindegyikébe legalább egy diák jár. Bárhogyan választunk három diákot, egyet A-ból, egyet B-ből, egyet C-ből, van közöttük kettő, akik ismerik egymást és van közöttük kettő, akik nem ismerik egymást. Biz az alábbiakból legalább egy teljesül: (i) $\exists$ olyan diák A-ban, aki $\forall$ diákot ismer B-ben. (ii) $\exists$ olyan diák B-ben, aki $\forall$ diákot ismer C-ben. (iii) $\exists$ olyan diák C-ben, ki $\forall$ diákot ismer A-ban.

4. Határozzuk meg az összes olyan x,y pozitív egész számokat, amelyekre $5^x-3^y=16$.

5. Az ABCDEF konvex hatszög oldalaira kifelé szabályos háromszögeket szerkesztünk. Bizonyítsuk be, hogy ezek harmadik csúcsai akkor és csak akkor lesznek egy szabályos hatszög csúcsai, ha az eredeti hatszög affin szabályos. (Egy hatszög affin szabályos, ha középpontosan szimmetrikus és szemközti oldalai párhuzamosak a maradék két csúcs által meghatározott átlóval.)

6. Legyen n pozitív egész szám. Tekintsük n összes partícióinak P halmazát. (n partíciója alatt értjük n egy felbontását pozitív egész számok összegére; két felbontást nem tekintünk különbözőnek, ha csak az összeadandók sorrenjében különböznek.) Ha $\alpha$ n egy partíciója, akkor jelöljük $a_1(\alpha)$, $a_2(\alpha)$, ...., $a_n(\alpha)$-val az $\alpha$-ban előforduló 1, 2, ..., n összeadandók számát. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{\alpha\in P}\frac{1}{1^{a_1(\alpha)}\cdot a_1(\alpha)!\cdot 2^{a_2(\alpha)}\cdot a_2(\alpha)!\cdot\ldots\ldots\cdot n^{a_n(\alpha)}\cdot a_n(\alpha)!}=1.$$