Olimpiai szakkör 2014-09-19.

1. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{21n+4}{14n+3}$ tört nem egyszerűsíthető.

2. IMO 2014, 1. feladat.

3. 20 háromszög között van-e mindig olyan, amelyik lefedhető a többivel?

4. IMO 2014, 2. feladat.

5. Felbontható-e az $x^4 + x^3 + x^2 + x + 12$ polinom legalább elsőfokú, egész együtthatós polinomok szorzatára?

6. Egy $m \times n$-es táblázat mezőiben áll egy valós szám úgy, hogy minden sorban és oszlopban a számok összege egész. "'Kerekíthetjük"'-e a számokat úgy, hogy a sorok és oszlopok összege ne változzon, és minden mezőben az új egész és az eredeti szám különbsége 1-nél kisebb legyen?

7. Egy alpinista 1000 méter magas sziklára szeretne feljutni. Ha a szikla tövében lévő táborban alszik, akkor másnap óránként 40 métert tud mászni felfelé. Ha a sziklán éjszakázik, akkor csak 30-at. Mászás közben rögzíti a mászókötelét. Kész kötélen 400 métert tud óránként megtenni felfelé és elhanyagoljuk azt az időt, amit esetleg leereszkedéssel tölt. Hány nap alatt érhet fel, ha napi 6 órát képes mászni (beleértve a kötélen mászást is)?

8. Egy teremben 11-en vannak. Tudjuk, hogy akárhogyan is választunk ki közülük kettőt, a többiek közül pontosan egy ismeri mindkettőjüket. Mutassuk meg, hogy van a teremben olyan, aki mindenki mást ismer.

Olimpiai szakkör 2014-10-03.

Jelölések: s a fél kerület, r a beírt kör, R a köréírt kör, r_a az a oldalt érintő hozzáírt kör sugara, az a oldalhoz m_a magasság, f_a belső szögfelező, s_a súlyvonal.

1. ABC hegyesszögű háromszög. Mely P pontjára lesz $PA + PB + PC$ maximális, illetve minimális?

2. IMO 2014, 4. feladat

3. Bizonyítsd be, hogy minden tetraédernek van olyan csúcsa, hogy a belőle induló élekből háromszög készíthető.

4. IMO 2014, 3. feladat

5. Bizonyítsuk be a következő geometriai egyenlőtlenségeket:

$$(a) \qquad 9r \le \sum m_a \le \sum f_a \le \sum s_a \le \frac{9}{2}R,$$

$$(b) \qquad \sum f_a \le \sum \sqrt{r_a r_b} \le \sqrt{3} \cdot s \le \sum r_a = r + 4R,$$

$$(c) \qquad 27r^2 \le \sum m_a^2 \le \sum f_a^2 \le s^2 \le \sum s_a^2 = \frac{3}{4}\sum a^2 \le \frac{27}{4}R^2,$$

$$(d) \qquad \frac{1}{r} = \sum \frac{1}{r_a} = \sum \frac{1}{m_a} \ge \sum \frac{1}{f_a} \ge \sum \frac{1}{s_a} \ge \frac{2}{R},$$

$$(e) \qquad \sum r_a^2 \ge 27r^2, \qquad (f) \qquad 4R < \sum r_a \le \frac{9}{2}R.$$

6. Legyen P az ABC hegyesszögű háromszög belsejében fekvő pont. Igazoljuk, hogy a háromszög kerületén fekvő ponmtoknak a P-től való távolságai közül a legnagyobb legalább kétszer akkora, mint a legkisebb.

7. ABC háromszög magasságpontja M, M vetülete az oldalakon A', B', C'. Mutassuk meg, hogy $\prod MA' \le \frac{Rr^2}{2}$.

Olimpiai szakkör 2014-10-17.

1. Igazoljuk: n egész szám között van néhány olyan, melynek összege osztható n-nel.

2. Az $1, 2, \ldots, 2n$ számokból kiválasztva $n+1$-et, van ezek között kettő úgy, hogy a kisebbik osztja a nagyobbikat.

3. Ha $(a, b) = 1$, akkor létezik olyan x, y egész szám, hogy $ax - by = 1$.

4. Egy sakkmester 77 nap alatt legfeljebb 132 partit játszott, de minden nap játszott legalább egyet. Mutassuk meg, hogy van néhány egymás utáni nap, melyek alatt éppen 21 partit játszott.

5. Az $1, 2, \ldots, 101$ számokat valamilyen sorrendben felírták. Állítás: letörölhető 90 úgy, hogy a maradék monoton növő, vagy csökkenő sorozatot alkosson.

6. Mely számoknak van olyan többese, amelyben csak 1 és 2 jegyek szerepelnek?

7. Van-e olyan Fibonacci-szám, amely legalább 2010 darab 0-ra végződik?

8. Egy $5m^2$-es szobában van 9 szőnyeg, mindegyik $1m^2$ területű. Igazoljuk, hogy van két olyan szőnyeg, amely legalább $1/9m^2$ területen fedi egymást.

9. Igaz-e, hogy minden pozitív egész n-nek van olyan többszöröse, melyben a jegyek összege n?

10. Igaz-e, hogy minden pozitív egész n-nek van olyan többszöröse, melyben a jegyek összege megegyezik n jegyeinek összegével?

11. Nevezzünk egy pozitív egészet alternálónak, ha jegyei közül nincs két szomszéd, amely azonos paritású. Mely n pozitív egészeknek van alternáló többszörösük?

Olimpiai szakkör 2014-11-07.

1. Prím-e $1\underbrace{00\ldots0}_{2009\text{ db}}1$, 1280000401, $545^4 + 4^{545}$?

2. Biz. nincs 9-jegyű négyzetszám, melynek jegyei az $1, 2, \ldots, 9$ valamely sorrendben, és amely 5-re végződik.

3. Választunk egy többjegyű N számot, majd készítünk egy végtelen sorozatot úgy, hogy mindig egy jegyet - ami nem 9 - jobbra a végére írunk. Biz. végtelen sok összetett szám lesz a sorozatban.

4. Az $1, 9, 7, 7, 4, 7, 5, 3, 9, 4, 1$ sorozatban az ötödiktől kezdve minden elem az előző négy összegének a 10-es maradéka. Előfordul-e a sorozatban a következő részlet: (a) $1, 2, 3, 4$, (b) $3, 2, 6, 8$, (c) $0, 1, 9, 7$?

5. A csupa 0-n kívül hány egész megoldása van az $x^2 + y^2 + z^2 = nxyz$ egyenletnek, ha (a) $n = 2$, (b) $n = 3$?

6. Mely pozitív egész n esetén lesz négyzetszám $\lfloor n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \rfloor$?

7. Adjunk meg olyan 2-vel és 9-cel osztható számot, amelynek (a) 14, (b) 15, (c) 17 osztója van.

8. Biz. végtelen sok olyan pozitív egész n van, amelyre 2^n végződése éppen n.

9. Biz. ha $n \geq 3$, akkor 2^n felírható $2^n = 7x^2 + y^2$ alakban, ahol x és y páratlan egészek.

Olimpiai szakkör 2015-11-21.

1. Robinson kiúszott a partra és ott talált egy cédulát, melyen ez állt: "A kókuszpálmától lépkedj el a sziklaoszlopig, számold a lépéseket, ott fordulj balra derékszögben és lépj ugyanannyit. Ez a pont legyen X. Menj vissza a kókuszpálmához és lépkedj el a forrásig, újra számold a lépéseket, fordulj jobbra derékszögben és lépj ugyanennyit. Ez a pont legyen Y. X és Y között félúton ástuk el a kincset." Sajnos a kókuszpálmát kidönthette a vihar, a szikla és a forrás viszont megvan. Segíts Robinsonnak megtalálni a kincset.

2. Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzoltunk. Biz. a szemköztiek középpontjait összekötő szakaszok egyenlő hosszúak és merőlegesek.

3. A tér négy pontja A, B, C, D. Ha a tér minden X pontjára $AX^2 + CX^2 = BX^2 + DX^2$, akkor mi teljesül $ABCD$-re?

4. Az ABC háromszög oldalaira kifelé rajzoljuk a következő téglalapokat: ABB_1A_2, BCC_1B_2, CAA_1C_2. Bizonyítsuk, hogy az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 felezőmerőlegesei egy ponton mennek át.

5. Biz. az ABC szabályos háromszög köréírt körének tetszőleges P pontjára $PA^n + PB^n + PC^n$ ugyanannyi, ha $n \in \{2, 4\}$.

6. (Euler tétele) Az $ABCD$ négyszög középvonalai MN és PQ. Igazoljuk: $AC^2 + BD^2 = 2(MN^2 + PQ^2)$.

7. Biz. a tér tetszőleges A, B, C, D pontjára a) $AB^2 + BC^2 + CA^2 \le 3(DA^2 + DB^2 + DC^2)$, b) $AB \perp CD$ pontosan akkor, ha $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

8. Az $ABCD$ húrnégyszög oldalfelezőpontjaiból merőlegeseket állítunk a szemközti oldalakra. Biz. egy ponton mennek át ezek a vonalak.

9. Az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja P, $AB = AC = BD$. Az $ABP\triangle$ köréírt és beírt körének középpontja O és I. Biz, ha O és I különbözőek, akkor $OI \perp CD$.

10. $ABCD$ húrnégyszög köréírt körének középpontja O. Az AB és CD egyenesek M-ben metszenek, az ACM és BDM körök pedig $\{M, N\}$ pontokban. Biz $MNO\angle = 90°$.

Olimpiai szakkör 2015-01-09.

1. Legyenek A és B a k kör belsejében az O középpontra szimmetrikus pontok. A körön kívüli teszőleges P pontra $PA < PB$. A PA átmérőjű kör k-t M és N pontokban metszi. Bizonyítsuk be, hoy $MPA\angle = BPN\angle$.

2. Lehet-e $2^n + 3^n$ négyzetszám, ha n pozitív egész?

3. Oldjuk meg az egész számok halmazán: $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 378$.

4. Egy háromszögben $\tan\alpha + \tan\beta = 2\tan\gamma$. Igazoljuk, hogy $\sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2\sin 2\gamma$.

5. Egy üdülő bármely három lakója között van kettő, aki nem ismeri egymást, de bármely 7 között van legalább 2, aki ismeri egymást. Az üdülés végén mindenki megajándékozza minden ismerősét egy-egy képeslappal. Bizonyítsuk be, hogy n üdülő eetén legfeljebb $6n$ képeslapra van szükség. Adjunk n-re felső korlátot!

6. Oldjuk meg a pozitív egészeken: $3^n + 4^n + \cdots + (n+2)^n = (n+3)^n$.

7. Egy különböző számokból álló számtani sorozatról tudjuk, hogy kilencedik tagja a második tag köbével egyenlő, továbbá a második tag négyzete és negyedik hatványa is tagja a sorozatnak. Írjuk fel a sorozat első két tagját.

8. Mutassuk meg, hogy 1-től 1986-ig a természetes számok kiszínezhetők két színnel úgy, hogy ne forduljon elő olyan 18 tagú számtani sorozat, amelynek minden eleme azonos színű.

Olimpiai szakkör 2015-01-23.

1. Az $ABCD$ téglalapból úgy vágtuk ki az AXY szabályos háromszöget, hogy $X \in BC$, $Y \in CD$. Állítás: a téglalapból megmaradó három derékszögű háromszög közül kettő területének összege a harmadik területével egyenlő.

2. Adott: $a, b, c > 0$. Legyen $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(b-x)^2 + c^2}$. Mi az f minimuma?

3. A C csúcsú szög egyik szárára mérjük fel a CA, másikra a CB szakaszt úgy, hogy $CA + CB$ adott. Biz. van olyan $P \neq C$ pont, hogy az összes ilyen háromszög köré írt kör áthalad P ponton.

4. Tekintsük az $1, 2, \ldots, 1986$ számokat. Legfeljebb hány választható ki belőlük úgy, hogy nincs köztük három egymáshoz páronként relatív prím?

5. A Mathlon olyan verseny, amely M különféle atlétikai számból áll. Egy ilyenen hárman vettek részt: A,B,C. Minden versenyen a győztes p, a második q, a harmadik r pontot kap, ahol $p > q > r > 0$ egészek. Holtverseny nem volt. Tudjuk, hogy A,B,C rendre 22,9,9 pontot szerzett.
Tegyük fel, hogy B nyerte a 100 méteres síkfutást. Mennyi lehet M, és ki volt a második magasugrásban?

6. Mely egészekre igaz $xyz + xz + yz - xy - x - y + z = 1986$?

7. Igaz-e, hogy ha u és v olyan valósok, amelyekre u, v, uv egy racionális együtthatójú harmadfokú polinom három gyöke, akkor uv racionális?

8. Mely m számra létezik m darab páronként különböző maradékot adó szám (mod m), melyek mindegyike csak az 1 számjegyet tartalmazza?

Olimpiai szakkör 2015-02-06.

1. Mely $a, b, c > 0$ egészekre lesz $a! \cdot b! = a! + b! + c!$?

2. Az első 1986 számot valamilyen sorrendben egymás mellé írtuk. Kaphatunk-e így négyzetszámot?

3. Adott egy 25-jegyű A természetes szám. Egy abc szám kiolvasható A-ból, ha A-ban a-tól jobbra van b, b-től jobbra van c. Mutassuk meg, hogy van olyan nem 0-val kezdődő csupa különböző jegyből álló abc szám, amely nem olvasható ki A-ból.

4. Egy 25×25-ös négyzet alakú táblába az 1 és -1 sámokat írtuk. Minden oszlop alá odaírjuk a számok szorzatát, ugyanígy a sorok mellé. Lehet-e az így kapott 50 szám összege 0?

5. A $[0;1]$-en értelmezett folytonos f függvényre $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, továbbá minden $0 < x < 1$-hez van olyan h, hogy $0 \leq x - h < x + h \leq 1$ és $f(x) = \frac{f(x-h)+f(x+h)}{2}$. Igazoljuk, hogy $f(x) = x$ minden $x \in [0;1]$-re.

6. Az ABC háromszög súlypontja S, és az AS, BS, CS félegyenes a körülírt kört A_1, B_1, C_1 pontban metszi. Igazoljuk, hogy $SA_1 + SB_1 + SC_1 \geq SA + SB + SC$.

7. Egy szabályos ötszögnek P belső vagy határpontja, és távolsága az oldalaktól valamilyen sorrendben $d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq d_4 \leq d_5$. Határozzuk meg d_3 maximális és minimális értékét.

Olimpiai szakkör 2015-03-04.

1. Egy 1×1 méteres négyzet alakú ketrecben egy tízméteres anakonda van. Münchausen báró azt állítja, hogy egyetlen lövéssel legalább hat helyen át tudja lőni. Nem túloz egy kicsit a báró? (Tekintsük az anakondát tíz méter hosszú töröttvonalnak.)

2. Arthur király kerekasztala mellett 13 lovag ül, ezek k családhoz tartoznak ($1 < k < 13$). Valamenynien egy arany, vagy egy ezüst serleget tartanak a kezükben, az aranyserlegek száma éppen k. Arthur király parancsot ad a lovagoknak, hogy a következő percben adják át serlegüket a jobb oldali szomszédjuknak, majd ezt ismételjék 12-szer. Bizonyítsuk be, hogy valamelyik percben volt két azonos családból származó lovag, akik aranyserleget tartottak a kezükben.

3. Egy 5×5-ös telket 25 darab parcellára osztunk. Van 25 manónk, akik közül mindegyik legfeljebb három másikat utál. (Az utálat kölcsönös.) Szétoszthatók-e a manók a parcellákba úgy, hogy senki se utálja a szomszédait?

4. Egy szabályos hatszöget készítettünk 24 egybevágó kis szabályos háromszögből. Az így kapott hálózat 19 rácspontjához különböző egészeket írtunk. Bizonyítsuk be, hogy a 24 kis háromszög között lesz legalább 7 olyan, amelyek csócsaiban levő 3 szám a pozitív forgásirány szerint növekszik.

5. Legfeljebb mennyi lehet egy irányított teljes gráfban a háromszögek száma?

6. Egy $2n$ pontú gráfban van $n^2 + 1$ él. Igazoljuk, hogy van benne legalább 1, sőt legalább n háromszög.

7. Igazoljuk, hogy egy tetszőleges gráfból ki lehet törölni az élek nem több, mint $\frac{1}{k-1}$-ed részét úgy, hogy a maradék gráfban akárhogyan is választunk ki k pontot, ezek között van kettő, melyek nincsenek összekötve ($k \geq 3$).

Olimpiai szakkör 2015-03-27.

[Surányi emlékverseny, azaz 1. válogató feladatai, illetve:]

4. Az N négyzetre helyezett k kör a négyzetből négy görbevonalú háromszöget vág le (amit egy körív és két szakasz határol). Két szemközti piros, a másik kettő kék. Biz. a kék és piros háromszögek kerületének összege megegyezik.

5. Az x, y, z olyan pozitív egészek, amelyekre az $\frac{x(y+1)}{x-1}$, $\frac{y(z+1)}{y-1}$, $\frac{z(x+1)}{z-1}$ mindegyike pozitív egész. Mi az xyz lehetséges legnagyobb értéke?

6. Egy szabályos nyolcszög csúcsait négy színnel színezzük úgy, hogy szomszédos csúcsok színe nem lehet azonos. Hány színezés van, amelyben (a) minden szín két csúcsnál szerepel; (b) nincs korlátozva a színek száma, lehet akár 0 is.

7. Tekintsük egy kocka három olyan lapátlójának egyenesét, amelyek páronként kitérőek. Az e egyenes az iménti három egyenes mindegyikével ugyanakkora szöget zár be. Mekkora lehet ez a szög?

8. Egy n tagú számtani sorozat elemei közül kiválasztható k elem, melyek növekvő mértani sorozatot alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy $n \geq 2^{k-1}$.

9. Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_{2015}$ valós számok. Ugyanezen számok valamely $y_1, y_2, \ldots, y_{2015}$ permutációjára $3y_1 - x_1 = 2x_2$, $3y_2 - x_2 = 2x_3$, ..., $3y_{2015} - x_{2015} = 2x_1$. Igazoljuk, hogy minden x_i ugyanakkora!

Olimpiai szakkör 2015-04-10.

1. Egy 2015×2015-ös sakktábla minden mezőjébe egynél kisebb abszolútértékű számot írtunk. Tudjuk, hogy bármely 2×2-es négyzetben lévő számok összege 0. Bizonyítsuk be, hogy a táblázatbeli számok összege 2015-nél kisebb.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha n olyan pozitív egész, amelyre az $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$ egyenletnek van egész számokból álló (x, y) megoldása, akkor van legalább három ilyen megoldása. Mutassuk meg, hogy az egyenletnek nincs egész megoldása, ha $n = 2891$.

3. Igazoljuk, hogy négy páronként egymást érintő gömb hat érintési pontja vagy egy síkon, vagy egy gömbön van.

4. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög AB és CE átlóit a belső M és N pont úgy osztja fel, hogy $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r$. Határozzuk meg r értékét, ha B, M, N egy egyenesen fekszik.

5. Szeretnénk kiválasztani a 900 osztói közül néhányat úgy, hogy a 900 tetszőleges d osztójához létezzen a kiválasztottak közül olyan t, amelyre $30 \mid \frac{[d,t]}{(d,t)}$. Legalább hány osztót kell ehhez kiválasztani? Oldjuk meg a feladatot 900 helyett 210^2-re és 210^3-re is.

6. Legyen S egy négyzet, amelynek oldalhosszúsága 100 és L egy S-ben fekvő önmagát nem metsző $A_0A_1A_2 \dots A_n$ töröttvonal, ahol $A_0 \neq A_n$. Tegyük fel, hogy az S négyzet határának minden pontjához van L-nek olyan pontja, amelynek P-től való távolsága nem nagyobb $\frac{1}{2}$-nél. Bizonyítandó, hogy van L-en olyan X és Y pont, amelyeken távolsága nem nagyobb 1-nél és L-nek X és Y közötti része legalább 198 hosszúságú.