2015. szeptember 18.

1. Az *ABCD* négyzet *BC* illetve *CD* oldalán úgy vettük fel az *E* és *F* pontot, hogy *BE*+*DF*=*AE*. Bizonyítsuk be, hogy *AF* az *EAD*∠ felezője.

2. Az *ABC* háromszög körülírt köre Ω, a körülírt kör középpontja *O*. Egy *A* középpontú *k* kör a *BC* szakaszt a *D* és *E* pontokban metszi, ahol *B*, *D*, *E*, *C* páronként különböző pontok, amelyek a *BC* egyenesen ebben a sorrendben fekszenek. Legyenek *F* és *G* a *k* és *W* körök metszéspontjai, ahol *A*, *F*, *B*, *C*, *G* ebben a sorrendben követik egymást a Ω körön. Legyen *K* a *BDF* háromszög körülírt körének és az *AB* szakasznak a másik metszéspontja. Legyen *L* a *CGE* háromszög körülírt körének és a *CA* szakasznak a másik metszéspontja. Tegyük fel, hogy az *FK* és *GL* egyenesek különbözők és az *X* pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, az *X* pont az *AO* egyenesen fekszik.

3. Az *ABCD* trapéz *AD* és *BC* oldalai párhuzamosak, az átlók metszéspontja *O*, *CD*=*AO* és *BC*=*OD*. *CA* a *BCD*∠ szögfelezője. Mekkora az *ABC*∠?

4. Az *ABC* háromszög *AB*, *BC*, *AC* oldalán felvettük rendre a *D*, *E*, F pontot úgy, hogy *EB*=*ED* és *EF*=*EC*. Biz., hogy a *DAF* háromszög körülírt körének középpontján átmegy az FED∠ felezője.

5. A szabályos ABC háromszög BC és AC oldalán van D és E úgy ,hogy ha a háromszöget összehajtjuk a DE egyenes mentén, akor C éppen a BA-ra kerül C'-be, továbbá DC'B∠=90°. Mekkora a DEC'∠?

6. Az *ABC* hegyesszögű háromszög *BC*, *CA* és *AB* oldalain a magasságvonalak talppontjai legyenek rendre *D*, *E*, *F*. Az *EF* egyenes egyik metszéspontja az *ABC* háromszög köré írt körével legyen *P*. Legyen a *BP* és *DF* egyenesek metszéspontja *Q*. Igazoljuk, hogy *AP*=*AQ*.

7. Az ABC háromszögben legyen AP a BAC∠ felezője, ahol P a BC oldalon van, BQ pedig az ABC∠ felezője, ahol Q a CA oldalon van. Tudjuk, hogy BAC∠=60° és hogy AB+BP=AQ+QB. Mik az ABC háromszög szögeinek lehetséges értékei?

8. Legyen *P* egy pont az *ABC* háromszög belsejében. Az *AP*, *BP* és *CP* egyenesek másik metszéspontja az *ABC* háromszög Γ körülírt körével legyen rendre *K*, *L* és *M*. A Γ körhöz *C* pontban húzott érintő messe az *AB* egyenest az *S* pontban. Tegyük fel, hogy *SC*=*SP*. Bizonyítsuk be, hogy *MK*=*ML*.

2015. október 2.

1. Van két piros, két fehér és két zöld golyónk. Minden szín esetén az egyik 30, a másik 31 grammos ránézésre egyformák. Egy kétkarú mérleggel szeretnénk két méréssel azonosítani a nehezebb golyókat.

2. A sík pontjainak egy véges *S* halmazát kiegyensúlyozottnak nevezzük, ha *S* bármely két különböző *A*, *B* pontjához van *S*-nek olyan *C* pontja, amire $AC=BC$. *S*-et centrum-nélkülinek nevezzük, ha *S* bármely három páronként különböző *A*, *B*, *C* pontjára teljesül az, hogy nincs *S*-nek olyan *P* pontja, amire $PA=PB=PC$. (a) Biz, bármely $n\geq3$ egészre létezik *n* elemű kiegyensúlyozott halmaz. (b) Mely $n\geq3$-re létezik *n* elemű kiegyensúlyozott, centrum-nélküli halmaz?

3. Van 5 piros golyónk, mindegyik 1000 grammos. Van 5 kék is, ezek közül három súlya 1000, egy 1001, egy pedig 999 gramm. Három méréssel azonosítsuk a könnyű és a nehéz golyót egy kétkarú mérleggel.

4. Határozzuk meg az összes olyan legalább három pontot tartalmazó véges síkbeli *S* ponthalmazt, amire a halmaz bármely két különböző *A* és *B* pontjának felezőmerőlegese *S*-nek szimmetriatengelye.

5. Van egy kétkarú mérleg és 1, 2, 4, 8, 16 és 32 grammos mérősúlyok, mindegyikből egy darab. Egy *n*-grammos tárgyat $k(n)$ féle módon lehet leméri. Mely *n*-re lesz $k(n)$ maximális és mennyi ez a maximum?

6. Adott a síkban 5 pont. A pontokat összekötő egyenesek között nincs párhuzamos, merőleges és egybe-eső. Pirossal meghúzunk minden olyan egyenest, amely áthalad valamely ponton és merőleges másik két pont által meghatározott egyenesre. Adjunk felső becslést a piros egyenesek metszéspontjainak számára.
7. Van 9 súlyunk, rajtuk a számok 1g, 2g, …, 9g. Az egyik súly hibás, a feliratánál könnyebb. Kétkarú mérleggel keressük meg minél kevesebb méréssel a hibását.

8. *S* a sík legalább kételemű ponthalmaza, nincs három pontja egy egyenesen. Szélmalomnak nevezzük, ha egy egyenest húzunk *S* valamely *P* pontján keresztül, majd ezt óra járása szerint forgatjuk, míg nem találkozik egy másik *Q* ponttal. Ekkor *Q* lesz az új tengely és óra járása szerint tovább forog az egyenes, és így tovább a végtelenségig. Biz. van *S*-nek olyan *P* pontja és rajta áthaladó *l* egyenes, amiből indítva a szélmalmot *S* minden pontja végtelen sokszor lesz forgástengely.

9. Van öt, páronként különböző súlyú tárgy. Kétkarú mérleggel határozzuk meg a nagyság szerinti sorrendjüket.

2015. október 16.

1. Mutassuk meg, hogy ha n természetes szám, akkor a $(21n+4)/(14n+3)$ tört nem egyszerűsíthető.

2. Mely háromjegyű pozitív egészek egyenlők jegyeik négyzetösszegének a 11-szeresével?

3. (a) Melyek az n összes olyan pozitív egész értékei, amelyekre $2^n–1$ osztható 7-tel? (b) Biz. 2^n+1 sohasem osztható 7-tel, bármilyen pozitív egészet is jelent n.

4. Határozzuk meg az összes olyan x természetes számot, amelyre $p(x)=x^2–10x–22$, ahol $p(x)$ az x jegyeinek szorzata.

5. Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelyre az $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ halmaz úgy bontható fel két közös elemet nem tartalmazó és nem üres halmazra, hogy az egyik részhalmaz elemeinek szorzata a másik részhalmaz elemeinek szorzatával egyenlő.
6. Egész megoldásokat keresünk: (a) $x^2+y^2+z^2=x^2y^2$; (b) $x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3$.

7. Mely pozitív egészekből álló $(a;b)$ számpárokra lesz (ab^2+b+7) osztója (a^2b+a+b)-nek?

8. Mely pozitív egészekből álló $(a;b)$ számpárokra lesz $a^2/(2ab^2–b^3+1)$ pozitív egész?

9. Legyen p prímszám. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan q prímszám, amivel minden n egész számra igaz, hogy $n^p–p$ nem osztható q-val.

2015. november 6.

1. Az a_n sorozatról tudjuk, hogy $a_1>a_0$, $n>1$-esetén $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$. Igazoljuk, hogy $a_{100}>2^{99}$.

2. Egy kör mentén vannak az 1,2,….,12 számok. Hányféleképpen színezhetjük őket 4 színnel úgy, hogy szomszédosak színe különböző legyen?

3. Az a_n sorozatról tudjuk, hogy $a_1=0$, $|a_2|=|a_1+1|$, …,$|a_n|=|a_{n-1}+1|$. Igazoljuk, hogy $(a_1+a_2+\ldots+a_n)/n\geq -1/2$.

4. Az n pozitív egész osztói legyenek $d_1,\ldots d_s$. Igazoljuk, hogy $\sum\left(d\left(d_i\right)\right)^3=\left(\sum d\left(d_i\right)\right)^2$.

5. Minden valós x-re $f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}\,f(x)$. Igazoljuk, hogy a függvény periodikus.

6. Hanoi tornyai: Van három rúd A, B, és C, ezek közül az A-n van 7 korong, átmérőjük 1, 2, …, 7 cm. A korongokat egyesével áttehetjük más rúdra. Nagyobb korong, nem kerülhet nála kisebbre. Hány mozdulattal oldható meg a feladat, ha (a) A és C közt nem engedélyezett a mozgás; (b) A-ról csak B-re, B-ről csak C-re, C-ről csak A-ra lehet pakolni.

2015. december 4.

1. Az ABC háromszög minden csúcsa az N négyzet belsejében van. A csúcsok tükörképei a háromszög súlypontjára A', B', C'. Igaz-e, hogy ezek közül legalább egy N-nek belső pontja?

2. Egy 21 fős osztályból 20 gyereket libasorba állítunk és ezt így jelöljük ($k1$, $k2$, …$k20$). Két libasort ($k1$, $k2$, …$k20$) és ($n1$,$n2$,…,$n20$) átlósnak nevezünk, ha létezik i,j különböző indexek, melyekre ki=nj. Legfeljebb hány libasort választhatunk úgy, hogy bármely kettő közülük átlós legyen?

3. Az ABC háromszög beírt köre az AC, AB és BC oldalakat rendre K, M, N-ben érinti, középpontja O. A B-ből induló súlyvonal D-ben metszi MN-t. Mutassuk meg, hogy O,D,K egy egyenesen vannak.

4. Egy társaságban bármely 4 ember között van olyan, aki a másik 3 közül pont egyet ismer. Mennyi a társaság maximális létszáma?

5. 23 pár (46 darab) zokni közül kiválasztunk találomra 10 darabot. Mennyi a kihúzottak közti párok számának várható értéke?

6. Adott a síkon 10 pont úgy, hogy bármely öt között található négy, melyek egy körön vannak. Legalább hány pontnak kell ekkor egy körön lennie?

7. Keressük meg mindazon f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényeket, melyekre minden valós x,y esetén $f(x+y)+f(x)f(y)=f(xy)+f(x)+f(y)$.

2016. január 8.

1. Bizonyítsuk be, hogy $1!\cdot 2!\cdot \ldots \cdot 2015! < \dfrac{1008!^{4032}}{(1!\cdot 2!\cdot \ldots \cdot 1008!)^4}$.

2. A Telefüle telefontársaság egyik kapcsolótábláján 400 kimenet van. Bármely kettőt összeköti egy vezeték, mely piros vagy kék. A piros és kék vezetékek száma megegyezik. A rendszer megbénul, ha két azonos színű vezetéket kiveszünk, melyek négy pont között futnak. Mutassuk meg, hogy a konkurens cég technikai banditái ugyanannyiféleképpen beníthatják meg a központot két piros vezeték eltávolításával, mint két kékkel.

3. Az *ABCD* konvex négyszögben $DAB\angle = ABC\angle = BCD\angle$. Jelölje az *ABC* háromszög magasságpontját *M*, köréírt körének középpontját *O*. Mutassuk meg, hogy *O*, *M*, *D* kollineárisak.

4. A $p_n(x)$ polinomot a következő rekurzióval definiáljuk: $p_0(x)=0$, $p_1(x)=x$ és $p_n(x)=xp_{n-1}(x)+(1-x)p_{n-2}(x)$, ha $n>1$. Minden pozitív egész *n*-hez határozzuk meg $p_n(x)$ gyökeit.

5. Legyenek *a*,*b*,*c* egy háromszög oldalainak mérőszámai. Bizonyítsuk be, hogy
$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$

6. Legyenek *m* és *n* pozitív egészek, $n \le m$. Mutassuk meg, hogy
$2^n \cdot n! \le \dfrac{(m+n)!}{(m-n)!} \le (m^2+m)^n$

7. Egy húrnégyszög bármely három csúcsa alkotta háromszögnek vegyük a beírt körének középpontját. Bizonyítsuk be, hogy ezek téglalapot alkotnak.

2016. február 12.

1. Adott a síkon n db. Különböző pont, P_1, P_2, …, P_n. Adottak továbbá az s_1, s_2, …, s_n számok úgy, hogy minden $i \neq j$ esetén $P_iP_j^2 = s_i + s_j$. Mutassuk meg, hogy n nem lehet 4-nél nagyobb és $n=4$ esetén $1/s_1+1/s_2+1/s_3+1/s_4=0$.

2. Mely egész k-ra létezik olyan fv, amely a poz. egészekből az egészekbe képez és $f(1995)=1996$ és minden x,y poz. egészre $f(xy)= f(x)+f(y)+kf(\text{lnko}(x;y))$.

3. Legyen M a hegyesszögű ABC háromszög magasságpontja. Az A-ból induló a BC átmérőjű körhöz húzott érintők érintési pontjai legyenek P és Q. Mutassuk meg, hogy P, M, Q egy egyenesen vannak.

4. Egy énekversenyen 8 énekes vett részt. Összesen d dalt énekeltek, mindegyiket négyen adták elő és bármely két énekes ugyanannyi dalt adott elő közösen. Mi a legkisebb d, amire ez lehetséges?

5. Adott n pozitív szám s_1, s_2, …, s_n melyek összege 1. Biz
$$1 \le \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{\sqrt{1+s_1+\ldots+s_{i-1}} \cdot \sqrt{s_1+\ldots+s_n}} < \frac{\pi}{2}.$$

2016. március 4.

1. Legyen *M* a hegyesszögű *ABC* háromszög magasságpontja. Az A-ból induló a *BC* átmérőjű körhöz húzott érintők érintési pontjai legyenek *P* és *Q*. Mutassuk meg, hogy *P*, *M*, *Q* egy egyenesen vannak.

2. Egy énekversenyen 8 énekes vett részt. Összesen *d* dalt énekeltek, mindegyiket négyen adták elő és bármely két énekes ugyanannyi dalt adott elő közösen. Mi a legkisebb *d*, amire ez lehetséges?

3. Adott *n* pozitív szám $s_1, s_2, \dots, s_n$ melyek összege 1. Biz
$$1 \le \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{\sqrt{1+s_1+\dots+s_{i-1}} \cdot \sqrt{s_i+\dots+s_n}} < \frac{\pi}{2}.$$

4. Biz. ha *n* 2-nél nagyobb egész, akkor létezik két páratlan szám x_n és y_n, amelyekre $7x_n^2 + y_n^2 = 2^n$.

5. Egy $n\times n$-es táblába beírjuk az 1, 2, …, n^2 számokat. Minden szám beírásakor felírjuk egy papírra a sorába és oszlopába már beírt számok összegét. Hogyan töltsük ki a táblát, hogy a papírra írt számok összege a lehető legkisebb legyen?

6. Definiáljuk a következő sorozatot: $a_1=1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{n}{a_n}$, $n\ge 1$. Biz, ha *n* legalább 4, akkor $\left[a_n^2\right] = n$.

7. Legyenek *m*, *k* poz. egészek. Mutassuk meg, hogy *m*-nek létezik egy egyértelmű felbontása a következő formában: $m = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{a_t}{t}$, ahol $a_k > a_{k-1} > \dots > a_t \ge t \ge 1$.

8. Keressük meg a legnagyobb poz. egész *n* számot, amelyre léteznek olyan $x_1, x_2, \dots, x_n$ nemnegatív egészek, nem mind 0, hogy az $a_1, a_2, \dots a_n$ számok bármely sorozatára n^3 nem osztja az $a_i x_i$ számok összegét. (Az a_i számok mindegyike -1, 0, 1 valamelyike, de nem mind 0.)

9. Az *ABC* tompaszögű háromszögben $2AB=BC<AC$. *BC* felezőpontja *D*, *DC* felezőpontja *E*. AC felezőmerőlegesének és AB egyenesének metszéspontja *F*. Igazoljuk, hogy $FBC\angle = 2FEB\angle$.

2016. április 8.

1. Legyenek a es b pozitív egészek, amelyekre a!b! az a!+b!-nak többszöröse. Bizonyítsuk be, hogy $3a \geq 2b+2$.

2. Pozitív valós számoknak egy a1,a2,… sorozatára teljesül $a_{k+1} \geq \dfrac{ka_k}{a_k^2+k-1}$ minden pozitív egész k esetén. Bizonyítsuk be, hogy a1+a2+…+an≥n teljesül minden n≥2-re.

3. Az *ABC* derékszögű háromszög *C* csúcsából az *AB* átfogóra bocsátott magasságvonal talppontja legyen *H*. A *CBH* háromszög egy belső *D* pontjára teljesül, hogy az *AD* szakaszt felezi *CH*. Legyen a *BD* és *CH* egyenesek metszéspontja *P*. Legyen továbbá *k* az a *BD* átmérőjű félkör, amely a *CB* szakaszt metszi. A *k*-hoz *P*-ből húzott érintő érintési pontja *Q*. Igazoljuk, hogy a *CQ* és *AD* egyenesek metszéspontja rajta van *k*-n.

4. 4. Jelölje a pozitív egész *k* utolsó jegyét *u*(*k*), például *u*(2016) = 6. Egy számsorozat tagjainak képzési szabálya a következő: a pozitív egész a_0 adott, továbbá $n > 0$ esetén $a_n = a_{n-1} + u(a_{n-1}) - 1$ Milyen a_0 számok esetén tartalmaz a sorozat végtelen sok 3-hatványt?

5. A négyzetrácson adott az *ABCD* konvex rácsnégyszög úgy, hogy mind a négy csúcsa, mind pedig átlóinak *M* metszéspontja rácspont (azaz olyan pont, melynek mindkét koordinátája egész). Jelölje *t* az *ABCD* négyszög, t_1 pedig az *ABM* háromszög területét. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenséget és állapítsuk meg, mikor lehet egyenlőség: $\sqrt{t} \geq \sqrt{t_1} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

6. Egy társaság *n* tagból áll, közülük néhányan ismerik egymást, az ismeretség kölcsönös. Bármely két, egymást nem ismerő embernek pontosan két közös ismerőse van. Amennyiben két ember ismeri egymást, nekik nincs közös ismerősük. Igazoljuk, hogy a társaság minden tagjának ugyanannyi ismerőse van.

7. A valós x számra `x + 1/x = 3`. Igazoljuk, hogy minden poz. eg. *n*-re $x^n + x^{-n}$ is poz. eg. Igazoljuk, hogy $x^{3^{1437}} + x^{-3^{1437}}$ legalább $1439 \cdot 2^{1437}$ különböző pozitív egész számmal osztható.

8. Határozzuk meg azokat a pozitív egész p prímszámokat amire $\dfrac{2^{p-1}-1}{p}$ négyzetszám.

9. Döntsük el, hogy létezik-e olyan *n* pozitív egész szám, emelyre teljesül, hogy *n* pontosan 2000 különböző prímszámmal osztható, és $2^n + 1$ osztható n-nel.

2016. április 22.

1. A koordinátarendszer négy rácspontjában van egy-egy bábu. Bármelyik eltolható, két másik által meghatározott vektorral. Biz. bármely két bábu egy helyre mozgatható véges sok lépéssel.

2. Egy városban 16 titkosügynök dolgozik. Minden ügynök legalább egy másikat figyel, de nincs két ügynök, kik egymást figyelnék. Bármely 10 ügynök leültethető egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenki a bal oldali szomszédját figyeli. Mutassuk meg, hogy bármely 11 is leültethető így.

3. A hegyesszögű *ABC* háromszög középvonalain levő *A*’, *B*’, *C*’ pontok köré megrajzoltuk az *AA*’, *BB*’, *CC*’ sugarú köröket. Ha az *ABC* területe 10, akkor mekkora területű részre eshet a három kör hatványvonalainak metszéspontja?

4. Létezik-e olyan *H* részhalmaza a nemnegatív egészeknek, amelyekre minden nemnegatív egész ***n*** esetén pontosan egy megoldása van az ***a***+2*b*=***n*** egyenletnek, ahol ***a*** és *b* H elemei. (b) Mi a helyzet, ha töröljük a nemnegatív szót, és az egészekre kérdezzük ugyanezt?

5. Legyenek x,y,p,n,k olyan természetes számok, amelyekre $x^n + y^n = p^k$. Bizonyítsuk be, hogy ha ***n*** egynél nagyobb páratlan szám, és ***p*** páratlan prím, akkor ***n*** ***p***-nek hatványa.

6. Egy 5×7-es tábla fedhető-e L alakokkal (egy 2×2-es egyik mezője elhagyásával) úgy, hogy minden mezőt ugyanannyi L fedjen? Az L-ek nem lóghatnak le, de több rétegben lehetnek egymás felett.

7. Bizonyítsuk be, hogy minden eg. ehatós tizedfokú *P*(*x*) polinomhoz létezik olyan, mindkét irányban ∞ számtani sorozat, amely nem tartalmazza ***P*** egyetlen egész helyen felvett értékét sem.

8. Van 100 kártyánk, rajtuk a számok 1-től 100-ig. A lapok hátoldalán is valamilyen sorrendben az 1, 2, …, 100 számok vannak. Egy asztalra helyezték őket s mi kijelölhetünk ötvenet. Valaki megmondja, hogy a nem látható lapjukon szereplő számok szerint mi a nagyság szerinti növő sorrendjük. Hány ötvenes sorrendje után tudjuk az összes lapot sorrendbe állítani a letakart oldaluk szerint?

9. Az *ABCD* konvex négyszög nem trapéz. Az *AB* és *CD* oldalegyenesek metszéspontja *E*, a *BC* és *DA* oldalegyenesek metszéspontja *F* úgy, hogy *B* az *AE*, *D* pedig az *AF* szakasz belső pontja. Mutassuk meg, hogy ha az *ABC* és az *ADC* háromszög kerülete ugyanakkora, akkor az *AEC* és *AFC* háromszögek kerülete is ugyanakkora.