A Kömal 2002/6 száma B feladatainak megoldásvázlatai
a tehetséggondozó szakkörön elhangzott megoldások (elsősorban Salát Máté, Geleji János és Sáfár Simon elmondásai és Máté dolgozata alapján)

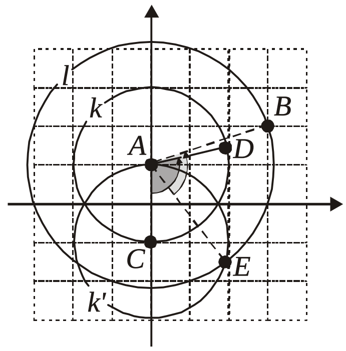
B. 3562.
A konvexitás miatt az eredeti hétszög minden csúcsa legfeljebb két vágásban van benne.
A nyolcszögnek 8 átlója van, ez a hétszögből 2·8 = 16 csúcsot érint (multiplicitással) a hétszögből. Ha minden hétszögcsúcs csak kétszer szerepelni, csak 14 lehetne az előbbi eredmény.

B. 3563.
Ekvivalensen:

$$\sqrt{4x\cdot 6y} \le \frac{1}{2\sqrt{6}}\cdot t\cdot\frac{4x+6y}{2}.$$

$t = 1/(2\sqrt{6})$ esetén teljesül az egyenlőtlenség, mert a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséggel ekvivalens. Könnyen igazolható, hogy $t > 1/(2\sqrt{6})$ esetén is mindig teljesül, de $t < 1/(2\sqrt{6})$ -re, pld $4x = 6y$ esetén nem teljesül. A válasz tehát $t \ge 1/(2\sqrt{6})$.

B. 3564.
Az A pontot először tükrözni kell az x tengelyre. Kapjuk a $C(-1; 0)$ pontot. C-t az A körül forgatva az A középpontú 2 egység sugarú k kör tetszőleges pontjához juthatunk el. Az újabb tükrözés a C középpontú 2 egység sugarú k' kör valamely pontjába visz. A kapott pontot pontosan akkor tudjuk B-be forgatni, ha az A középpontú AB sugarú l körön is rajta van. Legyen tehát E az l és k' egyik metszéspontja, D pedig E tükörképe az x tengelyre. Ekkor az A, C, D, E, B sorozatban a soron következő tag az előzőből az x tengelyre vonatkozó tükrözéssel vagy A körüli forgatással kapható. A gondolatmenetből az is kiderül, hogy ennél rövidebb sorozattal nem érhető el a B pont. E koordinátái a két kör egyenletéből meghatározhatók:

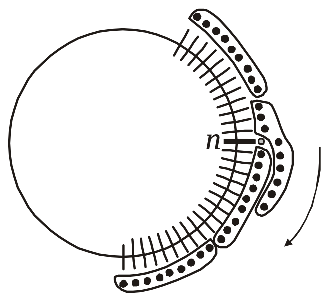


$$E\left(\frac{\sqrt{15}}{2};-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow D\left(\frac{\sqrt{15}}{2};\frac{3}{2}\right).$$

A forgatási szögek:

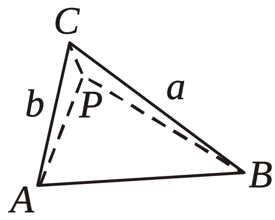
$$CAD\angle = 90° + tg^{-1}\frac{1}{\sqrt{15}} \approx 104°,\qquad EAB\angle = tg^{-1}\frac{5}{\sqrt{15}} + tg^{-1}\frac{1}{3} \approx 71°.$$

B. 3565.
a) Nem, ha eredetileg összesen páratlan sok kavics volt a dobozokban, akkor minden lépés után is páratlan sok lesz.
b) Igen, ezt két lépésben bizonyítjuk.
Legyen először az n-edik kupacban 1 kavics, az összes többiben pedig 0. Megadunk egy eljárást, amellyel elérhető, hogy mindegyik kupacban ugyanannyi kavics legyen.
Képzeljük úgy, mintha a kupacok egy kör kerületén lennének elrendezve, és az (n+1)-edik kupactól kezdve az az első 9 kupacba tegyünk egy-egy kavicsot, majd a következő 9 kupacba, stb körben

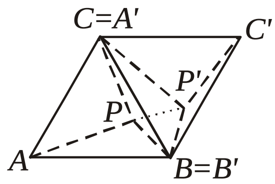


haladva tovább. Akkor érjük el, hogy minden kupacba ugyanannyi kavics legyen, ha ez egyik "kilences" épp az (n - 1)-edik kupacnál fejeződik be. Az kell tehát, hogy legyen olyan m nemnegatív egész (a teljes körök száma) és olyan l (a kilencesek száma), amelyre $9 \cdot l = m \cdot 2002 + 2001$. Látható, hogy $m = 6$ és $l = 1557$ épp megfelel.
A fent leírt eljárást nem csak akkor alkalmazhatjuk, ha az n-edik kupacban 1, a többiben pedig 0 kavics van. Az általános esetben való alkalmazásnál azt érjük el, hogy az n-edik kupac nagysága az összes többi kupac nagyságához képest 1-gyel csökken (az n-ediké 6-tal, a többié 7-tel nő). Ha sorba vesszük az n = 1, 2, ... , 2002 értékeket és minden n-re annyiszor alkalmazzuk a fenti eljárást, ahány kavics eredetileg volt az n-edik kupacban, akkor az összes eljárás végén mindegyik kupacban ugyanannyi kavics lesz (7-szer annyi, mint ahány kavics eredetileg összesen volt).

B. 3566.

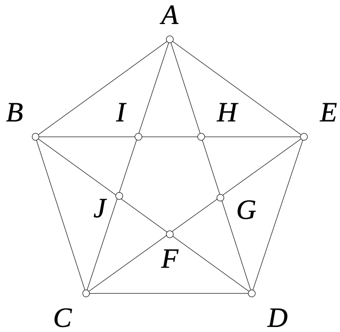


Ha *a* és *b* van két nem egyenlő hosszúságú oldal ($a > b$), akkor válasszuk *P*-t a *C* csúcs közelében, pontosabban, legyen $PC < (a-b)/3$. Ilyenkor a *PBC* háromszögben $PB > a - PC > a - (a-b)/3$; a *PAC* háromszögben $PA < b + PC < b + (a-b)/3$, ezért $PB - PA > (a-b)/3 > PC$, azaz *PA*, *PB*, *PC* hosszú szakaszokból nem szerkeszthető háromszög.



Nem kérdezte a feladat, de az is igaz, hogy szabályos háromszögben bármely belső *P* pontra szerkeszthető a háromszög. A háromszög meg is jelenik, ha az ábrát valamely csúcs körül 60°-kal elforgatjuk (Az ábrán *B* körül forgattunk és *PP'C* a keresett háromszög).

B. 3567.



Konvex sokszög egy csúcsból induló átlója és oldala nem eshet egy egyenesbe, tehát nem lehetnek párhuzamosak. Az ötszög oldalával így nem lehet párhuzamos az oldalhoz tartozó két csúcsból induló négy átló egyike sem, következésképp az ötszög ötödik átlójának kell párhuzamosnak lenni az oldallal. Az ötszög csúcsait és átlóinak metszéspontjait az ábra szerint jelölve tehát

$$AB \parallel CE,\ BC \parallel DA,\ CD \parallel EB,\ DE \parallel AC,\ EA \parallel BD\,.$$

A *CD*, *EB* és a *DE*, *AC* párhuzamos egyenesek által közrezárt *CDEI* paralelogramma két szemközti oldala egyenlő:

$$EI = CD$$

A *BC*, *DA* és a *CD*, *EB* párhuzamos egyenesek által közrezárt *BCDH* paralelogramma két szemközti oldala egyenlő:

$$CD = BH$$

Következésképp:

$$EI = BH$$

A párhuzamos szelők tétele alapján az *I* csúcsú szöget a *BC*, *DA* párhuzamos egyenesekkel metszve $\frac{BI}{HI} = \frac{CI}{AI}$ adódik, míg az *AB*, *CE* párhuzamos egyenesekkel metszve

$$\frac{CI}{AI} = \frac{EI}{BI}$$

adódik. Következésképp

$$\frac{BI}{HI} = \frac{EI}{BI},$$

$$BE^2 - 2BE\cdot EI + EI^2 = (BE - EI)^2 = BI^2 = EI\cdot HI = EI\cdot(BH - BI) =$$
$$= EI\cdot(EI - (BE - EI)) = 2EI^2 - BE\cdot EI.$$

Az átalakítás-sor két "végének" összevetéséből

$$EI^2 + BE\cdot EI - BE^2 = 0,$$

azaz $EI = CD$ miatt

$$CD^2 + BE\cdot CD - BE^2 = 0,$$

$$\frac{CD^2}{BE^2}+\frac{CD}{BE}-1=0,$$
$$\frac{CD}{BE}=\frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}.$$

Tehát

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

az oldal és a vele párhuzamos átló hosszának aránya. (A másik megoldás negatív, így távolságarányról lévén szó, annak nincs értelme.)

Megjegyzés

*Affin transzformáció*nak nevezzük a sík olyan önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezését, amely *egyenestartó*, azaz három pont pontosan akkor van egy egyenesen, ha a transzformációnál származó képeik is egy egyenesen vannak. Affin transzformáció pld a korábbi tanulmányokból már ismert

tengelyes tükrözés;
elforgatás;
eltolás stb.;
középpontos hasonlóság;
merőleges tengelyes affinitás.

Megmutatható, hogy egy ötszög pontosan akkor teljesíti a feladatban megadott követelményeket, ha megkapható a szabályos ötszögből affin transzformáció segítségével.

B. 3568.

Az α szög pontosan akkor megfelelő, ha valamely n egészre az $\alpha + 2n\pi$ szög megfelelő. Ezek után a $[0; 2\pi]$ intervallumbeli α szögek megkeresésére szorítkozunk. Vezessünk be új egységet: $2\pi = 1$; és számoljunk tizedestörtek helyett "negyedestörtekkel". A cosinusfüggvény $[0; 2\pi]$ intervallumbeli viselkedése alapján a $k = 0$ -nak megfelelő feltételből szükségképpen $\pi/2 \le \alpha \le 3\pi/2$, azaz új rendszerünkben az mondható, hogy α negyedestört alakjának kezdete lehet 0,1 vagy 0,2. A $k = 1$ -nek megfelelő feltételt is megvizsgálva $\alpha = 0{,}11...$ vagy $0{,}22...$ adódik, azaz a negyedesvessző után két 1-es vagy két 2-es jön. Ugyanez igaz a 4-szeresekre, 4^2-szeresekre ..., így a $\alpha = 0{,}111111111... = 2\pi/3$ vagy $\alpha = 0{,}222222... = 4\pi/3$.

B. 3569.

Lásd a Helly tétel leírását, pld Reiman István Geometria és határterületei, Szalay Kiadó 2000 című könyvében.

a) Egydimenziós Helly tétel:

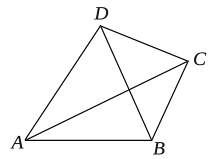
Ha az egyenes véges sok korlátos konvex halmaza (*azaz véges intervalluma*) *közül bármely kettőnek van közös pontja, akkor az összesnek is van közös pontja*.

A kockák vetületei bármely koordináta-tengelyen korlátos konvex halmazok. Ezeknek mindhárom koordinátatengelyen van, egy-egy közös pontja. Ha az első koordinátatengelyen található vetületek (egyik) közös pontja a, a második koordinátatengelyen található vetületeké b, a harmadikra esőké pedig c, akkor a tér (a, b, c) pontja az összes kocka közös pontja.

b) Háromdimenziós Helly tétel:

Ha a tér véges sok korlátos konvex halmaza közül bármely négynek van közös pontja, akkor az összesnek is van közös pontja.

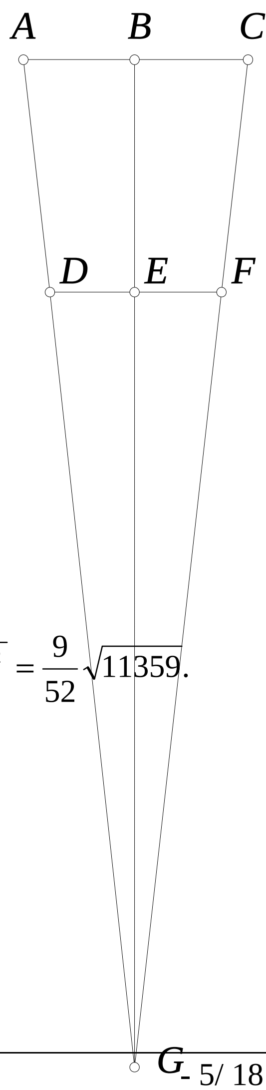
A kockákra vonatkozó feltétel gyengébb, csak azt követeli meg, hogy bármely három kockának legyen közös pontja. Vázolunk egy konstrukciót:



Az *ABCD* szabályos tetraédert nagyítsuk úgy középpontjából 1-nél nagyobb arányban, hogy a keletkező *A'B'C'D'* szabályos tetraéder lapsíkjai az *ABCD* tetraéder megfelelő lapsíkjaitól éppen 1 cm távolságra legyenek. A 100 közül 25 tetraéder tartalmazza belsejében az *A'B'C'* háromszöget úgy, hogy a kockák egy-egy lapja az *A'B'C'* és az *ABC* sík között azokkal párhuzamosan helyezkedjék el. Ehhez hasonlóan vegyünk fel, 25-25-25 *B'C'D'*-t, *C'D'A'*-t és *B'D'A'*-t tartalmazó kockát.
Az így kapott 100 kocka közül bármelyik háromnak van közös belső pontja, tudniillik az *A', B', C', D'* pontok egyike biztos közös. Belátjuk, hogy az összes kockának azonban nincs közös pontja. Tekintsük az *ABCD* tetraéder *ABC* lapsíkja által határolt *D*-t tartalmazó félteret, továbbá a *BCD, CDA, ABD* által határolt, *A*-t, *B*-t, *C*-t tartalmazó féltereket is. Ez a négy féltér lefedi az egész teret, és mindegyik féltér legalább az egyik kockától diszjunkt, így a tér bármely pontja legalább egy kockának nincs a belsejében.

B. 3570.
A feltétel szerint ha van olyan β, amelyre $f(\beta) = \alpha$, akkor $f(\alpha) = 1/\alpha$. Így $f(999)=1/999$ és a folytonos függvény 999 és 1000 között minden 1/999 és 999 közötti értéket felvesz, az 500-at is, így $f(500) = 1/500$.
Meg kell még mutatni, hogy van is ilyen függvény. Egy példa:
$f(x) = 999$, ha $x<1/999$ vagy $x > 999$; és $f(x) = 1/x$ egyébként.

B. 3571.



Egészítsük ki a poharat egy teljes kúppá! Tekintsük a kúp (és a pohár) egy keresztmetszetét, és vezessük be az ábra szerinti jelöléseket! *AC* és *DF* a pohár tetejének és aljának átmérője, tehát $AC = 6{,}5$ cm, $DF = 5$ cm. Annak a feltétele, hogy a pohár körbegurítható legyen az asztalon úgy, hogy ne érintse annak szélét az, hogy a kúp alkotója (például *CG*) rövidebb legyen a kórasztal sugaránál. Tehát szükségképpen $CG<1{,}6\text{m}/2 = 80$ cm. Mivel

$$EFGD \sim BCGD,\ \frac{EG}{BG} = \frac{EF}{BC},$$

vagyis $EG = (EF/BC)\cdot BG$. Mivel a *BCG* háromszög derékszögű, így $CG^2 = BC^2 + BG^2$. Innen

$$BE = BG - EG = BG - \frac{EF}{BC}BG = \left(1 - \frac{EF}{BC}\right)BG = \left(1 - \frac{EF}{BC}\right)\sqrt{CG^2 - BC^2} = \frac{9}{52}\sqrt{11359}.$$

Tehát a pohár magassága kisebb, mint $\frac{9}{52}\sqrt{11359}$ cm.

A Kömal 2002/7 száma B feladatainak megoldásvázlatai
a tehetséggondozó szakkörön elhangzott megoldások (elsősorban Salát Máté, Geleji János és Sáfár Simon elmondásai és Máté dolgozata alapján)

B. 3572.
$x = [x] + \{x\}$. Legyen $[x]$ kettes maradéka δ, míg $([x]-\delta)/2$ kettes maradéka ε, azaz

$$x = 4x_0 + 2\varepsilon + \delta + \{x\},$$

ahol x_0 tetszőleges egész, ε és δ értéke 0 vagy 1, míg $\{x\}$ 1-nél kisebb nemnegatív szám.

$$[x] = 4x_0 + 2\varepsilon + \delta, \qquad [x/2] = 2x_0 + \varepsilon, \qquad [x/4] = x_0,$$

tehát az

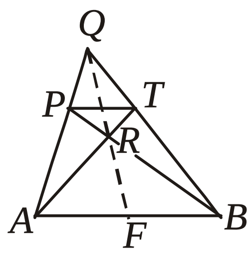
$$x_0 + \varepsilon + \delta = 0$$

feltételnek megfelelő számokat keressük. A lehetőségek táblázatban:

x_0	ε	δ	$x\in$
0	0	0	[0;1)
-1	1	0	[-2;-1)
-1	0	1	[-3;-2)
-2	1	1	[-5;-4)

Tehát $-5\le x<-4$ vagy $-3\le x<-1$ vagy $0\le x<1$.

B. 3573.
Lemma
Bármely trapéz (mindkét) alapjának felezőpontja (az ábrán *F*), az átlók metszéspontja (*R*) és a szárak meghosszabbításainak metszéspontja (*Q*) egy egyenesen van.



A lemmát itt nem bizonyítjuk, csak felhasználjuk.
A szerkesztés során az ábrát rekonstruáljuk:

adott *A, B, F, P*;
AP-n felvesszük *Q*-t;
QF és *BP* metszéspontja *R*;
AR és *BQ* metszéspontja *T*;
PT a keresett egyenes.

Állítjuk, hogy *PT* párhuzamos *AB*-vel. Ha ugyanis a *P*-n át *AB*-vel húzott párhuzamos és *QB* metszéspontja *T**, akkor az *ABT*P* trapézban a szárak metszéspontja *Q*, így a *BP* átló a szárak meghosszabbításainak metszéspontját az alap felezőpontjával összekötő egyenest *R*-ben metszi, így a lemma alapján *R* az *AT** átlón van, azaz *T** az *AR*, *BQ* egyenesek metszéspontja, tehát *T** megegyezik *T*-vel.

B. 3574.
P a két kör hasonlósági középpontja, így a *PDE, PAB* háromszögek hasonlók, *DE* és *AB* párhuzamosak.
Bármely körben egy húrral párhuzamos érintő érintési pontja a húr által meghatározott egyik körív felezőpontja.
PC felezi a *DPE* szöget, mert *PED* körülírt körén a *DC, CE* ívek egyenlő hosszúak. Így *PC* szögfelező az *PAB* háromszögben is.
A szögfelező-tétel szerint a *PC* szögfelező az *AB* oldalt a *PA*, *PB* oldalak arányában osztja fel. Ez az arány megegyezik *PD* és *PE* arányával, azaz 11/10. Innen *AC* = 44 (és *BC* = 40).

B. 3575.
Legyen n két különböző jegyen a és b. Rendezzük úgy n jegyeit, hogy ez a két jegy legyen az utolsó kettő, majd cseréljük is föl ezt a két jegyet:

$$n_1 = 100X + 10a + b;$$
$$n_2 = 100X + 10b + a.$$

$d_n|n_1$ és $d_n|n_2$, így $d_n|n_1 - n_2 = 9\cdot (a - b)$.

A feladat kétféleképpen is értelmezhető és innen a kétféle értelmezés szerinti megoldás kettéválik:
A) Megengedjük, hogy a számjegyek között szerepeljen a 0, és figyelembe vesszük azokat az átrendezéseket, amelyek 0-val kezdődnek, tehát valójában kevesebb jegyből állnak.
B) Nem engedjük meg a 0 számjegyet.

Az **A)** értelmezésben d_n maximuma 81. A $d_n|9\cdot (a - b)$ összefüggésből világos, hogy ennél nem lehet nagyobb d_n értéke. A $d_n = 81$ érték megvalósul pld az $n = 9999999990$ (9db kilences és 1 db zérus) szám esetén, hiszen ennek kilencedében kilenc darab 1-es van, azaz a kilenced is osztható kilenccel.

A **B)** értelmezésben nem jön szóba a 81, mert $(a - b)$ értéke ilyenkor legfeljebb 8.
$d_n = 72$ sem lehetséges, mert $d_n|9\cdot (a - b)$ most azt eredményezi, hogy n minden jegye kilences és egyes, de ilyen szám mindig páratlan.
$d_n = 63$ megvalósul pld $n = 111888$ esetén. $n = 1776\cdot 63$ osztható 63-mal, és bármely átrendezése megkapható szomszédos jegyek kicseréléseinek sorozatával. Szomszédos jegyek cseréjénél a szám $10^k\cdot 9\cdot (a - b)$-vel változik, ahol a és b értékei az 1, 8 számok közül kerülnek ki. A változás mindig egy 63-mal osztható szám, tehát n minden átrendezése is osztható 63-mal.
A **B)** értelmezésben tehát $d_n = 63$ a maximum.

B. 3576.
Számoljuk ki annak esélyét, hogy n dobásban nem fordul elő mind a három szám.
Csak a 0 és az 1 felhasználásával 2^n sorozat készíthető. Ebből az egyikben minden szám 0, az egyikben pedig mindegyik 1.
Csak az 1 és a 2 felhasználásával 2^n sorozat készíthető. Ebből az egyikben minden szám 1, az egyikben pedig mindegyik 2.
Csak a 2 és a 0 felhasználásával 2^n sorozat készíthető. Ebből az egyikben minden szám 2, az egyikben pedig mindegyik 0.
Ez összesen $3\cdot 2^n$ sorozat, de a "csupa 0", "csupa 1", "csupa 2" sorozatokat kétszer-kétszer számoltuk, így $3\cdot 2^n-3$ az olyan sorozatok száma, amelyekben nem szerepel mind a három számjegy.

Tehát annak esélye, hogy n dobásban mind a három szám előfordul

$$p_n = 1 - \frac{3\cdot 2^n - 3}{3^n}.$$

$p_1 = p_2 = 0$; $p_3 = 2/7 = 0{,}2857...$; $p_4 = 4/9 = 0{,}4444..$; $p_5 = 0{,}61728395... > 0{,}61$.
A p_n sorozatról belátható, hogy szigorúan monoton nő (ha $n>1$), ehhez csak két egymást követő tagját kell fölírni, majd közös nevezőre hozás után egyszerűsíteni az egyenlőtlenséget.

Tehát öt és annál hosszabb sorozatok esetén lesz a vizsgált valószínűség legalább 61%.

B. 3577.
A $3x$ és $2x$ szögek sinusára és cosinusára vonatkozó formulák segítségével az egyenletet a

$$4\cos^3 x - \cos x = \sin x$$

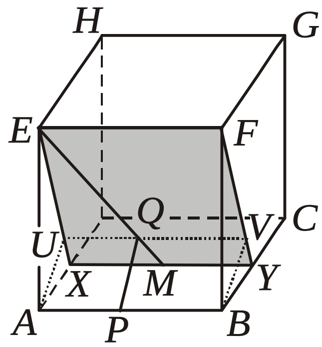
alakra hozzuk. A négyzetreemelés után $\cos^2 x$-re kapott harmadfokú egyenlet szorzattá alakítással oldható meg:

$$(2\cos^2 x - 1)(8\cos^4 x + 1) = 0,$$

tehát $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$. $\sin x$ értéke a négyzetreemelés előtti egyenletből határozható meg. A megoldások: $x = \pi/4 + 2k\pi$ (k tetszőleges egész).

B. 3578.
I. megoldás (*geometria*)
A mellékelt ábra szerkesztésének lépései:

1. XY az M-en át AB-vel húzott párhuzamos egyenes.
2. U illetve V az A, illetve a B pont merőleges vetülete EX-en, illetve FY-on.
3. Q az EM és az UV metszéspontja.
4. P az AB-n az a pont, amelyre QP párhuzamos UA-val.



Állítjuk, hogy az így kapott PQ a keresett szakasz. Azt kell megmutatnunk, hogy PQ merőleges EM-re és AB-re is. Fel fogjuk használni, hogy az AB, XY, UV szakaszok párhuzamosok és egyenlők.

A kocka $AEHD$ oldallapsíkja merőleges az AB élre, így az $AEHD$ sík minden egyenese - AU is - merőleges AB-re. E tény két következménye:

a) az AU-val párhuzamos PQ is merőleges AB-re.

b) AU merőleges az AB-vel párhuzamos UV egyenesre, tehát AU az $EXYF$ sík két metsző egyenesére is merőleges (UV, EX), azaz AU merőleges az $EXYF$ síkra, annak minden egyenesére, EM-re is. Következésképpen PQ is merőleges EM-re.

Keressük meg P és Q helyét az AB, EM szakaszokon, azaz számítsuk ki az AP/PB, EQ/QM arányok értékét! Az EAX, EUA, AUX derékszögű háromszögek hasonlóak, így

$$2 = EA/AX = EU/UA = UA/UX, \text{ azaz}$$
$$EU/UX = (2\cdot UA)/(UA/2) = 4.$$

Az EUQ, EXM háromszögek hasonlóságából $EQ/QM = 4$. Másrészt $AP/PB = UQ/QV = UQ/(2\cdot XM - UQ)$, így $UQ/XM = 4/5$ miatt $AP/PB = 4/6 = 2/3$.

II. megoldás (*vektorok*)
Jelölje az

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$$

vektorokat rendre $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$. Az A-ból az AB egyenes valamely P pontjába mutató vektor $x\underline{i}$ alakban adható meg egy megfelelő x valós számmal.

$$\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AM} = -\underline{k} + \frac{1}{2}(\underline{i} + \underline{j}),$$

így az EM egyenes Q pontjára valamely y számmal

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EQ} = \overrightarrow{AE} + y\overrightarrow{EQ} = (1-y)\underline{k} + \frac{1}{2}y(\underline{i} + \underline{j}),$$

így

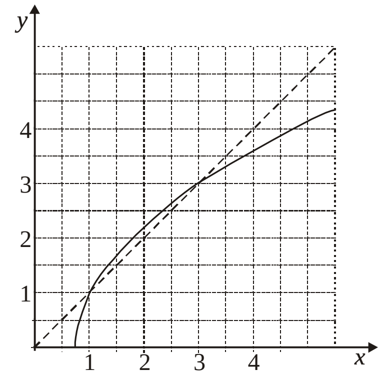
$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ} = (y-1)\underline{k} + (x - \frac{1}{2}y)\underline{i}. - \frac{1}{2}y\,\underline{j}.$$

Az $\underline{i}$, $\underline{j}$ és $\underline{k}$ vektorok páronként merőlegesek egymásra és egységnyi hosszúak, így

$$QP^2 = (y - 1)^2 + (x - 0{,}5y)^2 + 0{,}25y^2 = (x - 0{,}5y)^2 + 1{,}25y^2 - 2y + 1 =$$
$$= (x - 0{,}5y)^2 + 1{,}25(y - 0{,}8)^2 + 0{,}2$$

A QP távolság akkor minimális, ha a két négyzetes tag 0, azaz $y = 0{,}8$ és $x = 0{,}4$.
Geometriailag: $AP/AB = 2/5$ és $EQ/EM = 4/5$.

B. 3579.

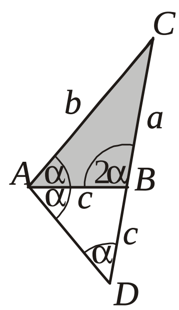


A feladat az $f(f(f(x))) = x$ egyenlet megoldását követeli meg, ahol

$$f(x) = \sqrt{4x-3}.$$

f értelmezési tartománya a 3/4-nél nem kisebb számok halmaza.
Részletes elemzés alapján:
ha $x<1$, akkor $f(x)<x<1$;
ha $x=1$, akkor $f(x)=x=1$;
ha $1<x<3$, akkor $1<x<f(x)<3$;
ha $x=3$, akkor $f(x)=x=3$;
ha $3<x$, akkor $3<f(x)<x$.
Ezek szerint az x, $f(x)$, $f(f(x)$, $f(f(f(x)$, $f(f(f(f(x)$ ... sorozat szigorúan monoton, ha $x<1$ vagy ha $1<x<3$, illetve ha $3<x$, míg konstans az $x = 1$, $x = 3$ esetekben. Az egyenletnek két valós megoldása van: $x = 1$ és $x = 3$.

B. 3580.



Az ABC háromszögben $\beta = 2\alpha$ (lásd az ábrát). Az AC félegyenes AB-re vonatkozó tükörképe a CB félegyenesből a D pontot metszi ki. A szögek alapján az ABC, DAC háromszögek hasonlóak, amiből $a/b = b/(a + c)$, azaz

$$b^2 = a \cdot (a + c).$$

Könnyen belátható, hogy ez a feltétel ekvivalens azzal, hogy a háromszögben $\beta = 2\alpha$. Ha itt a, b, c a lehető legkisebb összegű egész számhármas, akkor relatív prímek, így a és $(a + c)$ is négyzetszám. Az első néhány kicsi eset:

a	c	b	$a + b + c$
4	5	6	15
4	12	8	24
9	7	12	28

Ezek közül csak az utolsó tompaszögű β-ban, tehát az a megoldás.

B. 3581.

I. megoldás (*megfigyelés, sejtés, polinomosztás)*
A legkisebb érték az 501, ezt egyetlen helyen $x = (-1)$-nél veszi fel a függvény.

Legyen általában

$$f_n(x) = |(2n + 1) + 2nx + (2n - 1)x^2 + ... + 2x^{2n-1} + x^{2n}|.$$

A feladat f_{500} minimumára kérdez rá.

$$f_0(x) = 1; \qquad f_1(x) = 2 + (x+ 1)^2; \qquad f_2(x) = 3 + (x+ 1)^2\cdot(x^2 + 2);$$
$$f_3(x) = 4 + (x+ 1)^2\cdot(x^4 + 2x^2 + 3),$$

amiből megsejthető, hogy $f_n(x) = |(n + 1) + g_n(x)|$, ahol $g_n(x)$ szorzat alakban írható. Valóban,

$$g_n(x) = n + 2nx + (2n - 1)x^2 + (2n - 2)x^3 + (2n - 3)x^4 + ... + 4x^{2n-3} + 3x^{2n-2} + 2x^{2n-1} + x^{2n} =$$
$$= [1\cdot n + 2x\cdot n + x^2 \cdot n] + [1\cdot(n - 1)x^2 + 2x\cdot(n - 1)x^2 + x^2 \cdot (n - 1)x^2] + [1\cdot(n - 1)x^4 + ...$$

$$+ [1\cdot 2x^{2n-4} + 2x\cdot 2x^{2n-4} + x^2 \cdot 2x^{2n-4}] + [1\cdot x^{2n-2} + 2x\cdot x^{2n-2} + x^2 \cdot x^{2n-2}]=$$
$$= (1 + 2x + x^2)\cdot(n + (n-1)x^2 + ... + 3x^{2n-6} + 2x^{2n-4} + x^{2n-2}).$$

$g_n(x)$ mindkét tényezője nemnegatív, sőt a második mindig pozitív, az első pedig csak $x = (-1)$-nél zérus. Ebből adódik, hogy $f_n(x)$ minimuma $(n + 1)$.

I. megoldás (*zárt forma, segít a deriválás, számtani-mértani közép*)

$$f(x) = \left| x^{1000}\left(1001\frac{1}{x^{1000}} + 1000\frac{1}{x^{999}} + 999\frac{1}{x^{998}} + ... + 2\frac{1}{x} + 1\right)\right|,$$

azaz z = 1/x-szel

$$\left|\frac{1001z^{1000} + 1000z^{999} + 999z^{998} + ... + 2z + 1}{z^{1000}}\right| =$$

$$= \left|\frac{\left(z^{1001} + z^{1000} + z^{999} + ... + z^2 + z + 1\right)'}{z^{1000}}\right| = \left|\frac{\left(\dfrac{z^{1002} - 1}{z - 1}\right)'}{z^{1000}}\right|,$$

ha z≠1, és a hányados deriváltjának képzésére vonatkozó szabály szerint:

$$\left|\frac{\dfrac{1002z^{1001}(z-1) - (z^{1002} - 1)}{(z-1)^2}}{z^{1000}}\right| = \left|\frac{1001z^2 - 1002z + \dfrac{1}{z^{1000}}}{(z-1)^2}\right| =$$

$$= \left|\frac{(501z^2 - 1002z + 501) + (500z^2 + \dfrac{1}{z^{1000}}) - 501}{(z-1)^2}\right| =$$

$$\left| 501 + \frac{501\cdot\left(\dfrac{z^2 + z^2 + z^2 + ... + z^2 + \dfrac{1}{z^{1000}}}{501} - 1\right)}{(z-1)^2}\right|,$$

ahol az ötszáz darab z^2 és az $(1/z^{1000})$ számtani közepe nem kisebb ugyanezen ötszázegy szám mértani közepénél, azaz 1-nél. A nagy zárójelben tehát nemnegatív szám áll, és ez pontosan akkor zérus, ha a közepek között egyenlőség van, azaz $z^2 = 1/z^{1000}$.

z = -1 = x a minimumhely, a minimum értéke 501;

z = 1 = x-et külön kell vizsgálnunk, látható, hogy az eredeti képletbe írva nagyobb értéket kapunk.

A Kömal 2002/8 száma B feladatainak megoldásvázlatai
a 9*c* osztály szakköre és a 11-12-es tehetséggondozó szakkörön elhangzott megoldások alapján

B. 3582. Írjuk az egyenletet

$$(5 - 3x)(yz+1) = 3z$$

alakba. A bal oldalon a második zárójelben pozitív szám áll, mert yz nem negatív. A jobb oldalon nem negatív szám áll, mert z természetes szám. Ebből következik, hogy $5 - 3x$ sem lehet negatív, így x=0 vagy 1.
Ha x=0, akkor $5 - 3x = 5$, tehát az egyenlet:

$$(3 - 5y)\, z = 5.$$

Itt y=0 esetén z nem egész, y>0 esetén pedig a bal oldal negatív (ha z>0) vagy nulla (ha z=0), ami ellentmondás. Tehát x=0 esetén nincs megoldás.
Ha x=1, akkor $5 - 3x = 2$, tehát az egyenlet:

$$(3-2y)\, z = 2.$$

Ezek szerint a z természetes szám osztója 2-nek, azaz z=1 vagy 2. Előbbi esetben $3 - 2y = 2$, s ekkor y nem egész. Ha z=2, akkor y=1 a megoldás, tehát x=y=1, z=2 az egyetlen megoldása a feladat egyenletének. Ez a számhármas valóban megoldás.

B. 3583. Jelölje O a beírt kör középpontját. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy az ABO háromszög hasonló a nagy háromszöghöz. Az ABO háromszög szögei: $\alpha/2$, $\beta/2$, $90°+\gamma/2$, ha az ABC háromszög szögei α, β és γ. A két háromszög hasonlósága azt jelenti, hogy $\alpha/2$, $\beta/2$, $90°+\gamma/2$ valamilyen sorrendben megegyezik α-val, β-val és γ-val. Mivel α pozitív, $\alpha/2$ nem egyezhet meg α-val, s ugyanezért $\beta/2$ sem egyezhet meg β-val. Az sem lehet, hogy $\beta/2=\alpha$ és $\alpha/2=\beta$. Tehát a két szög közül az egyik γ-val egyezik. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $\alpha/2=\gamma$. Ekkor $\beta/2$ csak α-val lehet egyenlő (és $90°+\gamma/2$ csakis β-val). Tehát

$$4\gamma=2\alpha=\beta \text{ és } 2\gamma=\alpha$$

Másrészt $\alpha+\beta+\gamma=180°$, vagyis $2\gamma+4\gamma+\gamma=180°$, ahonnan

$$\gamma=180°/7,\ \alpha=360°/7,\ \beta=720°/7.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor ABO háromszög szögei is ugyanezek: csak azt kell ellenőrizni, hogy $90°+\gamma/2=\beta$.
A háromszög szögei tehát valamilyen sorrendben 180°/7, 360°/7, 720°/7.

B. 3584.
I. megoldás: k-jegyű számból a tízes számrendszerben $9\cdot10^{k-1}$ db van, ezek összesen $k\cdot9\cdot10^{k-1}$ db jegyből állnak.
Most számoljuk össze a $(k+1)$-jegyű számokban található 0-k számát. A 0 az utolsó (1-es) helyiértéken annyi számban állhat, ahányféleképpen az első k jegy megválasztható, azaz ahány k-jegyű szám van: $9\cdot10^{k-1}$. Ugyanennyiszer fordul elő 0 a jobbról második (10-es), harmadik (100-as) ..., balról második (10^{k-1}-es) helyiértéken. A szám (balról) első jegye nem lehet 0. A $(k+1)$-jegyű számokban így összesen $k\cdot9\cdot10^{k-1}$ db 0 van.
Tehát ugyanannyi számjegy van összesen a k-jegyű számokban, ahány 0 van összesen a $(k+1)$-jegyű számokban. Ennek az állításnak a k=1, k=2, ..., k=n-1 -re vonatkozó eseteiből már majdnem következik az állítás. Csak azt kell még észrevennünk, hogy ha 1-től kezdünk számolni, akkor az 1-jegyű számokban nincs 0; és azt, hogy 10^{n-1} ugyanannyi jegyből áll, ahány 0 10^n-ben található.

II. megoldás: Tekintsünk 1-től 10^n-ig terjedő számok egyikében egy nulla számjegyet. Hagyjuk el ezt a nullát a számból, és a nagyobb helyiértékű jegyeket csúsztassuk arrébb, hogy megszüntessük a hiányt. Így valamely 1-től 10^{n-1}-ig terjedő számot kapunk, a korábbi nulla helyére most annak egy jegye csúszott (a nulla nem a legelső számjegy volt, így biztosan került a helyére jegy). Pld: 341<u>0</u>345302 - 34<u>1</u>345302.
Válasszuk most ki bármelyik 1 és 10^{n-1} közötti számot és annak jelöljük ki egy tetszőleges jegyét. Egy és csak egy olyan 1-től 10^n-ig terjedő szám van és abban csak egy olyan helyzetű nulla, amelyhez az előző paragrafusban leírt megfeleltetés a most választott szám, kijelölt jegyét rendeli. Valóban, ezt a számot úgy kapjuk, hogy választott számunkban a kijelölt jegyet és az attól balra álló többit eggyel balra csúsztatjuk, és az üres helyre egy nullát írunk.
A kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés igazolja, hogy $A = B$.

B. 3585. Rendezzük át az egyenlőtlenséget

$$2ax > 1 + x^2 - (1+x^4)^{1/2}$$

alakba. Ennek az egyenlőtlenségnek minden ***pozitív*** x-re kell teljesülnie, tehát leoszthatunk x-szel:

$$2a > 1/x + x - (1/x^2 + x^2)^{1/2}.$$

Vezessük be a $z=x + 1/x$ változót, ekkor a jobb oldalon végrehajtva a

$$z - (z^2 - 2)^{1/2} = 2/(z + (z^2 - 2)^{1/2})$$

átalakítást azt kapjuk, hogy z minden szóba jövő értékére teljesülnie kell az

$$a > (z + (z^2 - 2)^{1/2})^{-1}$$

feltételnek. Pozitív x-ekre $z \geq 2$ és x=1-re egyenlőség van. Tehát a bal oldal maximuma $(2 + \sqrt{2})^{-1}$, ami $= 1-1/\sqrt{2}$. Ennél nagyobb a-kra az egyenlőtlenség mindig teljesül, mert azonos átalakításokat végeztünk. Ha viszont $a \leq (2 + \sqrt{2})^{-1}$, akkor x=1-re az egyenlőtlenség biztosan nem teljesül. A feladat feltételét tehát az $1-1/\sqrt{2}$-nél nagyobb a valós számok teljesítik.

B. 3586. Az egyenlet minden x megoldásának teljesítenie kell az $x>-1$ és az $ax > 0$ egyenlőtlenségeket. E feltételek mellett az egyenlet azonos az $x^2 + (2 - a)x + 1 = 0$ egyenlettel. Ennek az egyenletnek $a = 0$ és $a = 4$ esetén nulla a diszkriminánsa. Az előbbi esetben $ax > 0$ nem teljesül, utóbbi esetben az egyenlet egyetlen megoldása $x = 1$, s ez az eredeti egyenletnek is megoldása. A 0 és 4 közötti a-kra az egyenletnek nincs megoldása. Minden más esetben az egyenletnek két különböző gyöke van és azok egyező előjelűek (mert szorzatuk 1). A gyökök összege $a - 2$. Ha $a>4$, akkor ez az összeg pozitív, tehát mindkét gyök pozitív. De ekkor mindkét megoldás teljesíti az $ax > 0$ és az $x > -1$ feltételt is, tehát megoldása az eredeti egyenletnek is.
Marad tehát az $a < 0$ eset. Ekkor a gyökök összege negatív, tehát mindkét gyök negatív, így az $ax > 0$ feltétel mindkettőre teljesül. A két gyök szorzata 1, vagyis a két gyök egymás reciproka, az $x > -1$ feltételt ezért pontosan az egyikük teljesíti: az, amelyik 0 és –1 között van.
A feladat feltételének tehát a negatív a értékek és a=4 felel meg.

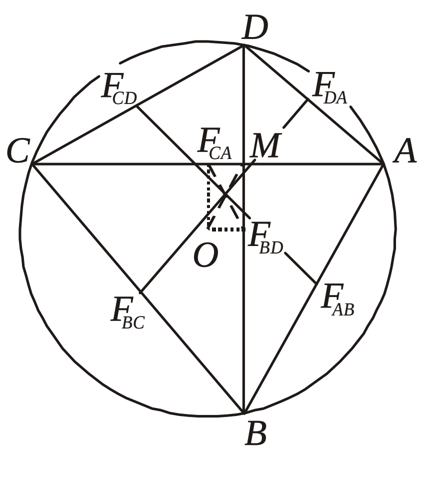
B. 3587. Kössük össze a csonkagúla minden csúcsát a beírt gömb *O* középpontjával. Így a csonkagúlát feldarabolhatjuk olyan gúlákra, amelyeknek alaplapja a csonkagúla egy-egy oldallapja, a gúla csúcsa pedig *O*. Az ilyen gúlák magassága éppen a beírt gömb *r* sugara, térfogata tehát az alaplap területének *r*/3-szorosa. Ha összeadjuk térfogatukat, akkor éppen a csonkagúla térfogatát kapjuk. Másrészt az összeg éppen a csonkagúla felszínének *r*/3-szorosa lesz. A keresett arány tehát minden esetben *r*/3.
Megjegyzés: A csonkagúláról csak azt használtuk, hogy konvex és hogy van beírt gömbje. Tehát minden olyan konvex poliéderre, amelybe gömb írható, érvényes, hogy a térfogat és a felszín aránya *r*/3.

B. 3588
I. megoldás: Jelölje *F* az *AB* szakasz felezőpontját. Az *ABM* háromszögben *M*-nél derékszög van, ezért a Thálész tétele szerint $FM = AF$. Másrészt *F* húrfelezőpont, ezért *OFA* háromszögben *F*-nél derékszög van. Így Püthagorász tétele szerint $OF^2 = OA^2 - AF^2 = r^2 - FM^2$ (*r* a kör sugara). Tehát *F*-re teljesül, hogy $OF^2 + FM^2$ konstans (éppen a kör sugarának négyzete). Másrészt könnyen látható, hogy ha *F*-re teljesül, hogy $OF^2 + FM^2 = r^2$, akkor behúzva azt az *AB* húrt, amelynek *F* a felezőpontja, érvényes lesz az $FM=AF$ egyenlőség, amiből a Thálész tétel megfordítása alapján következik, hogy *ABM* háromszögben *M*-nél derékszög van. Vagyis pontosan azok az *F* pontok alkotják a mértani helyet, amelyekre teljesül, hogy $OF^2 + FM^2 = r^2$.
Most megmutatjuk, hogy azoknak az *F* pontoknak a mértani helye, amelyekre $OF^2 + FM^2$ konstans, egy olyan kör, amelynek középpontja *OM* felezőpontja. Jelölje ugyanis *OM* felezőpontját *S*. Legyen *F* merőleges vetülete az *OM* egyenesen *F*’, végül jelölje $SF'=x$, $FF'=y$, a távolságokat valamilyen irányban előjelesen számolva. (Vagyis felvettünk egy koordinátarendszert, amelynek origója *S*, *x*-tengelye az *OM* egyenes, s ebben a koordinátarendszerben az *F* pont koordinátái *x* és *y*.) Ekkor

$$r^2 = OF^2 + FM^2 = OF'^2 + FF'^2 + FF'^2 + F'M^2 = (OS + SF')^2 + 2FF'^2 + (SM - SF')^2$$
$$= 2OS^2 + 2x^2 + 2y^2.$$

Vagyis $x^2 + y^2 = r^2/2 - OS^2$. Ez pedig egy origó közepű kör egyenlete. A kör minden pontja nyilván teljesíti az eredeti egyenletet is.
A keresett mértani hely tehát egy olyan kör, amelynek a középpontja az *OM* szakasz felezőpontja, átmérője pedig $(2r^2 - OM^2)^{1/2}$.

II. megoldás: Alkossák az *M* pontban metsző merőleges húrok végpontjai az *ABCD* húrnégyszöget, melyben az oldalak és az átlók felezőpontjai F_{AB}, F_{BC}, F_{CD}, F_{DA}, F_{AC}, F_{BD} és jelölje a kör középpontját *O*.



Az $OF_{BD}MF_{CA}$ négyszög téglalap, hiszen OF_{BD} és OF_{CA} egy-egy húr felezőmerőlegese. A téglalap *P* középpontja az *OM* szakasz felezőpontja, tehát független a merőleges húrok választásától.
Az *ABDC* hurkolt négyszög oldalfelezőpontjai paralelogrammát alkotnak, ennek egyik átlója $F_{BD}F_{CA}$, így középpontja *P*, ami az $F_{AB}F_{CD}$ szakasznak is felezőpontja lesz.
Állítjuk, hogy a PF_{AB} szakasz hossza csak az *OM* távolságtól függ. Valóban, mivel $F_{BC}F_{AB}$ az *ABC* háromszög középvonala, $F_{CD}F_{BC}$ pedig a *CDB* háromszögé, így

$$2PF_{AB} = F_{CD}F_{AB} = \sqrt{F_{CD}F_{BC}{}^{2} + F_{BC}F_{AB}{}^{2}} = \sqrt{F_{BD}B^{2} + F_{CA}A^{2}} =$$
$$= \sqrt{\left(OB^{2} - OF_{BD}{}^{2}\right) + \left(OA^{2} - OF_{CA}{}^{2}\right)} = \sqrt{2r^{2} - \left(OF_{BD}{}^{2} + OF_{CA}\right)} =$$
$$= \sqrt{2r^{2} - OM^{2}}.$$

Mindezekből következik, hogy az AB szakasz felezőpontja egy olyan körön helyezkedhet el, amelynek középpontja P, sugara pedig a fenti képlet végén található érték.

Meg kell még mutatnunk, hogy ennek e körnek bármely pontja előadódik valamely a feltételeknek megfelelő AB szakasz felezőpontjaként. Legyen tehát most F_{AB} tetszőleges olyan pont, amelynek P-től való távolsága megfelel a fenti képletnek. Először azt mutatjuk meg, hogy F_{AB} a kör belső pontja. Valóban, a számtani és négyzetes közepek közti egyenlőtlenség alapján

$$OF_{AB} \le OP + PF_{AB} = \frac{OM + \sqrt{2r^{2} - OM^{2}}}{2} \le \sqrt{\frac{OM^{2} + (2r^{2} - OM^{2})}{2}} = r,$$

sőt az egyenlőség sem teljesülhet, mert M belső pontja a körnek, azaz $OM^2 < 2r^2 - OM^2$.

Legyen AB az OF_{AB}-re F_{AB}-ben állított merőleges által a körből kimetszett húr. F_{AB} szükségképpen az AB felezőpontja, csak azt kell megmutatnunk, hogy $AMB\angle = 90°$, azaz (Thalesz tételének megfordítása alapján) $F_{AB}M = F_{AB}A$. Az $F_{AB}OF_{CD}M$ paralelogrammában $2F_{AB}O^2 + 2F_{AB}M^2 = 4F_{AB}P^2 + OM^2$, azaz $F_{AB}M^2 = r^2 - F_{AB}O^2$, az $OF_{AB}A$ derékszögű háromszögben pedig $F_{AB}A^2 = OA^2 - F_{AB}O^2 = r^2 - F_{AB}O^2$, ami igazolja állításunkat.

III. megoldás: Jelölje a kör középpontjából az A, B, M pontokba mutató vektorokat rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{m}$. A húrok merőlegességének feltétele a skaláris szorzat segítségével az $(\mathbf{m} - \mathbf{a})(\mathbf{m} - \mathbf{b}) = 0$ egyenlettel fogalmazható meg. Vegyük észre, hogy

$$(m - a)(m - b) = m^{2} - (a + b)m + ab = \frac{1}{2}(m - a - b)^{2} + \frac{1}{2}(m^{2} - a^{2} - b^{2}),$$

ahol $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ hossza a kör sugarával egyenlő. Ennek alapján a merőlegesség feltétele az

$$\left(\frac{m}{2} - \frac{a + b}{2}\right)^{2} = \frac{2r^{2} - OM^{2}}{4}$$

alakban írható, ahol a jobb oldal már konstans. Az egyenlet azt fejezi ki, hogy az AB szakasz felezőpontja az OM szakasz felezőpontjától rögzített távolságra van. Többet itt nem bizonyítunk.

Megjegyzések

1. Egy ide kívánkozó feladat: egy húrnégyszög oldalfelezőpontjai is húrnégyszöget alkotnak. Milyen algebrai összefüggés áll fenn a két kör sugara és középpontjaik távolsága között?

2. Lényeges-e, hogy az M pont *belső* pontja a körnek?

B. 3589

I. megoldás (*Hármas maradék*)

2 pozitív páratlan kitevős hatványainak hármas maradéka 2. Végtelen sok olyan páratlan pozitív egész szám van, amelynek hármas maradéka 1. Ilyen n számokra tehát $2^n + n$ osztható hárommal. Ezek között csak az egyik összeg értéke maga a 3 (amikor $n = 1$), az összes többi esetben összetett szám az eredmény.

II. megoldás (*Ötös maradék*)

Az alábbi táblázat 2^n és $n + 2^n$ végződését mutatja n függvényében.

n	1	3	5	**7**	9	11	**13**	15	17	19	21	23	25	**27**	29	31	**33**
2^n	2	8	2	**8**	2	8	**2**	8	2	8	2	8	2	**8**	2	8	**2**
$n + 2^n$	3	1	7	**5**	1	9	**5**	3	9	7	3	1	7	**5**	1	9	**5**

Látható, hogy $n = 7 + 20k$ és $n = 13 + 20k$ esetén (k természetes szám) $n + 2^n$ osztható 5-tel (és nagyobb 5-nél).

B. 3590.

Az eredményt először is kiszámoltam a Mathematica program segítségével. Itt a program:

```
a = NSolve[x^3 - 10 x + 11 == 0, x]
{{x -> -3.61186}, {x -> 1.34132}, {x -> 2.27053}}

x1 =  x /. First[a[[1]]]; x2 = x /. First[a[[2]]]; x3 = x /. First[a[[3]]];
s = (N[ArcTan[x1] + ArcTan[x2] + ArcTan[x3]])/Pi
0.25
```

A végeredmény tehát $\pi/4$. Ezt be is bizonyítjuk. Legyen Arctg $u = \alpha$, Arctg $v = \beta$, Arctg $w = \gamma$, azaz tg$\alpha = u$, tg$\beta = v$, tg$\gamma = w$.

Ötletgyűjtés kedvéért tegyük fel, hogy igaz az állítás, azaz $\alpha + \beta + \gamma = \pi/4$. Ekkor

$$(*)\qquad tgg = tg[45° - (a+b)] = \frac{tg45° - tg(a+b)}{1 + tg45° \cdot tg(a+b)} = \frac{1 - tg(a+b)}{1 + tg(a+b)} =$$

$$= \frac{1 - \dfrac{tga + tgb}{1 - tgatgb}}{1 + \dfrac{tga + tgb}{1 - tgatgb}} = \frac{1 - tgatgb - tga - tgb}{1 - tgatgb + tga + tgb}.$$

A ($*$) átalakítás-sor első és utolsó tagját egyenlővé téve, majd átszorozva és rendezve azt kapjuk, hogy

$$(**)\qquad (tga + tgb + tgg) + (tgatgb + tggtga + tgbtgg) - (tgatgbtgg) = 1,$$

ami valóban teljesül, hiszen a Vieta-formulák szerint a zárójeles tagok értéke rendre 0, -10 és -11.

A bizonyítás céljából induljunk ki a ($**$) összefüggésből! Ha kifejezzük belőle tgγ-t, akkor ($*$) utolsó formulájához jutunk. Ez ($*$) szerint (a soron visszafelé haladva) tg[45°-(α+β)]-val egyenlő. Kapjuk tehát, hogy tgγ = tg[45°-(α+β)], azaz $\alpha + \beta + \gamma = (\pi/4) + k\pi$.

Az adott harmadfokú polinom együtthatóiból a Vieta formulák alapján az is kiderül, hogy a gyökök közül kettő pozitív egy pedig negatív, így α, β és γ közül kettő a (0; π/2), egy pedig a (-π/2, 0) intervallumban van, azaz fent csak $k = 0$ lehetséges. A kérdéses összeg értéke tehát π/4.

I. Általánosítás

Vegyük észre, hogy

$$tg(a+b+g)=tg\left[g+(a+b)\right]=\frac{tgg+tg(a+b)}{1-tgg\cdot tg(a+b)}=$$

$$=\frac{tgg+\dfrac{tga+tgb}{1-tgatgb}}{1-tgg\cdot\dfrac{tga+tgb}{1-tgatgb}}=\frac{tga+tgb+tgg-tgatgbtgg}{1-tgatgb-tgbtgg-tggtga},$$

így ha tgα, tgβ és tgγ az $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ polinom gyökei, azaz

$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma = -a_1, \quad \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma + \mathrm{tg}\gamma\,\mathrm{tg}\alpha = a_2, \quad \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma = -a_3,$$

akkor

$$tg(a+b+g)=\frac{-a_1+a_3}{1-a_2}.$$

Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy ha

$$\mathrm{tg}\alpha_1, \mathrm{tg}\alpha_2, ..., \mathrm{tg}\alpha_n$$

az

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n$$

polinom gyökei, akkor

$$tg(a_1+a_2+...+a_n)=\frac{-a_1+a_3-a_5+a_7-...}{1-a_2+a_4-a_6+...}=\frac{\sum_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(-1)^i a_{2i-1}}{\sum_{i=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(-1)^i a_{2i}}.$$

Megjegyzés

Abel az 1820-as években olyan függvények integráljait vizsgálta, amely függvények algebraiak, de primitív függvényük nincs az ismert függvények között. Az egyik fő problémát pld a

$$\frac{dx}{\sqrt{p(x)}}$$

integrandusok jelentették, ahol $p(x)$ tetszőleges polinom. Ha $p(x)$ másodfokú, akkor meghatározható a primitívfüggvény (pld arcsin$x$). Ha $p(x)$ harmad vagy negyedfokú, akkor elliptikus integrálról van szó, nem volt ismert a primitívfüggvény. Ezeket Fagnano, Euler, Lagrange, Legendre alaposan vizsgálta, és éppen Abel és Jacobi mutatta meg, hogy az integrálfüggvények inverzfüggvénye kiterjeszthető a komplex számsíkra, és ilyenkor kettős periódusú függvényeket kapunk, amelyek egy-egy háló pontjaiban szingulárisak. Ezek az elliptikus függvények. Abel az ötödfokú $p(x)$ függvényekre is vizsgálta a kérdést, azt hiszem így jutott el az ötödfokú egyenlet gyökeinek gyökökkel való meghatározásának kérdéséhez. Abel egyik eredménye rendkívül általános és olyasmit mond ki, hogy az algebrai függvények integrandusainak mindig van addíciós tétele (mint pld az arcsin$x$-nek).

Abel tétele

Legyen $P(x, y)$ tetszőleges kétváltozós polinom (azaz y az x algebrai függvénye), $C(x, y, t)$ pedig tetszőleges többváltozós polinom (lehetséges, hogy t maga is több változó, azaz t=(t_1, t_2, ..., t_m)), amelyben t-t paraméternek képzeljük: $C(x, y, t) = C_t(x, y)$. Rögzítünk egy tetszőleges $R(x, y)$ racionális törtfüggvényt, és P görbéjén egy tetszőleges $q_0(x_0, y_0)$ kezdőpontot. Jelölje P és C_t metszéspontjainak halmazát Q_t. Ebben az esetben

$$f(t)=\sum_{q\in Q_t}\int_{q_0}^{q}R(x,y)dx=S(t)+\sum A_i \ln S_i(t),$$

ahol S és S_i a t változó(k) racionális függvényei.

Abel tétele tehát azt mondja ki, hogy algebrai függvény integrálja, ha meghatározhatatlan is, de egy algebrai görbével való metszéspontokig vett integrálok összege kényelmesebben megadható. A "kényelmes alak" olyan $f(t)$ függvényt jelent, amelynek t szerinti deriváltja racionális törtfüggvény.

B.3591. (*Salát Máté megoldása*) Jelölje P' a P pont AC-n levő BD-vel párhuzamos vetületét! Származtassuk az E', F', G', H' pontokat a P' pontból pontosan úgy, ahogy az E, F, G, H pontokat származtattuk a P pontból!
Jelölje E^* és H^* a PE illetve a PH egyenesnek az $E'H'$ egyenessel vett metszéspontját!
Jelölje F^* és G^* a PF illetve a PG egyenesnek az $F'G'$ egyenessel vett metszéspontját! Az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy a P pont az ADC háromszögbe esik.
Jelölje X és Y a PE és a $P'H'$ egyenesek illetve a PF és a $P'G'$ egyenesek metszéspontját!
Az $AE'P'H'$ és az $ABCD$ négyszög középpontosan hasonló az A pontra nézve, így $E'H'$ párhuzamos BD-vel, és mivel PP' is párhuzamos BD-vel, így $E'H'$ és PP' egymással is párhuzamosak.
A $CF'P'G'$ és a $CBAD$ négyszög középpontosan hasonló a C pontra nézve, így $F'G'$ párhuzamos BD-vel, és mivel PP' is párhuzamos BD-vel, így $F'G'$ és PP' egymással is párhuzamosak.

A $PP'H'H^*$ és a $PP'E'E^*$ paralellogrammák BD-vel párhuzamos alapjai és az ezekhez tartozó magasságuk egyenlő, így

$$t_{PP'H'H^*}=t_{PP'E'E^*} \quad\Rightarrow\quad t_{PP'H'H}\le t_{PP'E'E} \quad\Rightarrow\quad t_{AEPH}\le t_{AE'P'H'}.$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$t_{CFPG}\le t_{CF'P'G'},$$

így

$$(1)\qquad \sqrt{t_{AEPH}}+\sqrt{t_{CFPG}}\le\sqrt{t_{AE'P'H'}}+\sqrt{t_{CF'P'G'}}.$$

Mivel az $AE'P'H'$ és az $ABCD$ négyszög középpontosan hasonló az A pontra nézve, így

$$\frac{\sqrt{t_{AE'P'H'}}}{\sqrt{t_{ABCD}}}=\frac{AP'}{AC}.$$

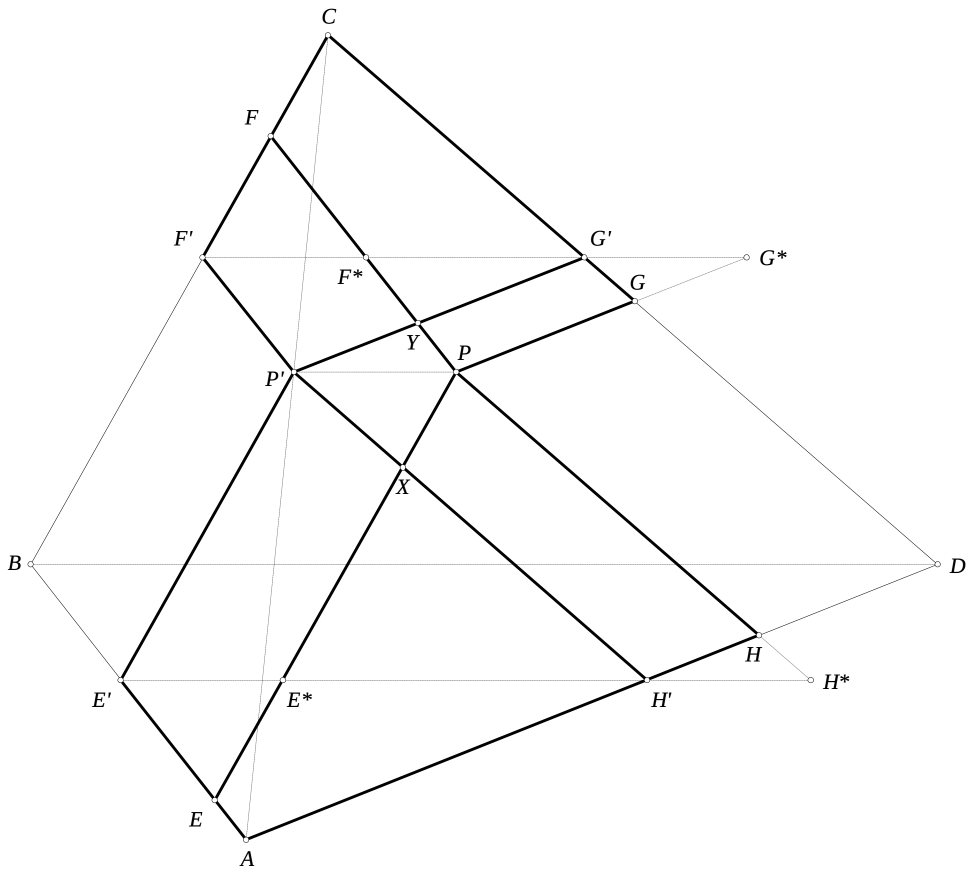
Mivel a $CF'P'G'$ és a $CBAD$ négyszög középpontosan hasonló a C pontra nézve, így

$$\frac{\sqrt{t_{CF'P'G'}}}{\sqrt{t_{ABCD}}}=\frac{CP'}{CA}..$$

A két egyenlet összegében a jobb oldalon 1 áll, így átszorzás után azt kapjuk, hogy

$$(2)\qquad \sqrt{t_{AE'P'H'}}+\sqrt{t_{CF'P'G'}}=\sqrt{t_{ABCD}}.$$

(1) és (2) összevetéséből adódik a bizonyítandó állítás. A gondolatmenetből az is kiderült, hogy akkor van egyenlőség, amikor P az AC átlóra esik.


C
F
F'
F*
G'
G*
G
Y
P
P'
X
B
D
H
E'
E*
H'
H*
E
A