Budapesti Általános Iskolások Matematika Versenye
2018-2019
8.osztály
Döntő
Megoldások

1. Petinek van négy különböző tolla, és mindegyik tollnak egy a többitől különböző doboza. Hányféleképpen lehet a tollakat a dobozokba helyezni úgy, hogy minden dobozban egy toll legyen, de egyik toll se legyen a saját dobozában?

Megoldás:

1. megoldás: Az első toll dobozában a második, a harmadik vagy a negyedik toll lehet. Nézzük azt az esetet, amikor a második toll van benne! Ekkor a harmadik toll dobozában az első vagy a negyedik toll lehet. Ha az első került oda, akkor a negyedik toll dobozában csak a harmadik lehet, így a második dobozába került a negyedik. Ez 1 lehetőség. Ha a harmadik toll dobozában a negyedik toll van, akkor a maradék két toll bármelyike kerülhet bármelyik üres dobozba, ez tehát újabb 2 lehetőség. Tehát ha az első toll dobozában a második toll van, akkor 3 lehetőséget kapunk. Hasonlóan 3-3 lehetőséget kapunk a másik két esetben is, így összesen 9 megfelelő elrendezés van.

2. megoldás: Ha minden toll mehetne a saját dobozába is, akkor $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ lehetőség lenne összesen. De ezekből most rosszak azok az elhelyezések, amikor akárhány toll a saját dobozában van. Szedjük össze, hány ilyen „rossz" eset van! Mind a négy 1-féleképpen lehet a saját helyén. Pontosan 3 toll nem lehet a saját helyén, mert akkor a negyedik is a helyére kerülne. Pontosan kettő toll úgy lehet a helyén, hogy a maradék kettő helyet cserél. Az, hogy melyik kettő van a helyén, azt 6-féleképpen lehet kiválasztani. Végül nézzük azt a lehetőséget, amikor pontosan egy toll van a helyén. Először legyen az egyes toll a saját tokjában. Ezt kétféleképpen lehetséges. Hasonlóan két-két lehetőség adódik, ha a maradék tollak közül pontosan egy van a helyén. Így a „rossz" esetek száma: $1 + 6 + 4 \cdot 2 = 15$. A maradék 9 eset a feladat kérdésére a válasz.

3. megoldás: Természetesen a módszeres próbálgatással előállított összes 9 lehetőség felsorolása is tökéletes válasz a feladatra.

2. *Három nyuszinak összesen 42 répája van. Ha az első nyuszi egyenlően szétosztaná répáit a másik két nyúl között, ezután a második nyúl is ugyanígy tenne az előtte lévő répákkal (a most kapott répákat is beleértve), majd a harmadik is, akkor végül mindenkinek pontosan annyi répája lenne, mint az osztozkodás kezdetén. Kinek hány répája volt kezdetben?*

Megoldás:

Jelöljük a nyuszikat E, M és H, a kezdetben lévő répáik számát pedig e, m és h betűkkel.

A végén a harmadik nyuszi osztja szét a répáit a többiek között, ezért neki a végén nem marad répája. Mivel mindenkinek pontosan annyi répája van a végén, mint amennyi az elején volt, ezért $h = 0$.

Foglaljuk táblázatba, hogy az osztozkodás során mikor kinek mennyi répája van!

	E	M	H
Kezdetben:	e	m	0
1. osztás után:	0	$m + \frac{e}{2}$	$\frac{e}{2}$
2. osztás után:	$\frac{m}{2} + \frac{e}{4}$	0	$\frac{m}{2} + \frac{3}{4}e$
3. osztás után:	$\frac{3}{4}m + \frac{5}{8}e$	$\frac{m}{4} + \frac{3}{8}e$	0

A táblázatból látható, hogy $e = \frac{3}{4}m + \frac{5}{8}e$, amiből $e = 2m$.

Mivel $e + m + 0 = 42$, ezért az első nyuszinak kezdetben 28, a másodiknak 14, a harmadiknak pedig 0 répája volt.

3. *Egy $14{,}4\ m^2$ téglalap alapterületű folyosó padlóját egyforma téglalap alakú csempékkel raktak ki úgy, hogy hosszában haladva minden ötödik sorban derékszögben elfordítva tették le a csempéket. Így 15 sor csempét kellet lerakni, vágás nélkül. Később észrevették, hogy ha végig úgy teszik a csempéket, mint az ötödik sorban van, akkor sem kell vágni, csak ekkor 18 sor kell. Milyen méretű csempével dolgozhattak, ha a csempék oldalai deciméterben mérve egész számok?*

Megoldás:

Legyen a csempe két oldala a illetve b hosszúságú. Ekkor a folyosó oldala mentén először elhelyezett csempék összhossza $12a + 3b$. Másodszor ugyanez a távolság $18b$. Innen $a = \frac{5}{4}b$. A folyosó alapterületét 18-cal osztva megkapjuk a második lerakásnál egy sorban elhelyezett csempék területét, ami $80\ dm^2$. $80 = b \cdot b \cdot \frac{5}{4} \cdot x$, ahol x az egy sorba letett csempék száma. Vagyis $\frac{64}{x} = b \cdot b$. $(x \neq 0)$ Mivel a csempék oldalai deciméterben mérve egész számok, ezért a $\frac{64}{x}$ négyzetszám, azaz x csak $1, 4, 16$ vagy 64 lehetne.

Az x nem lehet 1, mert 1 darab csempe nem lehet a sorban, mivel a csempék oldalai nem ugyanakkorák, és a téglalap alakú folyosón így is, úgy is le van rakva a csempe.

Az x nem lehet 16, mert bár $b = 2$ dm egész deciméter lenne, de $a = 2 \cdot \frac{5}{4}$ dm nem.

Hasonló okokból az x nem lehet 64 se.

$x = 4$ lehetséges, ekkor $b = 4$, illetve $a = 5$

A csempék oldalai tehát 4 dm, illetve 5 dm hosszúak.

4. *Egy versenyen 64 résztvevő van, és mindenki játszik a többiekkel mérkőzéseket (egy mérkőzés csak egy játszmából áll, döntetlen nem lehetséges). Aki összegyűjt három vereséget, az kiesik.. A győztes az, aki a végén bennmarad egyedül. Minimum, illetve maximum hány mérkőzésre kerülhet sor ezen a versenyen?*

Megoldás:
Nézzük az egyes mérkőzéseket a vesztes oldaláról. Minden résztvevő akkor esett ki, amikor pontosan három vereséget szedett össze, tehát az összes vereségek száma $63 \cdot 3$, plusz a győztes vereségeinek száma. Ez lehet $0, 1$ vagy 2, mert ő nem esett ki. Tehát a mérkőzések minimális száma $63 \cdot 3 = 189$, a maximális száma $189 + 2 = 191$.

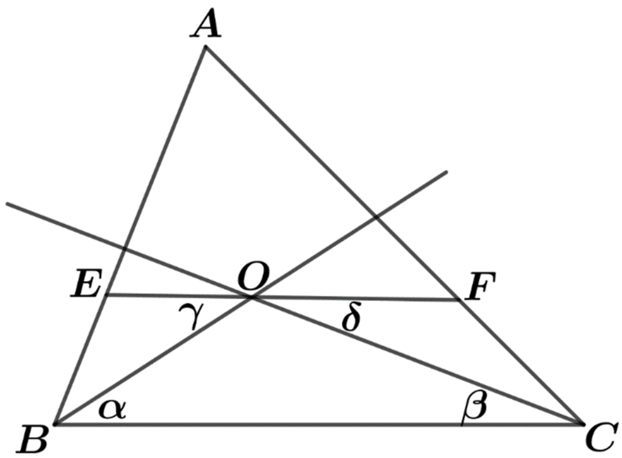
Mivel minden mérkőzésen pontosan egy győztes és egy vesztes van, illetve egy-egy játékos mérkőzéseinek számára a három vesztett mérkőzés utáni kiesésen kívül semmiféle kikötés nincsen, ezért mind a minimum, mind a maximum mérkőzésszám előállhat. Egy-egy példával alátámasztva:

Állítsuk sorba a versenyzőket! Az első háromszor kikap a másodiktól és kiesik, a második háromszor kikap a harmadiktól és kiesik, a harmadik háromszor kikap a negyediktől és kiesik, és így tovább mindaddig, amíg a hatvanharmadik háromszor kikap a hatvannegyediktől és kiesik. Ekkor a hatvannegyedik játékosnak 0 darab vesztett mérkőzése van ő nyert, a lejátszott mérkőzések száma pedig $63 \cdot 3 = 189$.

A maximum eléréséhez a hatvanharmadik versenyző kétszer megveri a hatvannegyediket mielőtt összegyűjtené a három vereségét. Ekkor $189 + 2 = 191$ az összes mérkőzés száma.

5. *Az ABC háromszög A csúcsával szemben 10 cm-es oldal, B csúcsával szemben 11 cm-es oldal, C csúcsával szemben 7 cm-es oldal található. Húzzunk párhuzamost a beírt kör középpontján át a BC oldallal. Ez a párhuzamos az AB oldalt az E, az AC oldalt pedig az F pontban metszi. Mekkora az AEF háromszög kerülete?*

Megoldás:



A beírt kör középpontja a szögfelezők metszéspontja. Mivel BC párhuzamos EF-fel, ezért α és γ váltószögek, azaz egyenlőek. Ugyanezért δ és β is váltószögek, azaz egyenlőek. α a B csúcsnál lévő szög fele, ezért $\alpha = OBE\sphericalangle$, tehát a BOE háromszög egyenlő szárú háromszög BO alappal, vagyis $BE = EO$. Hasonló gondolatmenettel $OF = FC$.

$$K_{AEF} = AE + EO + OF + FA = AE + EB + FC + FA = 7\,cm + 11\,cm = 18\,cm$$