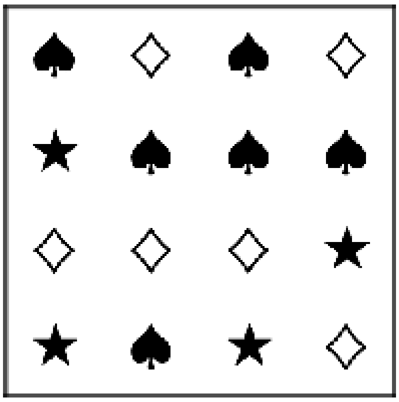
Budapesti Általános Iskolák Matematika Versenye
8. osztály
II. forduló
MEGOLDÁSOK

1. feladat: Peti első jegye matematikából sajnos 4-es lett, így ez a jegy van még csak beírva a Krétába (elektronikus napló). Legalább hány ötöst kell szereznie, hogy az átlaga 5-ös legyen a Naplóban? (A Kréta két tizedesjegyre kerekít.) *(10 pont)*

1. feladat megoldás: Legyen x a legalább megszerzett ötösök darabszáma. *(1 pont)*
Ekkor az átlag $\frac{4+5\cdot x}{x+1} \geq 4,995$. *(4 pont)*
Ebből $x \geq 199$. *(4 pont)*
Tehát legalább 199 ötösre lenne szüksége Petinek. *(1 pont)*

2. feladat: A képen látható 4×4-es táblázatba 16 számot helyeztünk el. A legfelső sorban a számok összege 14. A bal szélső oszlopban pedig 11. Mennyi a számok összege a táblázatban? (Az azonos jelek azonos számokat takarnak.)

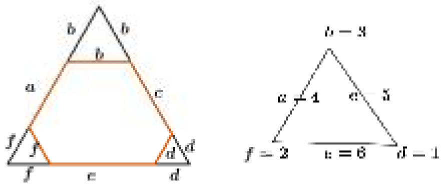


(10 pont)

2. feladat megoldás: Az első sorból 1 pikk és 1 káró összegének értéke 7. *(2 pont)*
Az első oszlopból így a csillag értéke 2. *(2 pont)*
A teljes táblázatban 6 darab pikk-káró pár és 4 darab csillag szerepel, *(4 pont)*
tehát a számok összege: $6 \cdot 7 + 4 \cdot 2 = 50$. *(2 pont)*

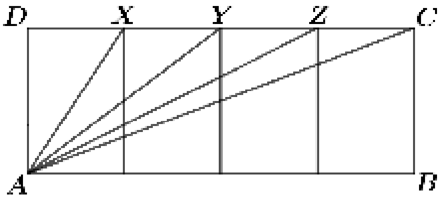
3. feladat: Van-e olyan hatszög, amely szögei egyenlőek és oldalai cm-ben egymást követő egész számok? *(10 pont)*

3. feladat megoldás: Ha létezik ilyen hatszög, akkor belső szögeinek összege $4 \cdot 180 = 720$. *(1 pont)*
Így egy-egy belső szöge $720 : 6 = 120$. *(1 pont)*
Külső szögei rendre 180°-120°=60°. *(1 pont)*
Húzzuk meg az ábrának megfelelően a hatszög külső szögeit. *(2 pont)*



A hatszög két szomszédos csúcsa és két külső szög metszéspontja szabályos háromszöget alkot, hiszen van két 60°-os szöge, tehát a harmadik is 60°,oldalai a hatszög egy oldalával megegyeznek. *(1 pont)*
Továbbá egy nagy szabályos háromszög alakuk ki, amelynek egy-egy oldala a hatszög három-három oldalával kell megegyezzen. *(1 pont)*
Azaz, ha van ilyen hatszög, akkor $f+a+b=b+c+d=d+e+f$. (A jobb oldali ábrának megfelelően.) Legyen a hat egymást követő egész szám az $1,2,3,4,5,6$. Ezek a feltételnek megfelelően behelyettesíthetőek. (Egy lehetséges megoldás látható az ábrán.) Tehát létezik ilyen hatszög. *(3 pont)*

4. feladat: Az ABCD téglalapot négy egybevágó kis téglalapra osztjuk az ábra szerint. Tudjuk, hogy $AX = 29$ és $AY = 41$. Milyen hosszú az AC átló?



(10 pont)

4. feladat megoldás: Legyen az $AD = a$ és $DX = b$! Ekkor $DY = 2b$ és $DC = 4b$ a feladat feltétele szerint. Az ADX derékszögű háromszögre alkalmazzuk Pitagorasz tételét: $a^2 + b^2 = 29^2$ (1). *(2 pont)*
Majd az ADY derékszögű háromszögre alkalmazzuk Pitagorasz tételét: $a^2 + (2b)^2 = 41^2$, azaz $a^2 + 4b^2 = 41^2$. (2) *(2 pont)*
Az (1) egyenletet vonjuk ki (2)-ből és kapjuk, hogy $3b^2 = 41^2 - 29^2 = 840$. *(3 pont)*
Az ABC derékszögű háromszögre alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt: $a^2 + (4b)^2 = AC^2$,
azaz $a^2 + 16b^2 = AC^2$. *(1 pont)*
Tehát

$$c^2 = a^2 + 16b^2 = a^2 + b^2 + 15b^2 = a^2 + 5 \cdot 3b^2 = 29^2 + 5 \cdot 840 = 5041.$$

(1 pont)
Innen $AC = 71$, vagyis az AC átló hossza 71 cm. *(1 pont)*

5. feladat: Hányféleképpen lehet szétosztani Anna, Bea, Cili és Dóri között egy almát, két barackot, három körtét és két szilvát úgy, hogy mindegyik leány két egész gyümölcsöt kapjon? (Az egyfajta gyümölcsöket nem különböztetjük meg egymástól. Két szétosztás különböző, ha van olyan leány, aki az egyik esetben kapott olyan gyümölcsöt, amelyet a másik esetben nem kapott.)
(10 pont)

5. feladat megoldás: Vegyünk egy tetszőleges szétosztást. Anna kap egy almát és egy barackot, Bea egy barackot egy körtét, Cili két körtét, Dóri pedig a két szilvát. A gyümölcsök ugyanezen szétosztását a lányok között 24 féle képpen tehetjük meg. *(2 pont)*
Most nézzük a gyümölcsök következő szétosztását: AB-BK-KS-KS. Ez a szétosztás további 12 különböző esetet ad. *(2 pont)*
Itt a gyümölcsök között van azonos. Ez a két lehetőség van egy-egy szétosztásnál.
Szedjük össze a lehetséges párosításokat:

1. $AB - BK - KK - SS$ (24 féle)

2. $AB - BK - KS - KS$ (12)
3. $AB - BS - KK - KS$ (24)
4. $AK - BB - KK - SS$ (24)
5. $AK - BB - KS - KS$ (12)
6. $AK - BK - BK - SS$ (12)
7. $AK - BK - KS - BS$ (24)
8. $AK - BS - KK - BS$ (12)
9. $AS - BB - KK - KS$ (24)
10. $AS - BK - BK - KS$ (12)
11. $AS - BK - BS - KK$ (24) *(5 pont)*

Így összesen $6 \cdot 24 + 5 \cdot 12 = 204$ különböző szétosztás lehetséges. *(1 pont)*

A feladatokat összeállította: Ádám Réka, Jakucs Erika, Kocsis Szilveszter, Pereczes Marianna
A 8. osztály 1. döntős feladata Zólomy Csanád 8.a osztályos tanuló feladata.
Lektorálta: Kiss Géza