Budapesti Általános Iskolák Matematika Versenye
8. osztály
I. forduló
MEGOLDÁSOK

1. feladat: Anna, Bea, Cili, Dezső és Elemér egy körben állva egymás után mondják ki egytől kezdve a pozitív egész számokat. Ha valaki kimond egy olyan számot, amiben van hetes, akkor megfordul a kör. Ki mondja ki a 77-es számot, ha Anna kezdett, Bea felé indult a kör és mindenki a szabályoknak megfelelően számolt? *(6 pont)*

1. feladat megoldás: Kezdjük el felírni a számokat, hogy ki mit mond. *(1 pont)*
Azok a számok, amikben van 7-es számjegy, tizessével következnek egymás után egészen 67-ig. *(1 pont)*
Mivel öten vannak a gyerekek, 67-ig Bea fogja kimondani az összes ilyen számot,
így nála fordul a kör. *(1 pont)*
$7, 27, 47$ és 67-től Anna, $17, 37$ és 57-től Cili felé indul a számolás. *(1 pont)*
70-től pedig minden számban van 7-es, így két gyerek felváltva mondja ki a végén a számokat. *(1 pont)*
A 71-től kezdve minden másodikat Elemér mondja majd ki, így a 77-et is. *(1 pont)*

2. feladat: -Az alábbi állítások közül pontosan három hamis.
-Az alábbi állítások közül legalább három hamis.
-Az alábbi állítások közül legfeljebb három hamis.
Hány hamis állítás van a felsoroltak között? *(6 pont)*

2. feladat megoldás: Az első két állítás jelen esetben ugyanazt jelenti, vagyis egyszerre
lesznek igazak vagy hamisak. *(2 pont)*
Az első állítás (és így a második is) ha igaz lenne, akkor ellentmondana önmagának, miszerint
mindhárom állítás hamis így önmaga is, tehát az első (és a második) állítás hamis. *(2 pont)*
Ha a harmadik állítás hamis lenne, akkor az első állítás igaz lenne, amiről kiderült, hogy lehetetlen. *(1 pont)*
Tehát az első két állítás hamis, a harmadik igaz, így nincs ellentmondás, pontosan két
hamis állítás van a felsoroltak között. *(1 pont)*

3. feladat: Az a, b, c, d, e, f és g mindegyikének az értéke vagy 0, vagy 1. Mennyi az $a+b+c+d+e+f+g$ kifejezés értéke, ha tudjuk, hogy

$$a + c + f = 2;$$

$$b + e + g = 2;$$

$$a + e + d = 3;$$

(6 pont)

3. feladat megoldás: A harmadik egyenletből kiderül, hogy $a = e = d = 1$. *(2 pont)*
Az első és a második egyenletből pedig kiderül, hogy $(a + c + f) + (b + e + g) = 2 + 2$.
Vagyis $a + b + c + e + f + g = 4$. *(2 pont)*
Ha ehhez még hozzáadjuk a $d = 1$-et, akkor láthatjuk, hogy $a + b + c + d + e + f + g = 5$. *(2 pont)*

4. feladat: András és Bandrás egy játékot játszanak. 11 kavics van egy kupacban, amiből felváltva 1-et vagy 3-at vesznek el. András kezdi a játékot. András akkor nyer, ha ő veszi el az utolsó kavicsot, Bandrás pedig akkor, ha a lépése után már csak 1 kavics marad az asztalon. Egyéb esetben döntetlen. Kinek van nyerő stratégiája? *(6 pont)*

A feladatokat összeállította: Ádám Réka, Jakucs Erika, Kocsis Szilveszter, Pereczes Marianna
Lektorálta: Kiss Géza

4. feladat megoldás: Bandrásnak van nyerő stratégiája. Először megmutatjuk, hogy el tudja érni, hogy András előtt 5 kavics legyen az asztalon, innen pedig ha András 1-et vesz el, akkor Bandrás 3-at és nyert, ha pedig András 3-at, akkor Bandrás 1-et és szintúgy nyert.
Ha András a 11 kavicsból 3-at vesz el az elején, akkor Bandrás is 3-at, így előállt az előbb említett helyzet, hogy András előtt 5 kavics van.
Ha András a 11 kavicsból csak 1-et vesz el, akkor Bandrás is csak 1-et, így 9 kavics marad. Innentől Bandrás kiegészíti András húzását 4-re, vagyis ha András 1-et vesz el, akkor Bandrás 3-at, illetve fordítva. Így újra elérte Bandrás, hogy 5 kavics maradjon az asztalon. *(6 pont)*

5. feladat: Egy konvex négyszög átlói merőlegesek egymásra. Három oldalának hossza rendre $1, 7$, illetve 8 cm. Milyen hosszú a négyszög negyedik oldala?

(6 pont)

5. feladat megoldás: Rajzoljunk egy ábrát. *(1 pont)*
Jelöljük x-el a keresett szakasz hosszát, illetve az átlók metszéspontjától a csúcsokba húzott szakaszok hossza legyen rendre a, b, c és d.
Írjunk fel Pitagorasz-tételeket a derékszögű háromszögekre.
Így látható, hogy $a^2 + b^2 = 1^2$, $b^2 + c^2 = 7^2$, $c^2 + d^2 = 8^2$, valamint $d^2 + a^2 = x^2$. *(3 pont)*
A szemközti oldalakra felírt Pitagorasz-tételeket vizsgálva igaz, hogy $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1^2 + 8^2$, valamint $b^2 + c^2 + d^2 + a^2 = 7^2 + x^2$.
Ezek szerint $1^2 + 8^2 = 7^2 + x^2$, *(1 pont)*
amiből az egyetlen jó megoldás az $x = 4$. *(1 pont)*