Kardos-Montágh Matematikaverseny, 2022.
II. forduló

Rekurzió

A természetes számok halmazán értelmezett függvényt, vagyis a sorozatot általában megadhatjuk explicit módon, azaz megmondjuk azt, hogy egy tetszőleges természetes számhoz mit rendelünk hozzá. Megadhatjuk azonban úgy is, hogy megadjuk az első (néhány) tagját, a további tagokat pedig az előttük levő(k) felhasználásával definiáljuk. A ilyen esetekben azt mondjuk, hogy a sorozatot *rekurzív módon* adtuk meg. Erre tipikus példa a Fibinacci sorozat.

A feladatokban ezt követően gyakran az a cél, hogy adjuk meg a sorozat n-edik tagját zárt alakban.

Megoldási módszerek

Sokszor több úton is meg lehet oldani a feladatokat. Néhány gyakran használt módszer:

Teljes indukció (azaz vegyük észre ...)

Megpróbáljuk kitalálni a végeredményt, majd ezt teljes indukció segítségével igazoljuk. A módszer problémás része a kitalálás.

Teleszkopikus összeg

A keresett összefüggést felírva, majd az index léptetésével 1-ig (illetve a legkisebb értékig) – esetleg megfelelő konstansokkal szorozva – összeadjuk őket. Nézzük erre a következő rekurzív sorozatot (a jól ismert számtani sorozatot):

$$a_1 = 3;\ a_n = a_{n-1} + 2;\ n \geq 2$$

Írjuk fel az elemeket 1-ig

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2, \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + 2, \\ a_{n-2} &= a_{n-3} + 2, \\ &\dots \\ a_3 &= a_2 + 2, \\ a_2 &= a_1 + 2. \end{aligned}$$

A felírt $n - 1$ egyenletet összeadva és az egyforma elemeket elvéve kapjuk, hogy

$$a_n = a_1 + 2(n - 1),$$

ami a konkrét esetben

$$a_n = 3 + 2(n - 1) = 1 + 2n.$$

Teleszkopikus szorzat

A keresett összefüggést felírva, majd az index léptetésével 1-ig (illetve a legkisebb értékig) – esetleg megfelelő konstansokkal szorozva – összeszorozzuk őket. Nagyon fontos ezen módszernél arról meggyőződni, hogy nincs a felírt összefüggések között nulla értékű sor. Nézzük erre a következő rekurzív sorozatot (a jól ismert mértani sorozatot):

$$a_1 = 3;\ a_n = 2a_{n-1};\ n \geq 2$$

Írjuk fel az elemeket 1-ig

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1}, \\ a_{n-1} &= 2a_{n-2}, \\ a_{n-2} &= 2a_{n-3}, \\ &\dots \\ a_3 &= 2a_2, \\ a_2 &= 2a_1. \end{aligned}$$

A felírt $n-1$ egyenletet összeszorozva (figyelve arra, hogy egyik sorban sincs 0 szorzó) és az egyforma elemekkel elosztva kapjuk, hogy

$$a_n = 2^{n-1} \cdot a_1,$$

ami a konkrét esetben

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

Index léptetése

Index le (esetleg fel) léptetésével és az eredeti összefüggés felhasználásával egy „kezesebb" sorozat kialakítása.

Új sorozat (új ismeretlen) bevezetése

Mint az elnevezés mutatja, egy „kezesebb" sorozat elérése a cél. Nézzük erre a következő rekurzív sorozatot:

$$a_1 = 1;\ a_n = 3a_{n-1} + 2;\ n \geq 2$$

Alakítsuk át a képzési szabályt és adja magár az új sorozat létrehozása

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2 \qquad / + 1 \\ a_n + 1 &= 3a_{n-1} + 3 \\ a_n + 1 &= 3\left(a_{n-1} + 1\right) \\ b_n = a_n + 1;\ b_1 &= a_1 + 1 = 2; \\ b_n &= 3b_{n-1} \end{aligned}$$

Ez egy mértani sorozat, aminek a zárt alakja

$$b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

és innen

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$$

Egy feladatban akár több módszer egymás utáni vagy akár egyidejű alkalmazása is lehetséges. Természetesen más megoldási módszerek is léteznek, a felsoroltak a leggyakrabban alkalmazottak.

Lineáris másodrendű rekurzió

A rekurzió általános alakja (vagy erre az alakra hozható)

$$a_1 = A;\ a_2 = B;\ a_n = C_1 \cdot a_{n-1} + C_2 \cdot a_{n-2};\ n \geq 3;\ \text{ és } A;\ B;\ C_1;\ C_2 \in \mathbb{R}$$

A rekurzióhoz tartozó másodfokú egyenlet:

$$q^2 = C_1 \cdot q + C_2,$$

és ennek gyökei legyenek q_1 és q_2.

Ha $q_1 \neq q_2$, akkor a sorozat általános megoldása

$$a_n = K_1 \cdot q_1^{n-1} + K_2 \cdot q_2^{n-1}; \qquad K_1;\ K_2 \in \mathbb{R}$$

alakú, ahol K_1 és K_2 a sorozat első két tagjából kiszámolható, az

$$\begin{cases} a_1 & = K_1 \cdot q_1^{1-1} + K_2 \cdot q_2^{1-1} = K_1 + K_2 \\ a_2 & = K_1 \cdot q_1^{2-1} + K_2 \cdot q_2^{2-1} = K_1 \cdot q_1 + K_2 \cdot q_2 \end{cases}$$

egyenletrendszert megoldva.

Ha $q_1 = q_2$, akkor az általános megoldása

$$a_n = K_1 \cdot q_1^{n-1} + K_2 \cdot q_1^{n-1} \cdot n; \qquad K_1;\ K_2 \in \mathbb{R}$$

alakú, ahol K_1 és K_2 szintén a sorozat első két tagjából kiszámolható, az

$$\begin{cases} a_1 & = K_1 \cdot q_1^{1-1} + K_2 \cdot q_1^{1-1} \cdot 1 = K_1 + K_2 \\ a_2 & = K_1 \cdot q_1^{2-1} + K_2 \cdot q_1^{2-1} \cdot 2 = K_1 \cdot q_1 + 2 \cdot K_2 \cdot q_1 \end{cases}$$

egyenletrendszert megoldva.

Nézzünk egy konkrét példát!

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2};\quad n \geq 3;\quad a_1 = 7;\quad a_2 = 17$$

$$q^2 = 5q - 6 \qquad \Rightarrow \qquad q_1 = 2;\ q_2 = 3,$$

$$a_n = K_1 \cdot 2^{n-1} + K_2 \cdot 3^{n-1}$$

$$\begin{cases} 7 = 2K_1 + 3K_2 \\ 17 = 4K_1 + 9K_2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad K_1 = 2,\ K_2 = 1,$$

$$a_n = 2^n + 3^{n-1}.$$

A második forduló feladatai

A sikeres szerepléshez nem kell az összes feladatot megoldani. Az eredményeket az összes forduló teljesítménye alapján és évfolyamonként külön-külön értékeljük.

Az alábbi feladatok többségét nem csak az ismertetett módszerek segítségével lehet megoldani. A versenyben természetesen minden helyes megoldást maximális pontszámmal értékelünk. Elvileg különböző második megoldásra az eredeti pontszám legfeljebb 50 %-a kapható.

7. Határozzuk meg a_n-t zárt alakban!

$$a_n = 3a_{n-1} + 2n - 3; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1$$ (6 pont)

8. Hány 5-tel osztható szám van a sorozat első 100 tagja között?

$$a_n = a_{n-1} + n^2, \quad n \geq 2; \quad a_1 = 1$$ (6 pont)

9. Határozzuk meg a_n-t zárt alakban!

$$a_n = 3a_{n-1} + 2n^2 - 6n + 3; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1$$ (8 pont)

10. Határozzuk meg a_n-t zárt alakban!

$$na_n = (2n-2)\,a_{n-1} - (n-2)\,a_{n-2}; \quad n \geq 3; \qquad a_1 = 5; \qquad a_2 = 4$$ (10 pont)

11. Bizonyítsuk be, hogy $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_k^2 < 1$, ha

$$0 < a_1 < 1; \qquad a_n = a_{n-1} - a_{n-1}^2; \quad n \geq 2;$$ (10 pont)

12. Határozzuk meg a_n-t zárt alakban!

$$a_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2}}{3a_{n-2} - 2a_{n-1}}, \quad n \geq 3; \quad a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{1}{3}$$ (10 pont)

Beküldési határidő: 2022. március 27. 23^{59}
Beküldési cím: matoktport@gmail.com
Email tárgy: II. forduló megoldásai

A megoldásokat kérjük egy (1!) levélben beküldeni a könnyebb feldolgozás érdekében. A megoldások csatolás formájában kerüljenek a levélbe, kizárólag PDF formátumban. A csatolt file neve ékezetek nélküli legyen és tartalmazza a beküldő nevét, továbbá a forduló sorszámát is (esetleg a feladat sorszámát, ha csak 1 feladatot tartalmaz). Szóköz helyett a "_" karakter alkalmazandó! Példák csatolt file nevekre:
gipszjakab_fordulo2.pdf
gipszjakab_fordulo2_feladat08.pdf