


A CSAPATVERSENY FELADATAI

# V. KAVICS KUPA

2009. március 13.

- Emlékeztetünk arra, hogy válaszként minden feladatra egy egész számot kell feltüntetni a válaszlapokon (0000-tól 9999-ig).
- Ha a ti válaszotok nem egész szám, akkor annak egész részét írjátok a válaszlapra.
- Ha az eredmény negatív szám, vagy a feladatnak nincs megoldása, akkor 0000-t írjatok.
- Ha az eredmény nagyobb 9999-nél, vagy nem egyértelmű, akkor 9999-t írjatok válaszul.
- A számolás során jól jöhetnek az alábbi közelítő értékek:

$\sqrt{2} = 1.4142$ $\sqrt{3} = 1.7321$ $\sqrt{7} = 2.6458$ $\pi = 3.1416$

**Időhatárok**

- **Az első 30 perc** leteltével már nem lehet a szöveggel kapcsolatos kérdéseket feltenni. A kérdéseket csak a csapatkapitányok tehetik fel a zsűrinél.
- 90 perc elteltével a versenynek vége.

**1.** „Íme, Medveczky Medve Úr, amint bukdácsol lefelé a lépcsőn, kopogtatva a feje búbjával, kipp-kopp, minden lépcsőfokon egy koppanás." A 111 lépcsőfok mindegyikén egy szám, az *i*. lépcsőn éppen $(2009i+16):111$ törtrésze. Mennyi a lépcsőkre írt számok összege, azaz $\sum_{i=1}^{111}\left\{\frac{2009\cdot i+16}{111}\right\}$? **(20 pont)**

**2.** Nyuszi, akinek mindig Rengeteg Fontos Dolga volt, éppen egy-egy csillagot rajzolt egy 4×4-es tábla bizonyos mezőibe úgy, hogy két tetszőleges sor és két tetszőleges oszlop elhagyása után is maradjon még csillag a táblán. Legalább hány mezőbe rajzolt csillagot? **(30 pont)**

**3.** Zsebibaba és Kanga egy szép háromszöget rajzoltak a patak partján a homokba. Zsebibaba lemérte az egyik magasságát, 9 cm volt. Kanga egy másik magasságnál 29 cm-t mért. A Magasságokat Mérő Medve lemérte a harmadik magasságot és az *M* cm volt (*M* egész). Mennyi *M* lehetséges legkisebb és legnagyobb értékének szorzata? **(30 pont)**

**4.** Micimackó, azaz Medveczky Medve, vagyis Nyuszi Barátja, az Északi Sark Felfedezője és Füles Farkának Felfedezője barátaival agytornázott. Mackó gondolt egy *X* négyjegyű pozitív egészre. A Malacka előtt heverő 1234 számban és ugyanígy a Füles előtt levő 3456 számban is bekarikázta mindazon jegyeket, amik *X*-ben előfordulnak. Mindkét számban két karika volt. Hányféle lehetett az *X* szám? **(25 pont)**

**5.** Amíg Micimackó a léggömbbe kapaszkodva felhődalt énekelt, a fa tövében Róbert Gida a matek háziján gondolkodott. Volt benne paraméter, egész rész, szignum, ami csak kell, íme: legyen *p* olyan valós paraméter, amely esetén a $x^8 + px^4 + 1 = 0$ egyenlet négy gyöke számtani sorozatot alkot. Mennyi $8[p]^2 + 4\,\mathrm{sgn}\,p$? **(35 pont)**

**6.** Malacka, Füles és Mackó számgondolósat játszottak. Mindhárman gondoltak egy-egy számra és megsúgták Bagolynak. Bagoly a számokról a következőket árulta el: összegük 0, szorzatuk nem 0, köbeik összege ugyanannyi, mint ötödik hatványaik összege. Mennyi négyzeteik összegének 100-szorosa? **(45 pont)**

**7.** Micimackó és Malacka miközben saját nyomaikat menyétnyomnak nézték, a hóban két hatalmas kört írtak le. Az eredeti történettől eltérően, a két illető külön-külön körzött, a két kör nem metsző és nincs egyik a másikban. Róbert Gida a fa tetejéről figyelte őket és megállapította, hogy a két kör közös külső és belső érintőjén az érintési pontok közti szakaszok hossza 26 és 22. Mekkora a sugarak szorzata? **(25 pont)**

**8.** BGLY MTMTK KNYVBN TLLTK:
JLLJ $(n)_k$ *k* SZM N-HZ LGKZLBB TBBSZRST. LDJK MG Z GYNLTRNDSZRT Z GSZ SZMK HLMZN, S HTRZZK MG ***x–y*** RTKT: $(4x)_5 + 7y = 15$; $(2y)_5 - (3y)_7 = 74$. **(30 pont)**

**9.** No, mi baj Füles? Semmi, Róbert Gida. Szóra sem érdemes. Nem fontos. Csak éppen számolgatom a bűvös számokat, amelyek a 10 különböző jegyből álló 99999-cel osztható pozitív egészek. Most már együtt számolgattak. Hány bűvös szám van? **(40 pont)**

**10.** „Mozgalmas és elfoglalt napja volt Nyuszinak ez a nap. Már reggel úgy ébredt, hogy nagyon fontosnak érezte magát, és mintha egyenesen tőle függne valami. Olyan nap volt, amikor Szervezni kell valamit, vagy Levelet írni Nyuszi s.k. aláírással, vagy megmondani a véleményét valamiről, amiben mindenki élénken helyesel.” Rokonai és Üzletfelei már régóta noszogatják, mondja már meg, melyik a legkisebb $b$>1 alapú számrendszer, amiben van $\overline{xyxy}_b$ alakú pozitív köbszám. Ma ezt végre meghatározhatjuk. **(35 pont)**

**11.** Aha, ha hézagos műveltségem nem hagy cserben, akkor ez a bucka Nyuszi lakását jelenti, Nyuszi pedig Jó Társaságot és valami harapnivalót. De mit keres itt a bucka előtt ez a kocka? És hány olyan sík van a térben, amelyik áthalad a kocka élei közül legalább három felezőpontján? **(40 pont)**

**12.** Mindent szeretnek a Tigrisek – mondta Tigris. Kivéve a mézet, a kukoricát és a bogáncsot, derült ki később. Viszont a geometriát nagyon szeretik! Még a csukamájolajról is képesek megfeledkezni egy ilyen példa kedvéért: az $ABC$ hegyesszögű háromszögben $AH$, $AD$ és $AM$ rendre az $A$-ból húzható magasság, szögfelező és súlyvonal. Az $AB$, $AC$ és $MD$ szakaszok hossza 1100, 800 és 100. Mekkora a $DH$ szakasz? **(40 pont)**

**13.** Róbert Gida sokat mesélt Tigrisnek a Kastélyról, amelynek pincéjében 7 törpe őrzi a kincset. A kincs 12 ajtó mögött van, mindegyik ajtón 12 különböző lakat. Összesen tehát 144 különböző lakat. Mindegyik törpénél néhány kulcs van úgy, hogy bármely három törpénél megvan az összes zár kulcsa. Legalább hány kulcs van a 7 törpénél összesen? **(25 pont)**

**14.** Fülest születésnapján Mackó egy egészen különleges, tetraéder alakú léggömbbel szeretné meglepni. Miközben az „Éder, éder, tetraéder” kezdetű versikét fabrikálta magában, azon gondolkozott, hogy amennyiben az $ABCD$ tetraéder belső pontja $P$, és az $ABCP$, $ABDP$, $ADCP$ és $BCDP$ tetraéderek súlypontjai $K,L,M,N$, akkor hányszorosa a $KLMN$ térfogatának az $ABCD$ térfogata. **(30 pont)**

**15.** Egy napon, amikor Róbert Gida és Micimackó és Malacka egyszerre beszéltek mind a hárman, Róbert Gida lenyelte a falatot, amivel tele volt a szája és megkérdezte: Ha az $ABC$ háromszögben $\alpha = 2\beta$, $\gamma$ tompaszög, az $a,b,c$ oldalak egészek, akkor szerintetek mennyi lehet a kerület lehetséges legkisebb értéke? **(45 pont)**

**16.** Füles azt gondolta: „Miért?” –és néha azt gondolta: „Minekutánna”; és néha azt gondolta: „Amennyiben.” Vagy: „Minekutánna tehát.” És néha nem is tudta, hogy mire gondol. Így hát őszintén megörült, amikor meglátta Micimackót, aki megkérdezte tőle: melyik a legnagyobb $N$, amelyre az $\{1,2,\ldots,N\}$ halmaz elemei között ugyanannyi 3-mal osztható van, mint 5-tel vagy 7-tel osztható? **(30 pont)**

**17.** Egy napon, mikor Micimackónak semmi dolga nem akadt, eszébe jutott, hogy rendezgetni kéne az almáriumban a csuprokat. 12 csuprot rakott sorba egy polcon. Határozzuk meg az 1,2,…,11,12 számok azon $(a_1,a_2,\ldots,a_{12})$ permutációinak a számát, amelyekre igaz, hogy pontosan egy $i\in\{1,2,\ldots,11\}$ indexre teljesül, hogy $a_i > a_{i+1}$. **(25 pont)**

**18.** Malacka szobáját egy színes négyzet díszíti. A négyzet kerületének minden pontját kiszínezték úgy, hogy nincs olyan derékszögű háromszög, melynek minden csúcsa a négyzet határán lenne és csúcsai ugyanolyan színűek. Legalább hány szín kellett a színezéshez? **(20 pont)**

**19.** Trallala, trallala, pritty pretty prütty, dudorászta Micimackó, miközben egy 10×10-es tábla mezőit színezgette úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban legfeljebb 5 különböző színű mező legyen. Legfeljebb hány színt használhatott? **(55 pont)**

**20.** Micimackó az almáriumban rendezkedve az egyik üres mézescsuporban egy kis cédulát fedezett fel, melyen ez állt: Határozzuk meg a legkisebb páratlan pozitív $N$ egészt, amelyre $N^2$ páratlan sok (egynél több) szomszédos pozitív egész négyzetének összege. Mackó elhatározta, addig nem eszik mézet, amíg a feladatot meg nem oldja. **(55 pont)**