Feladatok egyszerűen

1. Legyen P az ABC szabályos háromszög belső pontja. P merőleges vetülete a BC, CA és AB oldalakra rendre A_1, B_1 és C_1. Tudjuk, hogy $AC_1 = 4$, $C_1B = 8$ és $BA_1 = 5$. Mennyi $CB_1 \cdot B_1A$?

2. Hány olyan 8-jegyű szám van, ami a 9-edére csökken, ha az első számjegyét töröljük?

3.
Egy 21 elemű sorozat az 1, 2, …, 21 számokból áll, mindegyik pontosan egyszer szerepel benne. A sorozat elemein balról jobbra végighaladva felsoroljuk, hogy tőlük balra hány náluk nagyobb szám található a sorozatban. Az eredmények így következnek egymás után balról jobbra haladva:

$$0, \quad 0, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 2, \quad 3, \quad 3, \quad \ldots \quad 9, \quad 9, \quad 10.$$

A 3-astól jobbra hány nála nagyobb szám található?

4. Az ABC háromszögben A_1 és B_1 a BC illetve AC oldalak belső pontjai. AA_1 és BB_1 metszéspontja M. Az AMB_1, AMB és BMA_1 háromszögek területe rendre 3, 7 és 7 egység. Mennyi a CB_1MA_1 négyszög területe?

5.

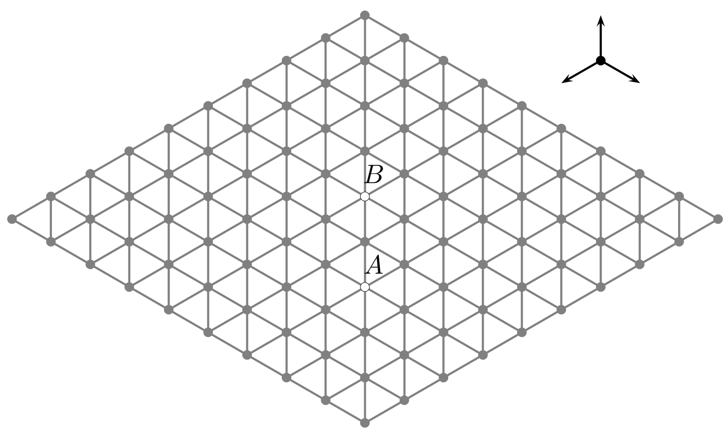
$$\prod_{k=2}^{100} \frac{k^3+1}{k^3-1} = \frac{p}{q}$$

Adjuk meg $p+q$ értékét, ha p és q relatív prím pozítív egészek.

6. Az $A_1A_2A_3A_4$ egységnégyzet oldalain felvesszük a B_1, B_2, B_3 és B_4 pontokat úgy, hogy B_i az A_iA_{i+1} szakaszon legyen (ahol természetesen $A_5 = A_1$) és $A_iB_i = \frac{1}{n}$ teljesüljön. Mi az a legkisebb n egész, amire az A_1B_2, A_2B_3, A_3B_4 és A_4B_1 egyenesesek által meghatározott négyzet területe legalább 0.9?

7. Legfeljebb hány eleme lehet egy egész számokból álló M halmaznak, ha M egyik eleme sem osztható 7-tel, de bármely 4 eleme közt van néhány, melyeknek összege osztható 7-tel?

8. A szabályos *végtelen* háromszögrácsban rácspontról szomszédos rácspontra léphetünk, de csak a három megadott irányban. Hányféleképpen juthatunk el az A pontból a B pontba, ha 13-nál nem léphetünk többet? (Azokat az utakat is vegyük számításba, amelyek menet közben előbb is átmennek B-n, majd visszatérnek oda.)



9. Adjuk meg $\lfloor 100xy \rfloor$ értékét, ha x és y olyan racionális számok, amelyekre

$$\sqrt{2\sqrt{3}-3} = \sqrt{x\sqrt{3}} - \sqrt{y\sqrt{3}}.$$

10. *Kömal, P.94., 1971/10 old 219, Vesztergombi Katalin javaslata*
Az 1, 2, ..., 16 számoknak, hány olyan $i_1, i_2, \ldots, i_k$ permutációja van, amelyben minden $1 \leq k \leq 16$ mellett teljesül az $|i_k - k| \leq 1$ feltétel?

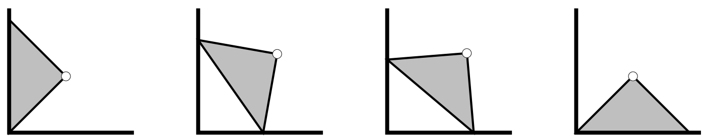
11. Hány részre vágják a szabályos tetraédert azok a síkok, amelyek tartalmazzák a tetraéder egy-egy élét és átmennek a szemköztes él felezőpontján?

12. Egy téglatest minden éle és testátlója egész hosszúságú méterben mérve. Tudjuk, hogy a téglatestnek pontosan annyi m^2 a felszíne, mint ahány m^3 a térfogata. Határozzuk meg a testátló lehetséges legnagyobb hosszát.

13. Legyen $a = 1 + \sqrt{5}$. Mennyi

$$S = (4 - a) \cdot \sqrt{2 + a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{3a + 4}$$

14. Mézga Aladár egyik űrutazásán laposföldjén járt. Itt látta, ahogy egy honpolgár egy egyenlő szárú derékszögű háromszög alakú bútort tolt át egy derékszögű sarkon az alábbi ábra szerint. Mekkora utat járt be eközben a derékszögű csúcs, ha az átfogó hossza 2 méter? Adjuk meg a megtett utat (tehát nem az elmozdulást és nem is a pályagörbe hosszát) centiméterben!



15. Egy konvex 24-szög csúcsai közül hányféleképpen lehet kiválasztani négyet úgy, hogy az általuk meghatározott konvex négyszög oldalai a 24-szög *átlói* legyenek?

16. Adott n lefordított pohár sorban az asztalon, ezek alatt golyók lehetnek. Meg akarjuk állapítani, hogy van-e két szomszédos pohár alatt golyó. Ehhez egyesével fordíthatunk fel poharakat. Ezt a feladatot nehéznek nevezzük, ha bármilyen jó stratégiát is választunk, lehetséges, hogy minden poharat fel kell fordítanunk, hogy megtudjuk a választ. Az $n = 1, 2, \ldots 2013$ értékek közül hánynál nehéz a feladat?

17. Melyik $n < 10000$-re van a legtöbb olyan k pozitív egész, hogy n-et $2k + 1$-gyel osztva k lesz a maradék? Adjuk meg n értékét!

18. Aladár egy 100 szakaszból álló töröttvonalon jut el az eredetileg tőle 900 m-re levő B ponthoz úgy, hogy minden pillanatban közelebb és közelebb kerül B-hez. Legfeljebb milyen hosszú lehet az útja (méterben)?

19. Az 1,2,3, ..., 8 számokat véletlenszerűen párokba rendeztük. A számegyenesen összekötjük a párok tagjait, így 4 szakaszt kapunk. Mennyi a valószínűsége, hogy ezek közt lesz olyan, ami az összes többit metszi? Adjuk meg a kapott valószínűség 2310-szeresének egész részét!

20. Aladár, Béla és Cili játszanak. Aladárnak 15, Bélának 17, Cilinek 20 dollárja van. Egy menetben véletlenszerűen kiválasztanak két olyan játékost, akinek még van pénze és azok egymással játszanak. $50 - 50\%$, hogy egyikük illetve másikuk nyer. A vesztes 1 dollárt ad a győztesnek. Akinek elfogy a pénze, ez kiesik. Addig tart a játék, amíg egyikük elnyeri az összes pénzt.
Átlagosan hány menetből áll a játék?

21. Aladár beírta az $1, 2, \ldots 81$ számokat egy 9×9-es táblázat mezőibe. Boldizsár ki szeretné találni, hogy melyik szám hol van. De csak úgy kérdezhet, hogy kijelöli a táblázat egy rácsvonalak határolta négyzet alakú részét. Válaszul Aladár felsorolja a kijelölt részben található számokat, a kedve szerinti sorrendben. Minimum hány kérdésre van szüksége Boldizsárnak ahhoz, hogy biztosan kitalálja melyik szám hol van?