XI. KAVICS KUPA

2015. március 20.

Részletek a versenyszabályzatból

- Emlékeztetünk arra, hogy válaszként minden feladatra egy egész számot kell feltüntetni a válaszlapokon (0000-tól 9999-ig).
- Ha a ti válaszotok nem egész szám, akkor annak egész részét írjátok a válaszlapra!
- Ha az eredmény negatív szám, vagy a feladatnak nincs megoldása, akkor 0000-t írjatok!
- Ha az eredmény nagyobb 9999-nél, vagy nem egyértelmű, akkor 9999-t írjatok válaszul!
- A számolás során jól jöhetnek az alábbi közelítő értékek:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416$$

Időhatárok

- A Jolly feladat kijelölésére az első 15 percben van lehetőség.
- Az első 30 perc leteltével már nem lehet a szöveggel kapcsolatos kérdéseket feltenni. Kérdéseket csak a csapatkapitányok tehetnek fel a zsűrinél.
- 90 perc elteltével a versenynek vége.

Különfeladat (a mai napfogyatkozás alkalmából):
A mai napfogyatkozás időtartamát szeretnénk kiszámolni. Ehhez a következő egyszerűsítő feltételezésekkel élünk:

- A Nap és a Hold fél fok átmérőjű körök az éggömbön.
- A Föld forgásától és Nap körüli keringésétől eltekintünk.
- A Hold 28 nap alatt kerüli meg a Földet, mozgása körpályán történik állandó sebességgel.
- A napfogyatkozás során a legnagyobb kitakarás aránya $\frac{5}{6} - \frac{1}{2\pi}$.
- A Nap és a Hold kis látszólagos mérete miatt a felmerülő területek és távolságok Euklideszi módon számolhatók.

Percre kerekítve milyen hosszú a napfogyatkozás a feltevések alapján? (A napfogyatkozás időtartama alatt azt értjük, amíg van közös pontja a Nap és a Hold korongjának.)

(50 pont, a válaszlapon KF-et írjatok a feladat sorszáma rovatba)

1. feladat Két egymást követő naptári év során legfeljebb hányszor eshet egy hónap tizenharmadik napja péntekre? **(30 pont)**

2. feladat Az $ABCD$ tetraéder éleinek hossza növekvő sorrendben: 7, 13, 18, 27, 36 és 41. Az AB él hosszúsága 41. Mekkora a CD él hossza? **(20 pont)**

3. feladat Számold ki:

$$60 \cdot \left(\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} \right)$$

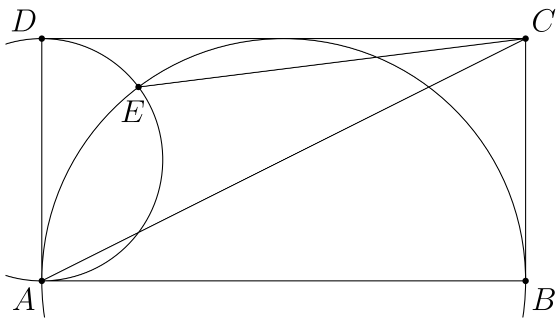
(25 pont)

4. feladat Adott a térben négy nem egy síkban fekvő pont. Hány olyan sík van, amelytől mind a négy pont egyenlő távol van? **(20 pont)**

5. feladat Tekintsük az 1001-nél kisebb nevezőjü törtek közül azt, amely a lehető legkevésébé tér el a $\frac{123}{1001}$-től. Mennyi ennek a törtnek a nevezője? (A törtek nevezője pozitív egész.) **(35 pont)**

6. feladat Egy sakktábla egyik főátlójától jobbra eső mezőket levágtuk, így maradt egy 36 mezőből álló „lépcső”. A lépcső mezőit szeretnénk csoportokba osztani úgy, hogy egy bármely két csoport különböző számú mezőből álljon, és az egy csoportba tartozó mezők egy-egy téglalapot alkossanak. (Minden mezőnek pontosan egy csoportban kell szerepelnie.) Hányféleképpen tehetjük ezt meg? **(25 pont)**

7. feladat Az $ABCD$ téglalap AB oldalának Thálesz-köre érinti a CD oldalát. Előbbi kör és a DA oldal Thalesz-köre az A-tól különböző E pontban metszi egymást. Határozzuk meg az ACE szög tangensének értékét!
A válasz a kapott tört egyszerűsített alakjában a számláló és a nevező összege. **(30 pont)**



8. feladat Hányféle módon lehet az $ABCDEFGHIJKL$ szabályos 12-szög csúcsait kiszínezni két színnel úgy, hogy ne jöjjön létre egyszínű szabályos sokszög a színezés során?
Két színezést különbözőnek tekintünk, ha a megbetűzött csúcsok legalább egyikének különböző a színe.
(30 pont)

9. feladat Melyik az a legnagyobb x egész szám, melyhez létezik olyan n pozitív egész szám, hogy $x^n + 2^n + 1$ osztja $x^{n+1} + 2^{n+1} + 1$-et? **(30 pont)**

10. feladat A Bergengóc parlament alsóháza 135, felsőháza 120 képviselőt számlál. Néhány képviselő ellensége egymásnak (az ellenségesség kölcsönös). Ha az alsóház képviselőit 15 egyforma létszámú csoportra osztjuk, mindenképp lesz az egyik csoportban két képviselő, akik ellenségei egymásnak. Ha felső ház képviselőit osztjuk 15 egyforma létszámú csoportra, ott is mindenképp lesz az egyik csoportban két képviselő, akik az ellenségei egymásnak.
Mennyi a 255 képviselő közötti ellenséges párok legkisebb lehetséges száma? **(35 pont)**

11. feladat Legyen P azon legfeljebb negyedfokú egész együtthatós polinomok halmaza, melyekben minden együttható a $-2, -1, 0, 1, 2$ számok valamelyike. Határozzuk meg a $\{p(4) : p \in P\}$ halmaz elemszámát. **(30 pont)**

12. feladat A P pontból egyszerre indul el két autó keleti irányba; 60 km/h illetve 135 km/h állandó sebességgel haladnak. Egy megfigyelő a P ponttól észak-keleti irányban 600 m távolságra helyezkedik el. Hány másodperccel a start után látja legnagyobb szögben egymáshoz képest a két autót? **(35 pont)**

13. feladat Egy 8×8-as táblázat 64 mezőjéből néhányat megjelöltünk előre. Egy lépésben megjelölhetünk egy eddig jelöletlen mezőt, ha az oldalszomszédos legalább 3 jelölt mezővel. Mi az a legkisebb k, amire kiválasztható úgy k mező, hogy azokat előre megjelölve, majd a fenti lépést ismételgetve megjelölhetjük az összes többi mezőt? **(50 pont)**

14. feladat Egy véges egyszerű gráfban minden csúcs foka 16. Tudjuk, hogy bármely két szomszédos csúcsnak pontosan 8, míg bármely két nem szomszédos csúcsnak pontosan 4 közös szomszédja van. Hány csúcsa van a gráfnak? **(35 pont)**

15. feladat Hány olyan pozitív egészekből álló kilenc elemű A halmaz van, melyre minden 500-nál nem nagyobb pozitív egész szám előáll A egy részhalmaza elemeinek összegeként? (Az egy elemből álló részhalmazok elemei összegének magát az elemet tekintjük.) **(50 pont)**

16. feladat Legyen p, q és r három különböző prímszám, és legyen

$$A = \left\{ p^a q^b r^c : 0 \le a, b, c \le 5 \right\}.$$

Melyik az a legkisebb $2 \le n \le 6^3$ egész szám, melyre az A halmaz tetszőleges n elemű részhalmazában található két különböző elem, melyek közül az egyik osztja a másikat? **(35 pont)**

17. feladat Az $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$xf(x) = xf\left(\frac{x}{y}\right) + yf(y)$$

egyenletet tetszőleges x és y pozitív valós számok esetén.
Mennyi $f(2015)$, ha tudjuk, hogy $f(2) = 2015$? **(40 pont)**

18. feladat Határozzuk meg azt a legnagyobb r egész számot, melyre az $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ halmaz bármely öt darab 500 elemű részhalmaza között található két olyan, melyek metszete legalább r elemű. **(40 pont)**

19. feladat Mennyi $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{97}^2$ legnagyobb lehetsége értéke, ha $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{100}$ és $x_1 + x_2 + \ldots + x_{100} = 1$?
A válasz a kapott tört egyszerűsített alakjában a számláló és a nevező összege. **(40 pont)**

20. feladat Egy vékony pálcán véletlenszerűen (egyenletes valószínűségi eloszlás szerint) kiválasztunk 5 pontot. Ezután eltörjük a pálcát ezeken a pontokon. Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott darabokból össze lehet állítani egy hatszöget?
A válasz a kapott tört egyszerűsített alakjában a számláló és a nevező összege. **(45 pont)**

21. feladat Hány tízezernél kisebb pozitív egész k szám elégíti ki a következő feltételt: ha egy egész együtthatós p polinomra $a = 0, 1, \ldots, k+1$ esetén teljesül a $0 \leq p(a) \leq k$ egyenlőtlenség, akkor $p(0) = p(1) = \ldots = p(k+1)$? **(45 pont)**