A CSAPATVERSENY FELADATAI

XIV. KAVICS KUPA

2018. március 13.

Részletek a versenyszabályzatból

- Emlékeztetünk arra, hogy válaszként minden feladatra egy egész számot kell feltüntetni a válaszlapokon (0000-tól 9999-ig).
- Ha az eredmény nagyobb 9999-nél, akkor a választ az eredmény utolsó 4 számjegye alkotja.
- Ha az eredmény negatív szám, vagy a feladatnak nincs megoldása, vagy nem egyértelmű a megoldás, akkor a válaszlapra ezt írjátok: ????.
- A számolás során jól jöhetnek az alábbi közelítő értékek:

$$\sqrt{2} \approx 1.4142 \quad \sqrt{3} \approx 1.7321 \quad \sqrt{5} \approx 2.2361 \quad \sqrt{7} \approx 2.6458 \quad \pi \approx 3.1416$$

Időhatárok

- A Jolly feladat kijelölésére az első 15 percben van lehetőség.
- Az első 30 perc leteltével már nem lehet a szöveggel kapcsolatos kérdéseket feltenni. Kérdéseket csak a csapatkapitányok tehetnek fel a zsűrinél.
- 90 perc elteltével a versenynek vége.

1. feladat Hány olyan háromszög van, melynek oldalai egész hosszúságúak, és a leghosszabb oldala 11 egység hosszú? (Csak a nem elfajuló háromszögeket számoljuk, melyeknek nincs 0°-os szöge.)
Ha a kapott szám n, a válasz n és 14 legkisebb közös többszöröse. **(20 pont)**

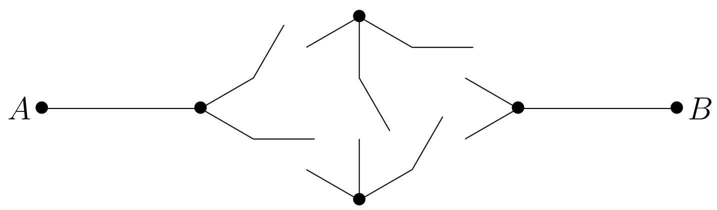
2. feladat Halhatatlan kapitánynak három halhatatlan unokája van, akiknek életkora három különböző prímszám és ezek négyzetének összege is prímszám. Hány éves a kapitány legkisebb unokája? (Ne feledjük, hogy az unokák halhatatlanok, így életkoruk nagyon nagy szám is lehet!)
Ha a kapott szám n, a válasz $2018 - 14 \cdot n$ értéke. **(20 pont)**

3. feladat Legyen $f(x) = |1 - 2x|$ a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett függvény. Hány megoldása van az $f(f(f(x))) = \frac{x}{2}$ egyenletnek?
A válasz a megoldások számának tizennégyszerese. **(20 pont)**

4. feladat A P pont az $ABCD$ négyzet síkjának egy olyan pontja, melyre teljesül, hogy a PAB, PBC, PCD, PDA háromszögek mindegyike egyenlő szárú háromszög. Hány ilyen P pont van? (Nem számoljuk az elfajuló háromszögeket, melyeknek van $0°$-os szöge.)
Ha a kapott szám n, a válasz $\frac{n}{14}$ törtrésze tízezerszeresének egészrésze. **(25 pont)**

5. feladat Tekintsük a $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 3$ egyenletet. Hány nemnegatív egészekből álló megoldása van? *Ha a kapott szám n, a válasz $n + 14$.* **(25 pont)**

6. feladat Az ábrán látható áramköri részletben minden kapcsoló egymástól függetlenül $\frac{1}{2}$-$\frac{1}{2}$ valószínűséggel van nyitva vagy zárva. Mi a valószínűsége annak, hogy A-tól B-ig eljut az áram?
A válasz az eredményül kapott racionális szám tovább nem egyszerűsíthető alakjában a számlálónak, a nevezőnek és 2018-nak az összege.



(25 pont)

7. feladat Határozzuk meg azt a két legkisebb pozitív egészet, amelynek 13-szorosát 7-es számrendszerben felírva az utolsó előtti számjegy 4, az utolsó számjegy pedig 3.
A válasz a két szám növekvő sorrendben, egymás után írva. **(30 pont)**

8. feladat Legyen $ABCD$ tetszőleges négyszög, és legyenek A_1, B_1, C_1, D_1 rendre a BCD, ACD, ABD, illetve ABC háromszögek súlypontjai. Határozzuk meg az A_1, B_1, C_1, D_1 négyszög és az $ABCD$ négyszög területének arányát.
A válasz a kapott racionális szám tovább nem egyszerűsíthető alakjában a nevező tizennégyszeresének és a számlálónak az összege. **(30 pont)**

9. feladat Legyen bármely két x és y valós számra $x \sim y = ax + by + cxy$, ahol a, b, c konstansok. Tudjuk, hogy $1 \sim 2 = 3$ és $2 \sim 3 = 4$ és létezik egy olyan d nem nulla, valós szám, hogy $x \sim d = x$ minden valós x esetén teljesül.
A válasz $d \sim (-2018)$ értéke. **(30 pont)**

10. feladat Tizenhat város mindegyike nevezett egy A és egy B csapatot egy focibajnokságba. A bajnokság során egy tetszőleges csapatnak a saját városa másik csapata kivételével mindegyik csapattal meg kell küzdenie. Valamikor a verseny során az egyik város A csapata észrevette, hogy mindegyik másik csapat különböző számú mérkőzést játszott. Hány mérkőzést játszott ennek a városnak a B csapata?
Ha a kapott szám n, akkor a válasz $n + 14$. **(35 pont)**

11. feladat Az ABC háromszög A-nál, B-nél, C-nél levő szögeit jelölje rendre α, β, γ. Ha $\sin\alpha = 3/5$ és $\cos\beta = 5/13$, akkor mennyi $\cos\gamma$ értéke?
A válasz a kapott tört legegyszerűbb alakjában a számláló majd a nevező egymás után írva. **(35 pont)**

12. feladat Az $1, 4, 8, 10, 16, 8, 21, 25, 30, 43$ számsorozatnak hány olyan egymást követő tagokból álló részsorozata van, amelyben a tagok összege osztható 11-gyel?
A válasz $2018 - n$. **(35 pont)**

13. feladat Hány különböző megoldása van a $\cos\frac{x}{4} = \cos x$ egyenletnek a $(0; 24\pi)$ intervallumon?
Ha az eredmény n, a válasz $n + 14^2$. **(35 pont)**

14. feladat Egy szabályos oktaéder minden éle 3 egység hosszú. Mindegyik csúcsánál vágjunk le egy-egy szabályos, egység oldalú négyzet alapú gúlát. A kapott poliédernek k éle van, ezeket megszámozzuk az 1, 2, ..., k számokkal. Határozd meg, hány olyan $(i; j)$ számpár van $(1 \leq i < j \leq k)$, hogy a poliéder i. és j. élei kitérő egyenesek.
Ha a kapott szám n, akkor a válasz $n + 1144$. **(40 pont)**

15. feladat Egy ország a szigetvilágban N szigetet tartalmaz, legyenek ezek $A_1, A_2, \ldots, A_N$. A Közlekedési Hatóság hidak építését tervezi, hogy autóval el lehessen jutni bármely szigetről bármely másikra néhány hídon át. Technikai okok miatt hidat csak A_i-ből A_{i+1}-be lehet építeni $(i = 1, 2 \ldots, N-1)$ vagy A_i-ből A_N-be, ha $i < N$.

A hidak építésére terveket készítenek. Nevezzünk egy tervet *jónak*, ha az eddigi követelmények teljesülnek, de bármely hidat kihagyva már nem. Legyen a jó tervek száma a_N. Például $a_1 = 1$ (az egyetlen jó terv, ha nincs is híd), és $a_2 = 1$ (van egy híd a két sziget között).
A válasz $a_6 + 14$. **(40 pont)**

16. feladat Egy sorban 8 ember ül, összesen 4 országból érkeztek, mindegyik országból pontosan ketten. Hány olyan permutációja létezik a 8 embernek, melyre teljesül, hogy bármely két szomszédos ember különböző országból érkezett?
Ha a kapott szám n, akkor a válasz $n - 10000$. **(45 pont)**

17. feladat Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $B = \{1, 2, 3\}$. Az f egy jó függvény, ha az értelmezési tartománya A, értékkészlete pedig részhalmaza A-nak. Hány olyan jó f függvény van, amire teljesül az is, hogy az $f(f(x))$ értékkészlete pont a B halmaz?
Ha a kapott szám n, akkor a végeredmény $n + 1414$. **(45 pont)**

18. feladat Hányféleképpen lehet egy 3×10-es téglalapot 2×1-es dominókkal kirakni?
A válasz a kapott szám 14-szerese. **(45 pont)**

19. feladat Egy hexa-bitetraéder és egy szabályos oktaéder lapjai egybevágó szabályos háromszögek. A két poliéder beírt gömbje sugarának hányadosa legyen m/n, ahol $(m, n) = 1$. (A hexa-bitetraéder hat darab szabályos háromszöglappal rendelkezik, mintha két tetraédert egy lapjuk mentén összeragasztanánk.)
A válasz $14mn + 14m + n$ értéke. **(50 pont)**

20. feladat

$$f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}, \quad n = \sum_{i=1}^{2018} f\left(\frac{i}{2019}\right).$$

A válasz $2018 + n$. **(50 pont)**