Pálmay Lóránt Matematikai Tehetségkutató Verseny
2023. január 12.

A feladatok megoldása

1. feladat. Pistinek három edénye van, amelyeknek térfogata literben mérve egész szám, és mindegyik legalább 2 literes. A három edénybe összesen 10 liter folyadék fér. Hány literesek az edények? Sorold fel az összes lehetőséget! **(6 pont)**

Megoldás:

	Egyik edény	Másik edény	Harmadik edény
1. lehetőség	2 l	2 l	6 l
2. lehetőség	2 l	3 l	5 l
3. lehetőség	2 l	4 l	4 l
4. lehetőség	3 l	3 l	4 l

A fenti táblázat alapján összesen 4 lehetőség van.

Minden lehetőség megtalálása 1 pont. Ha a versenyző nem sorol fel további, rossz lehetőségeket, akkor azért további 1 pont jár. A (jó) szöveges válasz 1 pontot ér.
Minden helytelen megoldásért 1 pont levonás jár. Ha egy esetet többször is felsorol, csak más sorrendbe téve a számokat, azért is 1 pont levonás jár, kivéve, ha mind a négy lehetőségnél figyelembe veszi az edények sorrendjét is, és ezeket különböző lehetőségnek tekinti - ekkor megkaphatja a maximális pontszámot. (Például a 2,3,5-nél a 2,5,3; 3,2,5; 3,5,2; 5,2,3 és 5, 3,2 eseteket is, valamint a 2,2,6-nál a 2,6,2; 6,2,2 lehetőségeket is.)

Összesen: 6 pont

2. feladat. Egy ládában 5 pár kék színű kesztyű, és 13 pár piros színű kesztyű van összekeveredve (a párok tagjai nincsenek összekötve). Egyesével húzunk kesztyűket a ládából, és csak a húzás után tudjuk megállapítani a kesztyű színét, illetve azt, hogy jobb- vagy balkezes.

a) Legalább hány kesztyűt kell kivennünk, hogy a kihúzottak között biztosan legyen legalább 1 jobb- és 1 balkezes?
b) Legalább hány kesztyűt kell kivennünk, hogy a kihúzottak között biztosan legyen legalább 1 egyszínű pár?
c) Legalább hány kesztyűt kell kivennünk, hogy a kihúzottak között biztosan legyen legalább 1 kék pár? **(7 pont)**

Megoldás:

a) Egyforma (csak jobbkezes, vagy csak balkezes) kesztyűből legfeljebb 18 darabot húzhatunk (13 pirosat és 5 kéket).

1 pont

Ezért a 19. kihúzott kesztyű után biztosan lesz egy jobb és egy balkezes kesztyű is, míg a 18. kihúzása után még nem feltétlenül, tehát legalább 19-et kell húznunk.

1 pont

b) Ahhoz, hogy ne legyen egyszínű pár, a pirosakból és a kékekből is külön-külön csak egyféle (csak jobbkezes vagy csak balkezes) darabokat húzhatunk. Tehát legfeljebb 13 pirosat húzhatunk ki úgy, hogy ne legyen köztük pár, és legfeljebb 5 kéket, hogy köztük se legyen pár, így összesen legfeljebb 18 darabot tudunk kihúzni, hogy ne legyen egyszínű pár.

1 pont

A 19. kesztyű kihúzása után pedig biztosan lesz vagy kék, vagy piros pár. Tehát legalább 19-et kell kihúznunk.

1 pont

c) Legfeljebb $13 \cdot 2 = 26$ piros kesztyűt tudunk kihúzni, ezek között biztosan nem lehet kék pár.

1 pont

A kék kesztyűk közül legfeljebb 5 darabot húzhatunk (vagy csak balkezeset, vagy csak jobbkezeset), hogy azok között ne legyen pár.

1 pont

Tehát legalább $26 + 5 + 1 = 32$ kesztyű kihúzása után lesz biztosan egy kék pár köztük.

1 pont

Összesen: 7 pont

3. feladat. Egy háromfordulós versenyen az indulók létszáma 200-nál több, de 240-nél kevesebb volt. Az első forduló után ugyanannyian voltak Marci előtt, mint mögötte, a második után már kétszer annyian voltak mögötte, mint előtte. Végül négyszer annyian végeztek mögötte, mint előtte. A verseny során egyszer sem alakult ki holtverseny.

a) Hányan indultak a versenyen?
b) Hányadik lett végül Marci? **(9 pont)**

I. megoldás:

Marcin kívül legalább 200, de legfeljebb 238 versenyző volt, először az ő létszámukat keressük.

1 pont

Marcin előtt ugyanannyian végeztek, mint mögötte, ezért a számuk páros. (200, 202, 204, … , 236, 238 versenyző lehetett.)

1 pont

A második forduló végeredménye alapján tudjuk, hogy a létszám osztható 3-mal, azaz 3-mal osztva a maradék 0. Így számuk 204, 210, …, 234 volt.

2 pont

A harmadik forduló eredménye alapján ez a szám 5-tel is osztható, így csak 210 induló lehetett Marcin kívül.

1 pont

Marcival együtt 211 versenyző volt.

1 pont

A többiek ötöde végzett Marci előtt, ez 42 fő.

1 pont

Marci a 43. helyen végzett.

1 pont

Ellenőrzés: az első forduló után Marci előtt és mögött is 105 versenyző volt. A második forduló után előtte végeztek hetvenen, mögötte száznegyvenen. Végül 42 versenyző előtte, 168 utána.

1 pont

Összesen: 9 pont

II. megoldás

Marcin kívül legalább 200, de legfeljebb 238 versenyző volt, először az ő létszámukat keressük.

1 pont

Az egyes fordulók eredménye alapján tudjuk, hogy ez a szám osztható 2-vel, 3-mal és 5-tel is.

2 pont

Ha egy páros szám osztható 5-tel, akkor 0-ra végződik.

1 pont

Így Marcin kívül 210, 220 vagy 230 induló volt, ezen számok közül csak a 210 többszöröse a 3-nak,

1 pont

tehát Marcival együtt 211 versenyző volt.

1 pont

A többiek ötöde végzett Marci előtt, ez 42 fő.

1 pont

Marci a 43. helyen végzett.

1 pont

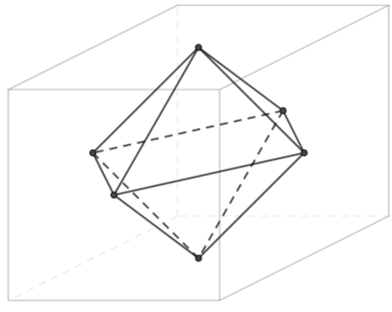
Ellenőrzés: az első forduló után Marci előtt és mögött is 105 versenyző volt. A második forduló után előtte végeztek hetvenen, mögötte száznegyvenen. Végül 42 versenyző előtte, 168 utána.

1 pont

4. feladat. Egy kocka szomszédos lapjainak középpontját összekötjük egy-egy szakasszal. Ezek a szakaszok egy másik test élei lesznek.

a) Hány csúcsa, éle, lapja van az új testnek?
b) Milyen sokszögek az új test lapjai?
c) Az új testnek hány lapja találkozik egy-egy csúcsban? **(12 pont)**

Megoldás:



Ábra, amiről látszik, a konstrukció. (Ezeket a pontokat akkor is kapja meg a versenyző, ha nem készít ábrát, de az a) kérdésre helyesen válaszol.)

3 pont

a) 6 csúcsa van,

1 pont

mert a kocka 6 lapján van egy-egy csúcs.

1 pont

12 éle van,

1 pont

mert a kocka lapjai 12 élben csatlakoznak, és csatlakozáskor rajzolunk az új testnek élet.
Vagy b) alapján: minden csúcsban 4 él találkozik, így $\frac{6 \cdot 4}{2} = 12$ él van.

1 pont

8 lapja van (elég, ha megszámolja az ábrán).

1 pont

b) Szabályos (egyenlő oldalú) háromszögek,

1 pont

mert a kocka csúcsaiban 3 lap találkozik, melyek egymással szomszédosak, ezek középpontjai alkotják a háromszög csúcsait.

1 pont

c) 4 lapja találkozik egy csúcsban,

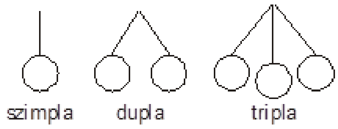
1 pont

mert a kocka egy lapjához 4 másik csatlakozik.

1 pont

Összesen: 12 pont

5. feladat. Egy tálban 140 szem cseresznye van. A cseresznyék szimplák, duplák vagy triplák, ezeknek a száma összesen 65. Tudjuk, hogy a duplák és a triplák száma ugyanannyi.



a) Hány darab tripla van a tálban?
b) Juliska kivette az összes szimplát és duplát a tálból, Jancsinak meghagyta az összes triplát. Kinek jutott így több szem cseresznye és mennyivel? **(13 pont)**

I. megoldás

Mivel a duplák és a triplák száma megegyezik, így minden duplát párba állíthatunk egy triplával. Egy-egy ilyen párban a szemek száma éppen 5.

2 pont

(A párokban összesen 5-tel osztható lesz a szemek száma, ezért szimpla cseresznyék száma is 5-tel osztható kell legyen.)
Ha nem lennének szimpla cseresznyék, akkor összesen $140 : 5 = 28$ pár lenne, azaz 28-28 dupla és tripla, összesen 56 cseresznye.

2 pont

Ez 9-cel kevesebb, mint amennyi a tálban van.

1 pont

Ha lecserélünk egy párt 5 szem szimpla cseresznyére, akkor a cseresznyék száma 3-mal fog nőni.

2 pont

Összesen 9-cel kell több cseresznye, ezért 3 párt kell szimpla cseresznyére cserélni, így a duplák és a triplák száma $28 - 3 = 25$,

2 pont

míg a szimpla cseresznyék száma $5 \cdot 3 = 15$ lesz.

1 pont

Juliskának tehát 15 szimpla, 25 dupla cseresznyéje van, ami összesen $15 + 2 \cdot 25 = 65$ szem,

1 pont

Jancsinak pedig $25 \cdot 3 = 75$.

1 pont

Tehát Jancsinak van több cseresznyéje, 10 szemmel.

1 pont

II. megoldás

Készítsünk táblázatot a szimplák, duplák és triplák számáról!

1 pont

Mivel a duplák és a triplák száma megegyezik, így összesen páros sok lesz a triplák és a duplák száma, tehát a szimplák száma páratlan kell legyen.

1 pont

Szimpla	65	63	61	…	15	…
Dupla	0	1	2	…	25	…
Tripla	0	1	2	…	25	…
Szemek száma	65	68	71	…	140	…

2 pont

A táblázatban minden oszlopban 3-mal nő a szemek száma,

1 pont

és összesen $140 - 65 = 75$-tel kell több szem, ezért $75 : 3 = 25$-ször kell növelni a szemek számát.

2 pont

Tehát 25 dupla és tripla és 15 szimpla cseresznye van.

3 pont

Juliskának tehát 15 szimpla, 25 dupla cseresznyéje van, ami összesen $15 + 2 \cdot 25 = 65$ szem,

1 pont

Jancsinak pedig $25 \cdot 3 = 75$.

1 pont

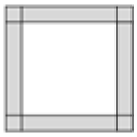
Tehát Jancsinak van több cseresznyéje, 10 szemmel.

1 pont

Összesen: 13 pont

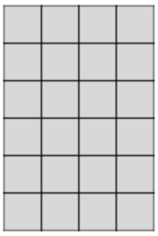
6. feladat. Edit talált egy ezüstszínű, téglalap alakú kartonlapot a kincses fiókban és képkeretet készített belőle. A karton egyik oldalának hossza másfélszerese a másik oldal hosszának. Edit felvágta a kartont 4 egyforma kisebb téglalapra a rövidebb oldalt 4 egyenlő részre osztva, majd az ábra szerint összeragasztotta. (A sarkokban a csíkok fedik egymást.) A keretbe egy képet tett. A képből látható rész területe 1 dm^2 –rel kisebb lett, mint a keret területe.

Hány cm-esek voltak az ezüstszínű kartonlap oldalai? (Az ábra nem méretarányos.)

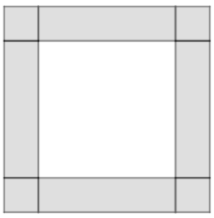


(13 pont)

Megoldás:



A téglalapot a rövidebb oldala mentén 4 részre vágjuk, legyen ez az oldal 4 egység.
Mivel a hosszabb oldal ennek másfélszerese,
ezért a hosszabb oldal 6 egység, 1 pont
a terület 24 (terület)egység. 1 pont



Az összeragasztott keret sarkaiban 4 négyzet "tűnik el",
így a keret területe 20 (terület)egység. 2 pont
A kép területe 16 (terület)egység. 2 pont
A különbség 4 (terület)egység, ami 1 dm^2. 1 pont
*Így az ezüstkarton területe 6 dm^2. 1 pont
A kartonlap élei:

$$a \cdot \frac{3}{2} a = 6$$

$a^2 = 4$
$a = 2\ dm$ 2 pont

*Válasz: A téglalap rövidebb oldala 20 cm, a hosszabb 30 cm. 1 pont

Ellenőrizzük le: A 2 dm-es oldalt $\frac{1}{2}$ dm-es darabokra vágtuk. A keret sarkaiban $\frac{1}{4}\ dm^2$ terültek fedik egymást, összesen $4 \cdot \frac{1}{4} = 1\ dm^2$ –rel csökken keret területe a karton területéhez képest.
A keret területe így 5 dm^2.
A kép egy látható éle $3dm - 2 \cdot \frac{1}{2}\ dm = 2\ dm$
A kép területe 4 dm^2, ami 1 dm –rel kisebb a keret területénél. 2 pont

Megjegyzés:
A *gal megjelölt rész így is számolható: 1 (terület)egység 25 cm^2, 1 pont
így a kis négyzetek oldalai 5 centiméter hosszúak. 1 pont

A téglalap oldalai $5 \cdot 4 = 20$, illetve $5 \cdot 6 = 30$ centiméteresek. 2 pont

Összesen: 13 pont

Maximális pontszám: 60 pont